

Festkörperphysik und Topologie -
eine Einführung

1. Auflage

Bernhard Schiekel

Festkörperphysik und Topologie - eine Einführung.

Bernhard Schiekkel,

Vers. 1.03, 26.06.2023

©copyright: 2016-2023, D-89073 Ulm, B. Schiekkel.

Drucksatz mit L^AT_EX 2.3.6.1, unter openSUSE-Linux Leap 15.4 (Kernel 5.14.21),

KOMA-Script-2021.189.3.33svn58585-150400.17.1.noarch (T_EX Live 2021),

BibTeX-style natdin 3.0a4 (2005),

pdfT_EX Version 3.141592653-2.6-1.40.22 3.14159265-2.6-1.40.18 (T_EX Live 2021).

Versionsgeschichte:

- V-1.00, 19.05.2023: 1. vollständige Version des Physik-Teils, der Mathematik-Teil befindet sich bereits in der 3. Version.
- V-1.01, 31.05.2023: Kurzbiographie 'Archimedes' ergänzt.
- V-1.03, 26.06.2023: Korrektur-Lesung Festkörperteil abgeschlossen.

in Dankbarkeit meinen verehrten Eltern,
meinen inspirierenden und freundlichen Lehrern,
und Beate

Inhaltsverzeichnis

I	Einige Anwendungen der Geometrie und Topologie in der Festkörperphysik	13
1	Einführung	15
2	Konventionen	17
3	Einfache Geometrie in der Festkörperphysik	21
3.1	Darstellungen endlicher Gruppen	21
3.2	Bloch-Theorem	26
3.3	Bravais-Gitter	29
4	Anwendung der Morse Theorie auf die Van Hove Singularitäten in der Festkörperphysik	35
4.1	Zustandsdichten in der Festkörperphysik	35
4.2	Léon Van Hove (1924 – 1990)	38
4.3	Struktur der Van Hove Singularitäten in der Festkörperphysik	38
5	Geometrische Phasen in der Quantentheorie	53
5.1	Dirac Monopol	53
5.1.1	Dirac Monopol - in Diracs Darstellung	53
5.1.2	Dirac Monopol - geometrische Darstellung	59
5.2	Aharonow-Bohm Effekt	63
5.2.1	David J. Bohm (1917-1992)	63
5.2.2	Yakir Aharonov (* 1932)	66
5.2.3	Aharonow-Bohm Effekt - klassische Darstellung	67
5.2.4	Aharonow-Bohm Effekt - geometrische Darstellung	70
5.3	Berry Phase und Holonomie	73
5.3.1	Michael V. Berry (* 1941)	73
5.3.2	Barry M. Simon (* 1946)	74
5.3.3	Ein quantenmechanisches Adiabatentheorem	75
5.3.4	Berry-Phase	82
6	Integraler Quanten-Hall-Effekt	85
6.1	Klaus von Klitzing (1943)	85
6.2	Einführung in den integralen Quanten-Hall-Effekt	86
6.3	Klassischer Hall-Effekt	87
6.4	Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungs-Bild der QM	90

6.5	Kausalität und Kramers-Kronig Relationen	104
6.6	Ryōgo Kubo (1920-1995)	108
6.7	Kubo-Formel	108
6.8	Kubo-Formel für die elektrische Leitfähigkeit	122
6.9	David James Thouless (1934 – 2019)	127
6.10	Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit nach TKNN	129
6.11	Landau Niveaus	135
6.12	Translationen im Magnetfeld	137
6.13	Hall-Plateaus	141
6.14	Andre Geim (1958)	143
6.15	Konstantin Novoselov (1974)	144
6.16	Graphen	144
7	Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt	167
7.1	Frank Wilczek (1951)	168
7.2	Emil Artin (1898 - 1962)	169
7.3	Anyonen und Zopfgruppe	169
7.4	Robert Laughlin (1950)	180
7.5	Laughlin Wellenfunktion	180
7.5.1	Landau-Quantisierung des 1-Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld	181
7.5.2	Verallgemeinerung vom 1-Teilchen harmonischen Oszillator auf einen 2-Teilchen harmonischen Oszillator in einem statischen Magnetfeld	192
7.5.3	Vorschlag von Laughlin für die Grundzustands-Wellenfunktion eines n -Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld	196
7.6	Topologische Entartung des Grundzustands	207
7.7	Verallgemeinerte Anyonen-Modelle	209
7.7.1	Formalismus verallgemeinerter Anyonen-Modelle	209
7.7.2	Beispiel: Fibonacci-Anyonen	217
7.7.3	Quantencomputer mit Fibonacci-Anyonen	228
II	Mathematische Anhänge	233
8	Euklid und Archimedes	237
8.1	Euklid von Alexandria (Εὐκλείδης, ca. 365-290 v. Chr.)	237
8.2	Euklid: Winkel in der Ebene	238
8.3	Archimedes von Syrakus (Ἀρχιμήδης, 287 - 212 v. Chr.)	241
8.4	Archimedes: Kugelflächen	241
9	Harriot und Girard: sphärische Dreiecke	245
10	Krümmung von Kurven	247
10.1	Die Krümmung von Kurven von Newton bis Frenet-Serret	247
10.2	Leonhard Euler (1707 – 1783)	251

10.3	Euler und die Krümmung von Flächen	252
11	Tangentialvektoren und Differentialformen	257
11.1	Differentialformen	257
11.2	Rücktransport von Differentialformen höherer Stufe	261
11.3	Äußere Ableitung von Differentialformen	263
11.4	Integrale von Differentialformen und Rücktransport	264
12	Geodäten	267
13	Euler-Charakteristik von konvexen Polyedern	271
14	Flächentheorie von Gauß	275
14.1	Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)	275
14.2	Erste und zweite Fundamentalform einer Fläche	277
14.3	Gauß-Krümmung	281
14.4	Integrabilitätsbedingungen von Gauß, Codazzi, Mainardi	282
14.5	Integrabilitätsbedingungen und der Satz von Frobenius	284
14.6	Das <i>Theorema Egregium</i> von Gauß	294
15	Riemannsche Geometrie	297
15.1	Bernhard Riemann (1826 – 1866)	297
15.2	Basen im Tangentialraum und Vielbeine	298
15.3	Lie-Ableitung	303
15.4	Das Lemma von Poincaré	309
15.5	Affiner Zusammenhang oder kovariante Ableitung	311
15.6	Der Torsionstensor	315
15.7	Der Krümmungstensor	318
15.8	Élie Cartan (1869 - 1951)	322
15.9	Die Cartansche Zusammenhangsform	323
15.10	Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metrik	328
15.11	Der metrisch-affine Zusammenhang	331
15.12	Der Levi-Civita Zusammenhang	334
15.13	Riemannsche Normalkoordinaten und Exponentialabbildung	340
15.14	Geometrie in einer 2-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeit	343
15.15	Gauß-Krümmung in m Dimensionen	348
15.16	Äußere Krümmung in m Dimensionen	352
16	Der Satz von Gauß-Bonnet	365
16.1	Pierre Ossian Bonnet (1819 - 1892)	365
16.2	Der Umlaufsatz von Hopf	366
16.3	Der lokale Satz von Gauß-Bonnet	369
16.4	Der globale Satz von Gauß-Bonnet	372
17	Der Abbildungsgrad von Brouwer	379
17.1	Der Satz von Brouwer	379

17.2	Die Windungszahl	388
17.3	Der Kronecker-Index eines Vektorfeldes	389
18	Anfänge der Homotopie und Fundamentalgruppen	393
18.1	Jules Henri Poincaré (1854 - 1912)	393
18.2	Grundgedanken der Homotopie	394
18.3	Fundamentalgruppen	395
19	Das Konzept der Überlagerungsräume	405
19.1	Topologische Überlagerungsräume	405
19.2	G -Räume und G -Überlagerungen	410
20	Simpliziale Homologie	415
20.1	Grundgedanken der Homologie	415
20.2	Simplexe	416
20.3	Simpliziale Approximation	418
20.4	Simpliziale Homologie	421
20.5	Berechnung simplizialer Homologiegruppen	429
20.6	Relative simpliziale Homologiegruppen	435
21	Singuläre Homologie	437
21.1	Der Satz von Stokes	438
21.2	Von Simplexen zu singulären Simplexen	440
21.3	Exakte Sequenzen und Diagrammjagd	448
21.4	Relative singuläre Homologiegruppen	453
21.5	Der Homotopiesatz	456
21.6	Der Ausschneidungssatz	463
21.7	Mayer-Vietoris Sequenzen	470
21.8	Kugeln und Kugeloberflächen	474
21.9	Äquivalenz von simplizialer und singulärer Homologie	479
21.10	Glatte singuläre Homologiegruppen	480
22	Morse Theorie	483
22.1	Harold Calvin Marston Morse (1892-1977)	483
22.2	John Willard Milnor (1931)	484
22.3	Morse Theorie - Homotopie und Henkelzerlegung	486
22.4	Morse Theorie - Homologie und Morse Ungleichungen	504
23	Der verallgemeinerte Satz von Gauß-Bonnet	509
23.1	Der Satz von Gauß-Bonnet für m -dimensionale Hyperflächen	509
24	de Rham Kohomologie	513
25	Hodge-Theorie	523
25.1	Hodge-Stern-Operator	523
25.2	Hodge-Laplace-Operator	530

25.3	Hodge-Zerlegung und der Satz von Hodge	534
26	Einige Sätze zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren	537
26.1	Lie-Gruppen	537
26.2	Integration über Lie-Gruppen	541
26.3	Lie-Algebren	544
26.4	Der Satz von Baker-Campbell-Hausdorff	553
26.5	Killing-Formen	558
26.6	Die Lie-Gruppen $SO(3)$ und $Spin(3) \simeq SU(2)$	563
26.7	Die Lie-Gruppen $O(3, 1)_+^\uparrow$ und $Spin(3, 1) = SL(2, \mathbb{C})$	569
26.8	Darstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren	579
26.9	Produktdarstellungen	586
26.10	Das Lemma von Schur	587
26.11	Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ und $SO(3)$	589
26.12	Darstellungen der Lorentz-Gruppe	594
26.13	Spinor-Indizes	598
27	Graßmann-Algebren	607
27.1	Hermann Günther Graßmann (1809-1877)	607
27.2	Graßmann-Algebren	608
28	Clifford-Algebren	613
28.1	William Kingdon Clifford (1845-1879)	613
28.2	Einführung in die Clifford-Algebren	614
28.3	Struktur und 8-Periodizität	619
28.4	Clifford-, Pin- und Spin-Gruppen	629
28.5	Spin-Lie-Algebren	636
28.6	Darstellungen von Clifford-Algebren	638
28.7	Majorana-Fermionen	649
29	Die Dirac-Gleichung	651
29.1	Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)	651
29.2	Die Dirac-Gleichung in der Minkowski-Raumzeit	653
29.3	Die Diracschen Gamma-Matrizen	665
29.4	Dirac Gleichung mit elektromagnetischem Feld	670
29.5	Die CPT-Symmetrien	673
29.6	Majorana-Spinoren	676
29.7	Die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit	677
29.8	Elliptische lineare partielle Differential-Operatoren	692
29.9	Der euklidische Dirac-Operator	695
30	Faserbündel und Krümmung	697
30.1	Charles Ehresmann (1905-1979)	697
30.2	Faserbündel	698
30.3	Faserbündel-Abbildungen	702

30.4	Zusammenhang und Krümmung von Prinzipalbündeln	703
30.5	Kovariante Ableitung in assoziierten Vektorbündeln	718
31	Eichtheorien	723
31.1	Chen Ning Yang (*1922)	723
31.2	Elektromagnetismus als $U(1)$ Eichtheorie	724
31.3	Yang-Mills $SU(n)$ Eichtheorie	731
32	Charakteristische Klassen	737
32.1	Shiing-Shen Chern (1911 - 2004)	737
32.2	Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908 - 1988)	739
32.3	Grundgedanken zu Charakteristischen Klassen	739
32.4	Der Chern-Weil Satz	741
32.5	Chern-Klassen	748
32.6	Chern-Charaktere	754
32.7	Additive und multiplikative Charakteristische Klassen	755
32.8	Todd-Klassen	760
32.9	Pontrjagin-Klassen	762
32.10	\hat{A} -Klassen	769
32.11	Euler-Klasse	775
32.12	Nieh-Yan-Klasse	777
32.13	Charakteristische Zahlen 1: Chern-, Pontrajagin-, Euler-Zahlen	778
32.14	Charakteristische Zahlen 2: Nieh-Yan-Zahlen	780
33	Die Indexsätze von Atiyah und Singer	789
33.1	Friedrich E. P. Hirzebruch (1927 - 2012)	789
33.2	Sir Michael Atiyah (1929-2019)	791
33.3	Isadore M. Singer (1924-2021)	793
33.4	Atiyah-Singer-Indexsatz für Vektorbündel	794
33.5	Atiyah-Singer-Indexsatz für de Rham Komplex	797
33.6	Atiyah-Singer-Indexsatz für Spinbündel	800
33.7	Atiyah-Singer-Indexsatz für Spinbündel mit assoziiertem Vektorbündel	801
34	Funktionalableitung	803
34.1	Funktionalableitung oder Fréchet-Ableitung	803
34.2	Funktional-Differentialgleichungen	810
A	PGF/TikZ-Braids	813
B	LyX- und L^AT_EX-Formatierungen	815
B.1	LyX Document settings	815
B.2	L ^A T _E X preamble	816
B.3	Einstellungen am Dokumentbeginn und Ende	819
	Literaturverzeichnis	821

Teil I

Einige Anwendungen der Geometrie und Topologie in der Festkörperphysik

1 Einführung

„In the 20th century, physicists learned that quantum phenomena in nature can be classified by quantum numbers. There arises the question how to describe quantum numbers in terms of mathematics. It turns out that there are two important possibilities to obtain quantum numbers, namely:
(S) symmetrie (the representation theory of compact Lie groups), and
(T) topology (topological invariants as topological charges or topological quantum numbers).”

Eberhard Zeidler (1940 - 2016), Zeidler (2006), S. 241.

Dieses Online-Buch behandelt im Teil-I Anwendungen von Geometrie und Topologie auf Phänomene der Festkörpertheorie und im Teil-II die zugehörige Mathematik aus Geometrie und Topologie. Teil-I behandelt:

1. Anwendung der Morse Theorie auf die Struktur der Van Hove Singularitäten von Zustandsdichten,
2. Geometrische Phasen in der Quantentheorie,
3. integraler Quanten-Hall Effekt, incl. Graphen,
4. fraktionaler Quanten-Hall Effekt, incl. Quantencomputing mit Fibonacci-Anyonen.

Zur Erleichterung der Leser und Leserinnen haben wir im Teil-II des Buches nochmals alle benötigte Mathematik aus dem folgenden Online-Buch des Autors (Schiekel (2019)) übernommen:

„Krümmungen und Indextheoreme - auf den Spuren von Gauß-Bonnet, Cartan, Atiyah-Singer und Witten.

Eine Einführung in Geometrie und Topologie für Physiker”.

Durch die vielen Verweise vom Physik-Teil zum Mathematik-Teil wird die Arbeit mit dem Manuskript deutlich erleichtert. Aber wie immer ist für Physiker die Beschäftigung mit der zugrundeliegenden Mathematik optional und zum Verständnis des Physik-Teils nicht zwingend erforderlich. Der Mathematik-Teil des Buches wendet sich also an Studenten, Studentinnen, Physiker und Physikerinnen, die sich für eine Einführung in Geometrie und Topologie im Zusammenhang mit moderner Physik interessieren. Dabei wurde in der Darstellung keine moderne mathematische, höchstmögliche Abstraktion, etwa im Sinne von Grothendieck, angestrebt, sondern ein leicht verständlicher Zugang

zur historischen Entwicklung einiger grundlegender Fragen der Geometrie und Differentialtopologie. Vorausgesetzt wurden daher nur einfache Kenntnisse der Analysis, linearen Algebra, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Differentialformen von Élie Cartan. Bei Physikern beliebte Einführungen zu diesen Themen sind: Flanders (1989), Schutz (1980) und insbesondere die schönen Darstellungen von Nakahara (2003) und Frankel (2004).

Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.
Galileo Galilei (1564 - 1642), zitiert nach Mat (2023).

The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites. P. Halmos
Zitiert nach: Functional Analysis, Reed u. Simon (1980), S. 1.

Seinem fünften Band über Differentialgeometrie hat Spivak den Titel gegeben:

All the Way with Gauss-Bonnet

- und dies könnte auch als Motto für die hier vorgelegte Arbeit dienen. Ein großer Dank allen in dieser Arbeit zitierten Autoren!

Special Thanks: Ein ganz spezieller Dank geht an die L^AT_EX- und L^AX-Community für die wunderbaren Open-Source Programme und die immer hilfreiche und freundliche Unterstützung!

Kommentare und Fehlerhinweise sind willkommen unter: mb.schiekel@arcor.de .

Möge diese Arbeit hilfreich sein. Viel Freude bei der Lektüre!

2 Konventionen

Wir verwenden die Konventionen von Misner u. a. (1973), an die sich weitgehend auch Nakahara (2003), Frankel (2004), Wald (1984) und Freedman u. Van Proeyen (2012) halten.

Die Lichtgeschwindigkeit c und Planck-Konstante \hbar sind, sofern nicht explizit angegeben, jeweils auf 1 gesetzt.

Wenn M eine Menge bezeichne, dann seien $\overset{\circ}{M}$ das Innere von M , ∂M der Rand von M und \bar{M} die Abschließung von M .

Wenn A eine Matrix ist, dann seien A^T die transponierte und A^\dagger die adjungierte Matrix.

Es wird im Allgemeinen die Einsteinsche Summenkonvention verwendet:

$$A^\mu B_\mu := \sum_{\mu=1}^m A^\mu B_\mu .$$

In Zweifelsfällen wird jedoch die Summation ausführlich hingeschrieben.

Die euklidische Metrik ist $g_{\mu\nu} := \delta_{\mu\nu} := \text{diag}(+1, +1, \dots, +1)$.

Die 'Plus'-Minkowski-Metrik ist $g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

Das Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{i_1, \dots, i_m}$ ist das Vorzeichen der Permutation π , welche die Zahlen $(1, 2, \dots, m)$ in die Zahlen (i_1, i_2, \dots, i_m) abbildet:

$$\pi := \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, m \\ i_1, i_2, \dots, i_m \end{array} \right), \quad \epsilon_{i_1, \dots, i_m} := \epsilon^{i_1, \dots, i_m} := \text{sgn } \pi .$$

Für die Verjüngung von Levi-Civita-Symbolen verwenden wir die Formel:

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_m j_1, \dots, j_n} \epsilon^{i_1, \dots, i_m k_1, \dots, k_n} = m! n! \delta_{j_1, \dots, j_n}^{k_1, \dots, k_n} = m! n! \delta_{j_1}^{k_1} \delta_{j_2}^{k_2} \dots \delta_{j_n}^{k_n} .$$

Der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m}$ unterscheidet sich vom Levi-Civita-Symbol nur in seiner kontravarianten Form:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m} &:= \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} , \\ \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_m} &:= g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_m \nu_m} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_m} = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_m \nu_m} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} . \end{aligned}$$

Die Symmetrisierung und Antisymmetrisierung von Indizes wird definiert als:

$$A_{\{\mu\nu\}} := \frac{1}{2!} (A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) , \quad A_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2!} (A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) .$$

Die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra sind definiert als: $[e_a, e_b] = c_{ab}{}^c e_c$.

Die kovariante Ableitung der Basisvektoren definiert die sog. Zusammenhangskoeffizienten:

$$\nabla_a e_b := \nabla_{e_a} e_b := \omega^c{}_{ab} e_c .$$

Die kovariante Ableitung bzgl. der Vektoren $X = X^a e_a$ und $Y = Y^b e_b$ ist:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a} Y^b e_b = X^a (e_a [Y^b]) e_b + Y^b \nabla_{e_a} e_b \\ &= X^a (e_a [Y^b]) e_b + Y^b \omega^c{}_{ab} e_c = X^a (e_a [Y^c] + \omega^c{}_{ab} Y^b) e_c . \end{aligned}$$

Der Torsionstensor ist:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] , \quad \text{bzw.}$$

$$T^a{}_{bc} := \langle \theta^a | T(e_b, e_c) \rangle = \omega^a{}_{bc} - \omega^a{}_{cb} - c_{bc}{}^a .$$

Der Riemannsche Krümmungstensor ist:

$$R(X, Y)Z := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z - \nabla_{[X, Y]} Z , \quad \text{bzw.}$$

$$R^a{}_{bcd} := \langle \theta^a | R(e_c, e_d)e_b \rangle = e_c \omega^a{}_{db} - e_d \omega^a{}_{cb} + \omega^e{}_{db} \omega^a{}_{ce} - \omega^e{}_{cb} \omega^a{}_{de} - c_{cd}{}^e \omega^a{}_{eb} .$$

Der Ricci-Tensor ist: $Ric_{\lambda\nu} := R^\kappa{}_{\lambda\kappa\nu}$.

Der Ricci-Skalar ist $\mathcal{R} := Ric^\nu{}_\nu = g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu}$.

Als Basen der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ verwenden wir die beiden Sätze von 2×2 Matrizen:

$$\sigma_\mu := (-\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_\mu = (-\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^\mu := (\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i) .$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Daraus folgt

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k , \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} ,$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1} .$$

Die Diracschen Gamma-Matrizen verwenden wir in der folgenden Weyl-Darstellung:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}.$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für den Diracschen Bispinor $\psi^T := (\psi_L, \psi_R)^T$ die folgende Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} + mc\mathbb{1})\psi = (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi = \vec{0}, \text{ bzw.}$$

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi(p, x) = (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc\mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0}.$$

Für den Spintensor folgt wiederum in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$:

$$\Sigma^{\mu\nu} := -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho}.$$

Für die Dirac-Gleichung mit euklidischer Metrik $\text{diag}(+1, +1, \dots, +1)$, d.h. bzgl. der Gruppe $O(4)$, verwenden wir die folgenden euklidischen Gamma-Matrizen:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab} \mathbb{1}.$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (i)^2 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Die Dirac-Gleichung für den Diracschen Bispinor $\psi^T := (\psi_L, \psi_R)^T$ bleibt unverändert, allerdings mit den euklidischen Gamma-Matrizen.

Die Verallgemeinerung auf eine $m = 2n$ dimensionale euklidische Mannigfaltigkeit geschieht über die entsprechende Clifford-Algebra. Seien $\gamma^\mu = \gamma_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$ die Erzeugenden einer Clifford-Algebra und $\hat{c}_\nu, \hat{c}_\nu^\dagger$ mit $\nu = 1, \dots, n = \frac{m}{2}$ die entsprechenden Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren eines n -Fermionen-Systems mit

$$\hat{c}_\nu := \frac{1}{2}(\gamma_{2\nu-1} - i\gamma_{2\nu}), \quad \hat{c}_\nu^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma_{2\nu-1} + i\gamma_{2\nu}), \quad \nu = 1, \dots, n = \frac{m}{2},$$

dann gilt mit dem Fermion-Teilchenzahl-Operator \hat{F} :

$$\hat{F} := \sum_{\nu=1}^n \hat{c}_{\nu}^{\dagger} \hat{c}_{\nu} ,$$

$$\Gamma := \gamma_* := \gamma_{2n+1} := (i)^n \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n} = e^{i\pi \hat{F}} = (-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^n \hat{c}_{\nu}^{\dagger} \hat{c}_{\nu}} .$$

In einer $m = 2n$ dimensionalen Minkowski-Mannigfaltigkeit mit 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ wird daraus:

$$\Gamma := \gamma_* := \gamma_{2n+1} := (i)^{n+1} \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n} = e^{i\pi \hat{F}} = (-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^n \hat{c}_{\nu}^{\dagger} \hat{c}_{\nu}} .$$

3 Einfache Geometrie in der Festkörperphysik

3.1 Darstellungen endlicher Gruppen

Wir wollen hier einige bekannte Tatsachen über Darstellungen endlicher Gruppen zusammentragen, die wir für den Beweis des Bloch-Theorems in der Festkörperphysik benutzen werden. Hierbei folgen wir hauptsächlich Roy (2010) und Petraschen u. Trifonow (1969). Aber zuvor einige Definitionen:

Definition 3.1.1 *Eine Darstellung (ρ, V) einer Gruppe G auf einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum V ist ein Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Die Darstellung heißt treu, wenn sie eine Bijektion ist.*

Eine Abbildung ϕ zwischen zwei Darstellungen (ρ_1, V_1) und (ρ_2, V_2) der gleichen Gruppe G erfüllt per Definition die Eigenschaft

$$\phi(\rho_1(g)\vec{v}_1) = \rho_2(g)(\phi(\vec{v}_1)) \quad \text{für } \forall g \in G, \vec{v}_1 \in V_1. \quad (3.1.1)$$

Eine solche Abbildung heißt auch eine äquivariante Abbildung oder eine G -lineare Abbildung.

Wenn ϕ ein Isomorphismus ist können wir die obige Gleichung umschreiben zu:

$$\rho_2 = \phi \circ \rho_1 \circ \phi^{-1}. \quad (3.1.2)$$

Eine Teildarstellung von (ρ, V) ist ein G -invarianter Unterraum $W \subseteq V$, d.h. $\rho(g)\vec{w} \in W$ für alle $\vec{w} \in W$ und $g \in G$.

Eine Darstellung heißt irreduzibel, wenn sie keine echten invarianten Unterräume enthält. Eine Darstellung heißt vollständig reduzibel, wenn sie sich als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben läßt. Dies entspricht einer Blockdiagonalisierung von $\rho(g)$ für alle $g \in G$.

Warum ist die Darstellungstheorie für Physiker überhaupt interessant? Schauen wir uns hierzu einmal die stationäre Schrödinger-Gleichung an.

$$H\psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.1.3)$$

Jetzt führen wir eine orthogonale Transformation der Koordinaten mit $u_s \in G$ einer endlichen Gruppe G durch:

$$\vec{r}^j := T_{u_s}\vec{r} := u_s\vec{r}. \quad (3.1.4)$$

Der Laplace-Operator $\Delta_{\vec{r}}$ bleibt bei einer orthogonalen Transformation unverändert und vom Potential verlangen wir, daß es unter T_{u_s} auch invariant bleiben möge, also $T_{u_s}V(\vec{r}) \stackrel{!}{=} V(\vec{r})$. Also ist auch $T_{u_s}\psi(\vec{r})$ eine Eigenfunktion der Schrödingergleichung zum Eigenwert E .

$$HT_{u_s}\psi(\vec{r}) = ET_{u_s}\psi(\vec{r}) = ET_{u_s}H\psi(\vec{r}) \Leftrightarrow HT_{u_s} = T_{u_s}H. \quad (3.1.5)$$

Jetzt möge der Eigenraum des Schrödinger-Operators zum Eigenwert E von k Eigenfunktionen $\psi_j(\vec{r})$ aufgespannt werden, dann ist $T_{u_s}\psi_i(\vec{r})$ eine Linearkombination dieser $\psi_j(\vec{r})$:

$$T_{u_s}\psi_i(\vec{r}) = \sum_{j=1}^k D_{ij}(u_s)\psi_j(\vec{r}). \quad (3.1.6)$$

Weil die Transformation u_s orthogonal ist bleibt die Orthonormierungseigenschaft der $\psi_j(\vec{r})$ erhalten:

$$\langle T_{u_s}\psi_i(\vec{r}) | T_{u_s}\psi_j(\vec{r}) \rangle = \langle \psi_i(u_s\vec{r}) | \psi_j(u_s\vec{r}) \rangle = \langle \psi_i(\vec{r}) | \psi_j(\vec{r}) \rangle = \delta_{ij}.$$

Also sind die k -dimensionalen Matrizen $D(u_s)$ unitär.

Jetzt soll gezeigt werden, daß diese $D_{ij}(u_s)$ tatsächlich eine Darstellung der endlichen Gruppe G liefern.

$$\begin{aligned} T_{u_s}T_{u_t}\psi_i(\vec{r}) &= T_{u_s}\psi_i(u_t\vec{r}) = \psi_i(u_tu_s\vec{r}) = \sum_{j=1}^k D_{ij}(u_tu_s)\psi_j(\vec{r}). \\ T_{u_s}T_{u_t}\psi_i(\vec{r}) &= T_{u_s}\sum_{j=1}^k D_{ij}(u_t)\psi_j(\vec{r}) = \sum_{j=1}^k D_{ij}(u_t)\sum_{l=1}^k D_{jl}(u_s)\psi_l(\vec{r}) \\ &= \sum_{l=1}^k (D(u_t)D(u_s))_{il}\psi_l(\vec{r}) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$D_{ij}(u_tu_s) = D(u_t)D(u_s). \quad (3.1.7)$$

Also kann man jedem Eigenwert und zugehörigen k -dimensionalen Eigenraum der Schrödingergleichung mit der Symmetrie einer endlichen Gruppe G eine k -dimensionale Darstellung D dieser Symmetriegruppe zuordnen.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß für endliche Gruppen G zu jeder Darstellung eine isomorphe unitäre Darstellung existiert.

Satz 3.1.2 Für endliche Gruppen G existiert zu jeder Darstellung (ρ, V) eine isomorphe unitäre Darstellung.

Beweis: Seien $\vec{v}^{(i)} = \rho(g_i)\vec{v}$ und $\vec{w}^{(i)} = \rho(g_i)\vec{w}$ mit $\vec{v}, \vec{w} \in V$ mit einem k -dimensionalen Vektorraum V . Wir nehmen an, daß die Darstellung $\rho(g)$ mit $g \in G$ nicht unitär ist und wollen eine Basistransformation so vornehmen, daß $\rho(g)$ in dieser neuen Basis unitär wird. Zentral bei diesem Beweis ist, daß wir über die Gruppe summieren können. Sei N die Ordnung von G .

$$\sum_{i=1}^N \langle \vec{v}^{(i)} | \vec{w}^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \rho(g_i)\vec{v} | \rho(g_i)\vec{w} \rangle = \langle (\sum_{i=1}^N \rho^\dagger(g_i)\rho(g_i))\vec{v} | \vec{w} \rangle .$$

Die lineare Abbildung

$$\left(\sum_{i=1}^N \rho^\dagger(g_i)\rho(g_i) \right)$$

ist selbstadjungiert und kann mit Hilfe einer unitären Transformation U diagonalisiert werden:

$$\begin{aligned} d &:= U^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \rho^\dagger(g_i)\rho(g_i) \right) U \\ &= \left(\sum_{i=1}^N U^{-1} \rho^\dagger(g_i) U U^{-1} \rho(g_i) U \right) =: \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\rho}^\dagger(g_i) \tilde{\rho}(g_i) \right) , \\ d_{mm} &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^k \tilde{\rho}_{mn}^\dagger(g_i) \tilde{\rho}_{nm}(g_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^k |\tilde{\rho}_{nm}(g_i)|^2 \right) > 0 . \end{aligned}$$

Also kann man die Wurzel der selbstadjungierten Matrix d bilden, d.h. $d = d^{1/2} d^{1/2}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \langle \vec{v}^{(i)} | \vec{w}^{(i)} \rangle &= \langle \left(\sum_{i=1}^N \rho^\dagger(g_i)\rho(g_i) \right) \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle (U d^{1/2} d^{1/2} U^{-1}) \vec{v} | \vec{w} \rangle \\ &= \langle (d^{1/2} U^{-1}) \vec{v} | d^{1/2} U^{-1} \vec{w} \rangle =: \langle L\vec{v} | L\vec{w} \rangle . \end{aligned}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß $L\rho(g_i)L^{-1}$ eine unitäre Transformation ist.

$$\begin{aligned} \langle L\rho(g_j)\vec{v} | L\rho(g_j)\vec{w} \rangle &= \sum_{i=1}^N \langle \rho(g_j)\vec{v}^{(i)} | \rho(g_j)\vec{w}^{(i)} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \rho(g_j)\rho(g_i)\vec{v} | \rho(g_j)\rho(g_i)\vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \rho(g_j g_i)\vec{v} | \rho(g_j g_i)\vec{w} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \langle \rho(g_i)\vec{v} | \rho(g_i)\vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \vec{v}^{(i)} | \vec{w}^{(i)} \rangle = \langle L\vec{v} | L\vec{w} \rangle \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\langle L\rho(g_j)L^{-1}L\vec{v} \mid L\rho(g_j)L^{-1}L\vec{w} \rangle = \langle L\vec{v} \mid L\vec{w} \rangle \quad \text{bzw. mit } \vec{v}' := L\vec{v}, \vec{w}' := L\vec{w}$$

$$\langle L\rho(g_j)L^{-1}\vec{v}' \mid L\rho(g_j)L^{-1}\vec{w}' \rangle = \langle \vec{v}' \mid \vec{w}' \rangle . \quad \square$$

Mit Hilfe der unitären Darstellungen kann man jetzt jede beliebige endlichdimensionale Darstellung (ρ, V) einer endlichen Gruppe vollständig auf ihre irreduziblen Teildarstellungen zurückführen. Man nennt dies die vollständige Reduzierbarkeit der Darstellung.

Satz 3.1.4 (Reduktionssatz) *Wenn (ρ, W) eine Teildarstellung von (ρ, V) ist, dann gibt es einen komplementären G -invarianten Unterraum W' , so daß $(\rho, V) = (\rho, W \oplus W')$.*

Beweis: Sei (ρ, W) eine Teildarstellung von (ρ, V) . Dann ist $W \subseteq V$ und es existiert ein Komplement W' zu W in V , d.h. $V = W \oplus W'$. Jetzt ist zu zeigen, daß (ρ, W') invariant unter G ist. Seien $w \in W$ und $w' \in W'$, dann folgt:

$$\langle w \mid w' \rangle = 0 \quad \text{und da } \rho \text{ unitär ist} \quad \Rightarrow \quad \langle \rho(w) \mid \rho(w') \rangle = 0 . \quad \square$$

Wegen der G -Invarianz von W ist auch $\rho(w) \in W$ und damit ist $\rho(w') \in W'$. Damit ist W' auch G -invariant.

Wenn W' irreduzibel ist, d.h. keine G -invarianten Unterräume enthält, sind wir fertig, ansonsten wiederholen wir das Verfahren bis wir V in eine direkte Summe irreduzibler Unterräume zerlegt haben.

Satz 3.1.6 (Lemma von Schur für endliche Gruppen)

a. Sei G eine endliche Gruppe. Seien $\rho_1 : G \rightarrow V_1$ und $\rho_2 : G \rightarrow V_2$ zwei Darstellungen von G in die komplexen Vektorräume V_1 und V_2 . Sei $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ ein Homomorphismus, der von der Nullabbildung verschieden ist, dann ist ϕ tatsächlich ein Isomorphismus.

b. Sei $\rho : G \rightarrow V$ eine Darstellung von G in den komplexen Vektorraum V und sei $\phi : V \rightarrow V$ ein Homomorphismus, der von der Nullabbildung verschieden ist, dann ist $\phi = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\otimes(V)}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dies kann man wegen der Äquivarianz von ϕ auch anders ausdrücken: eine Matrix ϕ , die nicht die Nullmatrix ist, und die mit allen Matrizen $\rho(g)$ einer irreduziblen komplexen Darstellung (ρ, V) kommutiert ist ein komplexes Vielfaches der Einheitsmatrix.

Beweis:

a. Da ϕ nicht die Nullabbildung ist gibt es zu jedem $\vec{v}_1 \in V_1$ ein $\vec{v}_2 = \phi(\vec{v}_1) \in V_2$. Aufgrund der Äquivarianzbedingung von ϕ gilt:

$$\rho_2(g)(\vec{v}_2) = \rho_2(g)(\phi(\vec{v}_1)) = \phi(\rho_1(g)(\vec{v}_1)) \in \phi(V_1) .$$

Damit ist $\phi(V_1)$ ein G -invarianter Unterraum von V_2 . Da aber V_2 irreduzibel ist folgt $\phi(V_1) = V_2$. Also ist die Abbildung ϕ surjektiv.

Jetzt soll gezeigt werden, daß $\ker(\phi) = 0$ ist, d.h. daß ϕ auch injektiv ist. Sei also $\vec{v}_1 \in \ker(\phi)$, dann folgt:

$$\phi(\rho_1(g)(\vec{v}_1)) = \rho_2(g)(\phi(\vec{v}_1)) = \rho_2(g)(0) = 0 \quad \text{für } \forall g \in G. \quad \square$$

Damit ist $\ker(\phi)$ ein G -invarianter Unterraum von V_1 . Wegen der Irreduzibilität von ρ_1 kann also $\ker(\phi)$ nur \emptyset oder V_1 sein, und die Möglichkeit $\ker(\phi) = V_1$ scheidet aus, weil ϕ nicht die Nullabbildung ist. Also folgt $\ker(\phi) = \emptyset$. Damit ist $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ ein Isomorphismus.

b. Jetzt werden in der Aussage von a. die Vektorräume V_1 und V_2 gleichgesetzt, d.h. $\phi : V \rightarrow V$ ist ein Isomorphismus. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von ϕ . Dann ist die Abbildung $\phi - \lambda \mathbb{1}_{\otimes(V)}$ ein Homomorphismus von V nach V . Die Determinante von $\phi - \lambda \mathbb{1}_{\otimes(V)}$ ist Null und damit kann diese Abbildung kein Isomorphismus sein. Also muß wegen a. die Abbildung $\phi - \lambda \mathbb{1}_{\otimes(V)}$ die Nullabbildung sein, d.h. $\phi = \lambda \mathbb{1}_{\otimes(V)}$.

Mit dem Lemma von Schur kann man nun beweisen, daß alle irreduziblen komplexen Darstellungen von abelschen Gruppen 1-dimensional sind.

Satz 3.1.8 *Jede irreduzible komplexe Darstellung einer abelschen Gruppe ist 1-dimensional.*

Für zyklische Gruppen $G = C_N$ mit N Elementen gilt, daß alle Elemente von C_N von einem Element $a \in G$ erzeugt werden. Dabei gilt $a^N = a^0 = e$ für $a \in G$ und dem neutralen Element $e \in G$. C_N mit der Verknüpfung \cdot ist isomorph zu $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ mit der Verknüpfung $+$.

Jede zyklischen Gruppe ist abelsch, also ist auch jede irreduzible komplexe Darstellung einer zyklischen Gruppe $G = C_N$ mit N Elementen 1-dimensional. Die C von C_N sind gerade die N -ten Wurzeln von 1:

$$\rho(n) := e^{i2\pi n/N} \quad \text{mit } n = 0, \dots, N-1, \quad (3.1.8)$$

$$\rho(n)^{-1} = \rho(n)^* . \quad (3.1.9)$$

Beweis: Sei (ρ, V) eine irreduzible komplexe Darstellung einer abelschen Gruppe G . Jetzt gilt:

$$\rho(g)\rho(h)\vec{v} = \rho(gh)\vec{v} = \rho(hg)\vec{v} = \rho(h)\rho(g)\vec{v} \quad \text{für } \forall \vec{v} \in V, \forall g \in G .$$

Also ist $\rho(h)$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix, die mit allen Matrizen $\rho(g)$ der irreduziblen Darstellung ρ kommutiert und damit folgt

$$\rho(h)\vec{v} = \lambda \vec{v} .$$

Damit ist jedes $\vec{v} \in V$ ein G -invarianter Unterraum. Die Irreduzibilität verlangt aber, daß G -invariante Unterräume nur \emptyset oder V sein können. Weil $\rho(h)$ von der Nullmatrix verschieden ist muß der G -invariante Unterraum in diesem Fall also V sein. Und die

Dimension von V kann nicht größer als 1 sein, denn sonst könnte man ja einen G -invarianten Unterraum größerer Dimension konstruieren.

Jetzt sei $G = C_N$ eine zyklische Gruppe mit N Elementen, d.h. $a^N = a^0 = e$ für $a \in G$ und dem neutralen Element $e \in G$, also $C_N = \{a^0, a^1, \dots, a^{N-1}\}$. Weiter seien $g = a^m, h = a^n \in G$, dann folgt:

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(g \cdot h) = \rho(a^m \cdot a^n) = \rho(a^n \cdot a^m) = \rho(h \cdot g) = \rho(h)\rho(g) .$$

Damit ist $G = C_N$ eine abelsche Gruppe und es gilt die obige Aussage.

Aus $a^N = a^0 = e$ folgt $\rho(a^N) = \rho(a)^N = \rho(e) = 1$ und damit

$$\rho(a) = \rho(e)^{1/N} = e^{i2\pi/N} , \quad \text{bzw. } \rho(a^m) = \rho(a)^m = e^{i2\pi m/N} . \quad \square$$

3.2 Bloch-Theorem

Wir betrachten einen d -dimensionalen Festkörper mit $d \in \{1, 2, 3\}$ und ignorieren Oberflächeneffekte, indem wir *periodische Randbedingungen* (Born-von-Kármán-Modell) einführen, so daß unsere Topologie immer ein d -dim. Torus ist. Wir behandeln hier den Fall $d = 3$, die anderen Fälle sind entsprechend. Die Basisvektoren des periodischen Gitters seien $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, die makroskopische Länge sei \vec{L} mit $\vec{L}_i := N_i \vec{a}_i$ und die Translations-Gruppe werde gebildet von $G := \{T_{\vec{a}}\}$ mit der Addition als Verknüpfung

$$T_{\vec{a}} := T_{n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3} := T_{n_1 \vec{a}_1} \circ T_{n_2 \vec{a}_2} \circ T_{n_3 \vec{a}_3} , \quad (3.2.1)$$

$$\text{mit } \vec{a} := n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3 \text{ und } n_i \in \{0, \dots, N_i - 1\} .$$

Das von diesen $T_{\vec{a}}$ aufgespannte Kristallgitter heißt in der Festkörperphysik *Bravais-Gitter*.

Zunächst einmal stellt ein Kristallgitter ja ein komplexes Vielteilchensystem dar, aber für zahlreiche Anwendungen stellt die *Quasiteilchennäherung* eine praktikable Näherung dar. Die Idee dieser Quasiteilchennäherung geht auf L.D. Landau zurück. Hierbei werden die Vielteilchen-Wechselwirkungseffekte in einer effektiven Masse m^* der Quasiteilchen und einem modifizierten Einteilchen-Potential berücksichtigt. Damit handelt es sich bei diesen Quasiteilchen also eigentlich um kollektive Anregungen. Gelegentlich werden über diese Näherung hinausgehende Vielteilcheneffekte störungstheoretisch behandelt. Die folgenden Quasiteilchen tauchen in der Festkörpertheorie häufig auf:

- Bosonen: Phononen (Gitterschwingungen), Exzitonen (Quasiteilchen aus 1 Quasielektron und 1 Defektelektron), Magnonen (2 gekoppelte Elektronenspins), Plasmonen (Ladungsträger-Dichteschwankungen), Polaritonen (gekoppelte Photon-Boson-Quasiteilchen),
- Fermionen: Quasielektronen, Defektelektronen (Löcher), Polaronen (Polarisation des Gitters),

- sonstige: Cooper-Paare (BCS-Theorie der Supraleitung), Anyonen (2-dim. Oberflächenanregungen), Skyrmionen (topologisch stabile Wirbel), und viele weitere :-)

In der Quantentheorie wird eine sich ausbreitende ebene Welle in komplexer Formulierung beschrieben als

$$A(\vec{r}, t) = A_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \text{mit } |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.2.2)$$

wobei für den Impuls des Quasiteilchens \vec{p} gilt $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Das Bloch-Theorem der Festkörperphysik besagt nun, daß die Lösungen der stationären Einteilchen-Schrödinger-Gleichung in einem gitterperiodischen Potential die Form einer ebenen Welle haben, die von einer gitterperiodischen Funktion moduliert wird. Diese Energie-Eigenfunktionen heißen Bloch-Funktionen.

Satz 3.2.1 Sei $\psi(\vec{r})$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.2.3)$$

mit einem gitterperiodischem Potential

$$V(\vec{r} + \vec{a}) := V(\vec{r} + n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3) \stackrel{!}{=} V(\vec{r}), \quad (3.2.4)$$

dann folgt

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u(\vec{r}) \quad \text{mit } u(\vec{r} + \vec{a}) = u(\vec{r}) \quad (3.2.5)$$

und mit einem Wellenvektor \vec{k} aus dem reziproken Gitter, auch Brillouin-Gitter genannt, dem Fourierraum des Kristallgitters.

Die periodische Randbedingungen $T_{\vec{0}} = T_{\vec{L}}$ führen dazu, daß jeder erlaubte \vec{k} -Wert das folgende Volumen im reziproken Gitter einnimmt:

$$\frac{(2\pi)^d}{V^{(d)}}, \quad \text{mit } V^{(1)} = L_1, \quad V^{(2)} = L_1 L_2, \quad V^{(3)} = L_1 L_2 L_3. \quad (3.2.6)$$

und damit können dann Summen über das reziproke Gitter in Integrale umgewandelt und ausgeführt werden:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V^{(d)}}{(2\pi)^d} \int d^d k. \quad (3.2.7)$$

Beweis: Die Translationen $T_{\vec{a}_1}, T_{\vec{a}_2}, T_{\vec{a}_3}$ kommutieren miteinander und ebenso auch die Translationen $e = T_0, T_{\vec{a}_i}, T_{2\vec{a}_i}, \dots, T_{(N_i-1)\vec{a}_i}$ für jedes feste $i \in \{1, 2, 3\}$. Also ist die Gruppe abelsch und wegen der Randbedingungen $T_{\vec{0}} = T_{\vec{L}}$ auch zyklisch vom Typ $G = C_{N_1} C_{N_2} C_{N_3}$. Die irreduziblen komplexen Darstellungen von C_{N_1} sind die N_1 -ten Wurzeln von 1:

$$\rho(T_{\vec{a}_1}) = e^{i2\pi m_1/N_1} \quad \text{bzw.} \quad \rho(T_{n_1 \vec{a}_1}) = e^{i2\pi n_1 m_1/N_1}$$

und damit

$$\rho(T_{\vec{a}}) = e^{i2\pi(n_1 m_1/N_1 + n_2 m_2/N_2 + n_3 m_3/N_3)} .$$

Dieser Ausdruck kommt im Zusammenhang mit der Beschreibung von Wellenvorgängen in der Festkörperphysik häufig vor. Wellenvorgänge beschreibt man in der Physik ja zumeist mit Hilfe der Fouriertransformation und so führen wir jetzt den Wellenvektor \vec{k} ein. Das reziproke Gitter, auch *Brillouin-Gitter* genannt, ist der Fourierraum des Kristallgitters und wird aufgespannt durch die drei Basisvektoren $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, die in der Festkörperphysik folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &:= 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle} = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} , \\ \vec{b}_2 &:= 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle} = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} , \\ \vec{b}_3 &:= 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle} = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)} . \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Damit ergibt sich

$$\langle \vec{a}_i | \vec{b}_j \rangle = 2\pi \delta_{ij} . \quad (3.2.9)$$

$$\vec{k} := \frac{m_1}{N_1} \vec{b}_1 + \frac{m_2}{N_2} \vec{b}_2 + \frac{m_3}{N_3} \vec{b}_3 , \quad (3.2.10)$$

$$\rho(T_{\vec{a}}) = e^{i2\pi(n_1 m_1/N_1 + n_2 m_2/N_2 + n_3 m_3/N_3)} = e^{i\langle \vec{k} | \vec{a} \rangle} . \quad (3.2.11)$$

Für die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ folgt:

$$\rho(T_{\vec{a}})\psi(\vec{r}) = e^{i\langle \vec{k} | \vec{a} \rangle} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}) . \quad (3.2.12)$$

Jetzt sei

$$u(\vec{r}) := e^{-i\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle} \psi(\vec{r}) \quad \Rightarrow$$

$$u(\vec{r} + \vec{a}) = e^{-i\langle \vec{k} | \vec{r} + \vec{a} \rangle} \psi(\vec{r} + \vec{a}) = e^{-i\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle} e^{-i\langle \vec{k} | \vec{a} \rangle} e^{i\langle \vec{k} | \vec{a} \rangle} \psi(\vec{r}) = u(\vec{r}) ,$$

also ist

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle} u(\vec{r}) \quad \text{mit } u(\vec{r} + \vec{a}) = u(\vec{r}) .$$

Zum Schluß soll noch das Volumen eines erlaubten \vec{k} -Wertes im reziproken Raum berechnet werden. Wegen der periodischen Randbedingungen $T_{\vec{0}} = T_{\vec{L}}$ muß gelten $\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{L})$

$$\rho(T_{\vec{L}})\psi(\vec{r}) = e^{i\langle \vec{k} | \vec{L} \rangle} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) ,$$

daraus folgt, daß in L_1 eine ganze Anzahl von Wellenlängen λ_1 enthalten sein muß, d.h. $k_1 = \frac{2\pi}{L_1} m_1$, und das Gleiche für $k_2 = \frac{2\pi}{L_2} m_2$ und $k_3 = \frac{2\pi}{L_3} m_3$. Damit ist das Volumen eines \vec{k} -Zustands im reziproken Raum

$$\frac{(2\pi)^d}{V^{(d)}} \quad \text{mit } V^{(1)} = L_1, \quad V^{(2)} = L_1 L_2, \quad V^{(3)} = L_1 L_2 L_3 . \quad \square$$

Korollar 3.2.3 *Zwei Darstellungen der Translationsgruppe mit den Wellenvektoren \vec{k} und \vec{k}' heißen äquivalent, wenn sie sich nur um einen Vektor des reziproken Gitters unterscheiden, d.h.*

$$\vec{k} \simeq \vec{k}' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} = \vec{k}' + \vec{b} = \vec{k}' + (p_1 \vec{b}_1 + p_2 \vec{b}_2 + p_3 \vec{b}_3) \quad \text{mit } p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z} ,$$

denn

$$e^{i\langle \vec{k} | \vec{a} \rangle} = e^{i\langle \vec{k}' + \vec{b} | \vec{a} \rangle} = e^{i\langle \vec{k}' | \vec{a} \rangle} e^{i\langle \vec{b} | \vec{a} \rangle} = e^{i\langle \vec{k}' | \vec{a} \rangle} .$$

Jenen Bereich des reziproken Gitters um den Punkt $\vec{0}$ herum, der keine äquivalenten \vec{k} -Vektoren enthält nennt man reduzierte Brillouin-Zone, oder kurz BZ. Integrationen über die irreduziblen Darstellungen der Translationsgruppe, also Integrationen über d^3k , können also auf die reduzierte Brillouin-Zone beschränkt werden.

3.3 Bravais-Gitter

An dieser Stelle bietet es sich an einen ganz kleinen Ausflug in die Welt der möglichen Kristallstrukturen zu machen. Wir fragen danach, welche Punktsymmetrien sind eigentlich mit der 3-dimensionalen Gitter-Translationssymmetrie verträglich?

In einem 3-dimensionalen Koordinatensystem mit den Achsen x, y, z beschreiben wir eine Drehung um die z -Achse durch die folgende Matrix:

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

und eine Drehspiegelung an der z -Achse durch:

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Eine solche Drehung um einen kontinuierlichen Drehwinkel ist ein Element einer Liegruppe, und keiner endlichen Gruppe. Aber sind tatsächlich beliebige Drehwinkel mit dem periodischen Kristallgitter kompatibel?

Wir verwenden wiederum die Basisvektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. Bezüglich dieser Basis haben alle Gitterpunkte ganzzahlige Koordinaten. Es sind somit nur solche Drehungen mit dem Bravaisgitter vereinbar, welche die Gitterpunkte in sich selbst überführen. Ein gebräuchliches Hilfsmittel in der Darstellungstheorie von Gruppen sind die sog. Charaktere $\chi(g)$.

Definition 3.3.1 Seien G eine Gruppe mit den Elementen $g \in G$ und $D(g)$ eine k -dimensionale Darstellungs-Matrix von $g \in G$. Dann heißen die Spuren von $D(g)$ die Charaktere der Darstellung:

$$\chi(g) := \text{tr}(D) = \sum_i D_{ii}(g) .$$

Die Charaktere der obigen Drehmatrizen sind also

$$\chi(\varphi) = 2 \cos \varphi \pm 1 .$$

Es folgt: $(2 \cos \varphi \pm 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \cos \varphi \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos \varphi \in \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1\}$.

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cos \varphi$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Also sind außer der Inversion die folgenden Punktgruppen mit dem Kristallgitter verträglich:

$$C_2 : \varphi \in \{0, \pi\} ,$$

$$C_3 : \varphi \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\} ,$$

$$C_4 : \varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} ,$$

$$C_6 : \varphi \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} .$$

Der deutsche Mathematiker Schoenflies (1853-1928) hat eine bis heute verwendete Nomenklatur der 14 Gittersysteme (Bravais-Gitter) geschaffen. Hierbei hat er die folgenden Symbole verwendet:

- C_n für die Gruppe der n -zähligen Drehungen um die Winkel $\frac{2\pi}{n}k$, mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$,
- i für der Inversion,

- σ_h für die eine Spiegelung senkrecht zu einer Drehachse (d.h. horizontal zur Drehachse),
- σ_v für Spiegelungen an den n Ebenen, welche die Drehachse von C_n enthalten und untereinander einen Winkel $\frac{2\pi}{n}k$, mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, aufweisen (d.h. vertikal zur Drehachse),
- $C_{nh} = C_n \times \sigma_h$,
- $C_{nv} = C_n \times \sigma_v$,
- $D_{nh} = C_n \times \sigma_h \times \sigma_v$,
- $O_h = O \times i$ mit der Oktaedergruppe O , welche enthält:
 $E =$ der Einheit,
 3 Elemente $C_2 = 3$ Drehungen um π durch die Flächenmittelpunkte gegenüberliegender Flächen,
 3 Elemente $C_4 =$ zusätzlich zu C_2 noch $3 \cdot 2$ Drehungen um $\pm \frac{\pi}{2}$ durch die Flächenmittelpunkte gegenüberliegender Flächen,
 6 Elemente $C_2 = 6$ Drehungen um π um Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten,
 8 Elemente $C_3 = 8$ Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ um Achsen durch gegenüberliegende Ecken.
 Damit sind die Anzahl der Element von $O = 24$ und von $O_h = 48$.

Lemma 3.3.2 Wenn eine Gruppe G die Drehgruppe C_n mit $n > 2$ enthält, dann enthält G auch $C_{nv} = C_n \times \sigma_v$, denn es gilt:

$$C_n^1 = \sigma_v C_n^{-1} \sigma_v .$$

Beweis: Der Punkt 0 sei ein Symmetriepunkt von C_n und E sei eine Spiegelebene von C_{nv} durch die Linie $0 - \pi$. Weiter sei σ_v die Spiegelung an E und $k \in 0 \dots (n-1)$. Jetzt wollen wir den Punkt $\frac{k\pi}{n}$ an E spiegeln.

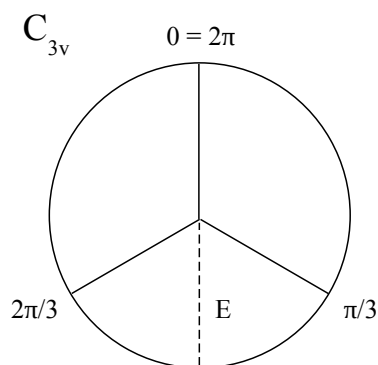


Abbildung 3.1: C_{3v} als Beispiel für C_{nv} mit $n > 2$.

$$\sigma_v\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \left(2\pi - \frac{k\pi}{n}\right),$$

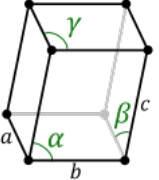
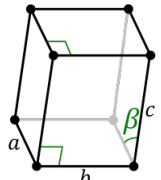
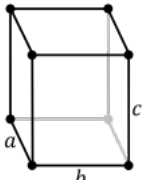
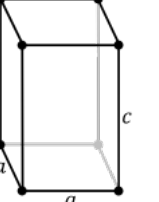
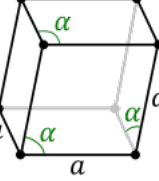
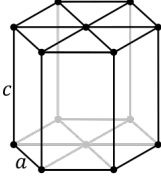
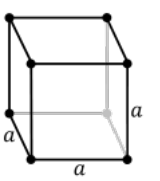
$$C_n^1\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(k+1)\pi}{n},$$

$$\begin{aligned} \sigma_v C_n^{-1} \sigma_v \left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \sigma_v C_n^{-1} \left(2\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = \sigma_v C_n^{-1} \left(\frac{2n-k}{n}\pi\right) \\ &= \sigma_v \left(\frac{2n-k-1}{n}\pi\right) = \sigma_v \left(2\pi - \frac{k+1}{n}\pi\right) \\ &= \frac{k+1}{n}\pi = C_n^1\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Man sieht auch sofort, warum $n > 2$ sein muß, denn im Falle von $n = 2$ liegen beide Symmetriepunkte von C_2 auf der Spielebene E und es damit ist sowohl $\sigma_v\left(\frac{k}{2}\pi\right) = \frac{k}{2}\pi$, als auch $C_2^1 = C_2^{-1}$. \square

In der Schönflies-Nomenklatur gibt es diese 7 Gittersysteme:

Die folgenden Bilder stammen aus Wikipedia-Crystal_System (2020):

			
triklin $C_1 \times \sigma_h$ DrBob CC BY-SA 3.0	monoklin $C_{2h} =$ $C_2 \times \sigma_h$ Daniel Mayer CC BY-SA 3.0	rhombisch $D_{2h} =$ $C_2 \times \sigma_h \times \sigma_v$ Daniel Mayer CC BY-SA 3.0	tetragonal $D_{4h} =$ $C_4 \times \sigma_h \times \sigma_v$ Daniel Mayer CC BY-SA 3.0
			
rhomboedrisch $D_{3h} =$ $C_3 \times \sigma_h \times \sigma_v$ Daniel Mayer CC BY-SA 3.0	hexagonal $D_{6h} =$ $C_6 \times \sigma_h \times \sigma_v$ Bor75 CC BY-SA 3.0	kubisch $O_h =$ $O \times i$ Daniel Mayer CC BY-SA 3.0	

Nimmt man hier noch die folgenden zentrierte Varianten hinzu

- monoklin: eine Basis-zentrierte Variante,

- rhombisch: eine Basis-zentrierte, eine Raum-zentrierte (bcc), eine Flächen-zentrierte (fcc) Variante,
- tetragonal: eine Raum-zentrierte (bcc) Variante,
- kubisch: eine Raum-zentrierte (bcc), eine Flächen-zentrierte (fcc) Variante,

so hat man alle 14 möglichen Bravais-Gitter klassifiziert (A. Bravais, 1848).

4 Anwendung der Morse Theorie auf die Van Hove Singularitäten in der Festkörperphysik

4.1 Zustandsdichten in der Festkörperphysik

Die Zustandsdichte $D(E)$ in der Festkörperphysik gibt an, wie viele Zustände des Systems sich im Intervall $[E, E + dE]$ pro Volumen befinden. Die Zustandsdichte ist in der Festkörperphysik deshalb so bedeutsam, weil für viele dynamische Prozesse in der ersten Ordnung der Störungstheorie ein Integral über ein Übergangsmatrixelement mal der Zustandsdichte auftritt. Und wenn man nun in 0-ter Näherung das Übergangsmatrixelement als konstant ansieht, dann ist der entsprechende Prozeß proportional zur Zustandsdichte.

Manchmal wird die Zustandsdichte auch als Funktion des Wellenvektors pro Volumen betrachtet, d.h. $D(\vec{k})$. Wenn eine analytische und umkehrbare Dispersionsrelation $E = E(\vec{k})$ vorliegt kann man von $D(\vec{k})$ zu $D(E)$ übergehen.

Zunächst die eher physikalische Definition der Zustandsdichte, siehe z.B. Kittel (1969), S. 219.

Definition 4.1.1 (1) *Wegen 3.2.6 ist für freie Quasi-Teilchen in einem d -dimensionalen Volumen $V^{(d)}$ das Volumen eines Zustands im reziproken Raum $\frac{(2\pi)^d}{V^{(d)}}$ und damit ist $D(\vec{k})$ konstant:*

$$D(\vec{k}) = \frac{1}{V^{(d)}} \frac{V^{(d)}}{(2\pi)^d} \cdot s = \frac{1}{(2\pi)^d} \cdot s .$$

Hierbei bezeichnet s die möglichen Spinzustände gleicher Energie, also z.B. 2 bei Elektronen.

Für die Anzahl der Zustände im Intervall $[E, E + dE]$ folgt dann

$$D(E)dE = \int_E^{E+dE} D(\vec{k})d^3k = \frac{s}{(2\pi)^d} \int_E^{E+dE} d^3k .$$

Nun kann man für $E = E(\vec{k})$ schreiben: $dE = (\nabla_{\vec{k}}E)dk_{\perp}$ und $d^3k = dS(E) \cdot dk_{\perp}$, wenn $S(E)$ die Äqui-Energieschale zur Energie E im \vec{k} -Raum bezeichne. Damit ergibt sich

$$D(E) = \frac{s}{(2\pi)^d} \int_E^{E+dE} \frac{1}{(\nabla_{\vec{k}}E)} dS(E) .$$

In der Quantentheorie gilt $E = \hbar\omega$ und $\vec{v}_g := \nabla_{\vec{k}}\omega$ ist die Gruppengeschwindigkeit einer Welle mit der Frequenz ω . Man sieht also unmittelbar, daß bei $(\nabla_{\vec{k}}E) = (\nabla_{\vec{k}}\hbar\omega) = \hbar\vec{v}_g = 0$ eine Singularität auftritt.

Und jetzt die eher mathematische Definition der Zustandsdichte als Integral über eine Distribution.

Definition 4.1.2 (2) Sei ein d -dim. makroskopischer Festkörper gegeben mit den Basisvektoren des periodischen Gitters $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_d\}$, mit den makroskopischen Längen \vec{L} mit $\vec{L}_i := N_i\vec{a}_i$ und mit den periodischen Randbedingungen $\psi(\vec{0}) = \psi(\vec{L})$, dann wird die Zustandsdichte $D(E)$ folgendermaßen definiert:

$$D(E) = \frac{1}{V^{(d)}} \cdot s \cdot \sum_{i=1}^{N_1 \cdot \dots \cdot N_d} \delta(E - E(\vec{k}_i)) .$$

Hierbei bezeichnet s die möglichen Spinzustände gleicher Energie, also z.B. 2 bei Elektronen.

Da der Festkörper makroskopische Abmessungen hat, d.h. da die Abmessungen L_1, \dots, L_d und damit die Anzahl der Gitterplätze $N_1 \cdot \dots \cdot N_d$ sehr groß sind, kann man von der Summation zu einer Integration übergehen. Hierzu erweitert man die Summe um $(\Delta k)^d = \frac{(2\pi)^d}{V^{(d)}}$ und erhält

$$D(E) = \frac{1}{V^{(d)}} \cdot \frac{V^{(d)}}{(2\pi)^d} \int_{V^{(d)}} d^d k \delta(E - E(\vec{k}_i)) = \int_{V^{(d)}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(E - E(\vec{k}_i)) .$$

Wenn $E(\vec{k})$ in analytischer Form vorliegt stützt sich die Auswertung dieses Integrals auf die folgende bekannte Formel der Integration über eine Delta-Distribution (siehe z.B. Wikipedia-Delta-Distribution (2020)). Seien $f(x), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und habe $g(x)$ nur endlich viele und nur einfache Nullstellen $g(x_i) = 0$, $i \in 1, \dots, n$, dann gilt:

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{1}{|g'(x_i)|} .$$

Wenn $E(\vec{k})$ in numerischer Form vorliegt, wie etwa bei Bandstrukturrechnungen, dann wird $D(E)$ numerisch ermittelt.

Die Zustandsdichte $D(E)$ für ein freies Elektronengas in parabolischer Näherung berechnet sich aus der Dispersionsrelation

$$E(\vec{k}) = E_0 + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad \text{mit der effektiven Elektronenmasse } m .$$

Da wir im nächsten Abschnitt zur Beschreibung der Van Hove Singularitäten für die Dimensionen $d = 1, 2, 3$ in der Umgebung von E_0 auch von einer parabolischen Näherung ausgehen, können wir die dortigen Resultate von $D(E)$ für ein Minimum von $E(\vec{k})$ bei E_0 übernehmen. Wir werden dort das Folgende beweisen:

$$1 - \text{dim.}, E > E_0 : D(E) = D_0(E) + A_1(E - E_0)^{-1/2} ,$$

$$2 - \text{dim.}, E > E_0 : D(E) = D_0(E) + B_1 , \text{ mit } B_1 = \text{const.} ,$$

$$3 - \text{dim.}, E > E_0 : D(E) = D_0(E) + A_2\sqrt{E - E_0} .$$

4.2 Léon Van Hove (1924 – 1990)

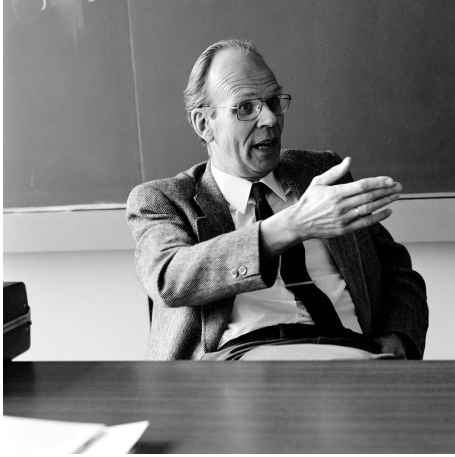


Abbildung 4.1: L. Van Hove CERN (1976), CC BY-SA 4.0. [https://de.wikipedia.org/wiki/Léon_Van_Hove]

Léon Van Hove wurde im Jahr 1924 in Brüssel geboren. Er studierte Mathematik und Physik an der Université Libre de Bruxelles und promovierte 1946 dort in Mathematik bei dem theoretischen Physiker Théophile de Donder. Von 1949-1954 forschte er am 'Princeton Institute for Advanced Study' in Princeton, New Jersey. Danach arbeitete er Brookhaven National Laboratory in Upton, Long Island und als Direktor des Instituts für Theoretische Physik an der Universität von Utrecht in den Niederlanden. Im Jahr 1959 folgte er einer Einladung zur Leitung der Theorie-Abteilung des CERN in Genf und 1975 wurde er schließlich zum General-Direktor des CERN berufen. Während seiner Zeit als Direktor des CERN machte er den Vorschlag für das LEP-Projekt. Van Hove war Mitglied zahlreicher wissenschaftlicher Akademien und erhielt 1974 für seine viel-

fältigen Verdienste die Max-Planck-Medaille.

Zu seinen Doktoranden gehörte u.a. Martinus Veltman.

Seine wissenschaftlichen Beiträge reichten von der Festkörper-Physik über die Nuklear-Physik und Elementarteilchen-Physik bis hin zur Kosmologie.

[Quellen: en.wikipedia: Léon_Van_Hove und de.wikipedia: Léon_Van_Hove]

4.3 Struktur der Van Hove Singularitäten in der Festkörperphysik

Der belgische Physiker Léon Van Hove hat Singularitäten in der Zustandsdichte von Phononen erstmals im Jahr 1953 beschrieben.

Nach einer allgemeinen Diskussion von Betti-Zahlen und Morse-Ungleichungen bei einem n -dimensionalen Torus wenden wir die Ergebnisse auf Übergänge von Elektronen in einem 2-Bänder-Modell eines Festkörperkristalls an, genauer gesagt auf direkte optische Übergänge von einem Valenzband E_v in ein Leitungsband E_c , also $E_v(\vec{k}) \rightarrow E_c(\vec{k})$ mit $E := \hbar\omega = E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k})$.

Dabei folgen wir, mit gewissen Modifikationen, der klassischen Darstellung von Bassani u. Pattavicini (1975), Kap. 5, insb. S. 155-160.

Zuerst benötigen wir also die Betti-Zahlen für einen Torus $T^n = (S^1)^n := S^1 \times \dots \times S^1$. Diese kann man mit Hilfe der Künneth-Formel gewinnen.

Satz 4.3.1 (Künneth-Formel) *Wir betrachten nur den einfachsten Fall der Künneth-Formel, in welcher der Koeffizienten-Ring der Homologie ein Feld ist, z.B. \mathbb{Z} . In diesem Fall ist der Koeffizientenring eine freie abelsche Gruppe, verhält sich also bzgl. einer Basis wie ein Vektorraum, und deswegen ist die Torsionsuntergruppe $\{0\}$. In diesem Fall gilt:*

$$H_r(X \times Y) = \bigoplus_{r=p+q} H_p(X) \otimes H_q(Y),$$

und es gilt mit dem Poincaré-Polynom $P_X(t)$:

$$P_X(t) := b_0(X) + b_1(X)t + b_2(X)t^2 + \dots$$

$$P_{X \times Y}(t) = P_X(t) \cdot P_Y(t) \quad \Leftrightarrow \quad b_r(X \times Y) = \bigoplus_{r=p+q} b_p(X) \cdot b_q(Y),$$

womit folgt für $T^n = (S^1)^n := S^1 \times \dots \times S^1$:

$$b_r(T^n) = b_r((S^1)^n) = \binom{n}{r}.$$

Beweis: Ein allgemeiner Beweis der Künneth-Formel findet sich z.B. in Stöcker u. Zieschang (1994), S. 313 ff. Die Betti-Koeffizienten des Torus finden sich z.B. in Naik (2011), sollen hier aber direkt per vollständiger Induktion bewiesen werden.

Zunächst soll die vollständige Induktion von $b_r(T^n) = \binom{n}{r}$ bezüglich n gezeigt werden. Der Induktionsanfang mit $T^1 = S^1$ ist einfach $b_0(S^1) = b_1(S^1) = \binom{1}{1} = 1$. Jetzt sei die Aussage für n richtig, dann folgt für $n + 1$:

$$\begin{aligned} b_r(T^{n+1}) &= b_0(S^1)b_r(T^n) + b_1(S^1)b_{r-1}(T^n) \\ &= \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} + \frac{n!r}{(r)!(n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \binom{n+1}{r}. \end{aligned}$$

Die vollständige Induktion von $b_r(T^n) = \binom{n}{r}$ bezüglich r ist etwas aufwendiger und verlangt neben der üblichen Binomialaddition (Pascals Dreieck) noch eine seltener gebrauchte binomische Formel, der sog. Hockeystock Identität (Wikipedia-Hockey-stick (2020)).

Die Formel der Binomialaddition (Pascals Dreieck) lautet (für unseren Fall):

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} &= \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} + \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} \\ &= \frac{(n+1)!(n+1-r+r+1)}{(r+1)!(n+2-(r+1))!} = \binom{n+2}{r+1}. \end{aligned}$$

Die Hockeystock Identität besagt:

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Und auch diese Identität wird wieder induktiv bewiesen. Für den Induktionsanfang gilt:

$$\sum_{i=r}^r \binom{i}{r} = \binom{r}{r} = 1 = \binom{r+1}{r+1}.$$

Für den Induktionsschritt von n nach $n+1$ folgt mit der üblichen Binomialaddition:

$$\sum_{i=r}^{n+1} \binom{i}{r} = \sum_{i=r}^n \binom{i}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}.$$

Nach dieser Vorbetrachtung kann die vollständige Induktion von $b_r(T^n) = \binom{n}{r}$ bezüglich r bewiesen werden.

$$\begin{aligned} b_{r+1}(T^n) &= b_0(S^1)b_{r+1}(T^{n-1}) + b_1(S^1)b_r(T^{n-1}) \\ &= b_{r+1}(T^{n-2}) + b_r(T^{n-2}) + b_r(T^{n-1}) \\ &= b_{r+1}(T^1) + \sum_{i=1}^{n-1} b_r(T^i) = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i}{r} \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{r} = \binom{n}{r+1}. \end{aligned}$$

□

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	\dots
T^1	1	1	0	\dots	\dots	\dots	
T^2	1	2	1	0	\dots	\dots	
T^3	1	3	3	1	0	\dots	
T^4	1	4	6	4	1	0	
\vdots							

Unser Modell eines 2-dim. Festkörpers-Kristalls mit periodischen Randbedingungen ist der 2-Torus T^2 , den wir am Anfang des Kapitels zur Morse-Theorie untersucht hatten. Die zwei Sattelpunkte haben beide die Signatur (+ -).

Die schwache Morse-Ungleichung 22.4.10 sagt uns nun für die Anzahl $C_\lambda(f)$ der nichtentarteten kritischen Punkte mit dem Index λ einer Morse-Funktion f :

$$C_\lambda(f) \geq b_\lambda(M) .$$

Daraus folgt nun für 1-, 2- und 3-dimensionale Festkörper-Kristalle mit periodischen Randbedingungen:

1-dim.: unser Modell eines 1-dim. Festkörper-Kristalls mit periodischen Randbedingungen ist der 1-Torus T^1 .

$$C_0 \geq 1, \quad C_1 \geq 1 ,$$

d.h. ein einzelnes analytisches Energieband eines 1-dim. Festkörper-Kristalls mit nur nichtentarteten kritischen Punkten hat also mindestens:

- einen Punkt mit $\lambda = 0$, d.h. ein Minimum mit der Signatur (+),
- einen Punkt mit $\lambda = 1$, d.h. ein Maximum mit der Signatur (-),

2-dim.: unser Modell eines 2-dim. Festkörper-Kristalls mit periodischen Randbedingungen ist der 2-Torus T^2 .

$$C_0 \geq 1, \quad C_1 \geq 2, \quad C_2 \geq 1 ,$$

d.h. ein einzelnes analytisches Energieband eines 2-dim. Festkörper-Kristalls mit nur nichtentarteten kritischen Punkten hat also mindestens:

- einen Punkt mit $\lambda = 0$, d.h. ein Minimum mit der Signatur (+ +),
- zwei Punkte mit $\lambda = 1$, d.h. Sattelpunkte mit der Signatur (+ -),
- einen Punkt mit $\lambda = 2$, d.h. ein Maximum mit der Signatur (- -).

3-dim.: unser Modell eines 3-dim. Festkörper-Kristalls mit periodischen Randbedingungen ist der 3-Torus T^3 . Dieses Beispiel ist völlig analog zum 2-Torus T^2 , nur daß T^3 nicht mehr in \mathbb{R}^3 eingebettet werden kann.

$$C_\lambda(f) \geq b_\lambda(M) , \text{ also}$$

$$C_0 \geq 1, \quad C_1 \geq 3, \quad C_2 \geq 3, \quad C_3 \geq 1 ,$$

d.h. ein einzelnes analytisches Energieband eines 3-dim. Festkörper-Kristalls mit nur nichtentarteten kritischen Punkten hat also mindestens:

- einen Punkt mit $\lambda = 0$, d.h. ein Minimum mit der Signatur (+ + +),
- drei Punkte mit $\lambda = 1$, d.h. Sattelpunkte mit der Signatur (+ + -),

- drei Punkte mit $\lambda = 2$, d.h. Sattelpunkte mit der Signatur (+ - -),
- einen Punkt mit $\lambda = 3$, d.h. ein Maximum mit der Signatur (- - -).

Jetzt betrachten wir Übergänge von Elektronen in einem 2-Bänder-Modell eines Festkörperkristalls, genauer gesagt direkte optische Übergänge von einem Valenzband E_v in ein Leitungsband E_c , also $E_v(\vec{k}) \rightarrow E_c(\vec{k})$ mit $E := \hbar\omega = E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k})$.

Wesentlich ist jetzt die Dimension n des Festkörpers. Bekannte Beispiele sind hier die 1-dimensionalen Kohlenstoff-Nanotubes, die 2-dim. Graphit-Schichten und Quanten-Hall-Effekt MOSFET-Elemente, und das 3-dim. Elektronengas in 3-dim. Festkörpern.

In allen Fällen setzen wir periodische Randbedingungen (Born-von-Kármán-Modell) voraus, so daß unsere Topologie immer ein n -dim. Torus ist.

Sei E_0 ein kritischer Punkt des Übergangs $E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k})$, dann kann man um E_0 herum entwickeln - hier der 3-dim. Fall:

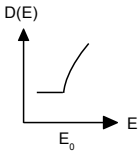
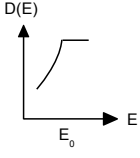
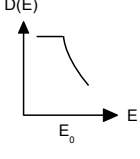
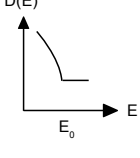
$$E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k}) = E_0 + \left(\epsilon_x \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_x} + \epsilon_y \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_y} + \epsilon_z \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_z} \right).$$

Hierbei sind die m_x, m_y, m_z effektive Elektronmassen und die Faktoren $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z \in \{-1, +1\}$ zeigen an, ob Minima vorliegen (+1, +1, +1), Maxima (-1, -1, -1) oder Sattelpunkte bei gemischten Vorzeichen. Damit ergeben sich die folgenden Resultate.

Satz 4.3.3

<i>krit. Punkt</i>	1-dim. - Zustandsdichte $D(E)$	<i>schemat. Bild</i>
<i>Min.</i> (+)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) ,$ $E = E_0 : D(E) = \infty ,$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) + A_1(E - E_0)^{-1/2} .$	
<i>Max.</i> (-)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) + A_1(E_0 - E)^{-1/2} ,$ $E = E_0 : D(E) = \infty ,$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) .$	

<i>krit. Punkt</i>	2-dim. - Zustandsdichte $D(E)$	<i>schemat. Bild</i>
<i>Min.</i> (+,+)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) ,$ $E \geq E_0 : D(E) = D_0(E) + B_1 ,$	
<i>Sattelpunkt</i> (+,-)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) + C_1 - C_2 \ln(E_0 - E) ,$ $E = E_0 : D(E) = \infty ,$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) + C_3 - C_2 \ln(E - E_0) .$	
<i>Max.</i> (-,-)	$E \leq E_0 : D(E) = D_0(E) + B_1 .$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) .$	

<i>krit. Punkt</i>	3-dim. - Zustandsdichte $D(E)$	<i>schemat. Bild</i>
<i>Min.</i> (+,+,+)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) ,$ $E \geq E_0 : D(E) = D_0(E) + A_2\sqrt{E - E_0} .$	
<i>Sattelpunkt</i> (+,+,-)	$E \leq E_0 : D(E) = D_0(E) - A_2\sqrt{E_0 - E} ,$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) .$	
<i>Sattelpunkt</i> (+,-,-)	$E < E_0 : D(E) = D_0(E) ,$ $E \geq E_0 : D(E) = D_0(E) - A_2\sqrt{E - E_0} .$	
<i>Max.</i> (-,-,-)	$E \leq E_0 : D(E) = D_0(E) + A_2\sqrt{E_0 - E} ,$ $E > E_0 : D(E) = D_0(E) .$	

Beweis: Der Beweis stützt sich auf die folgende bekannte Formel der Integration über eine Delta-Distribution (siehe z.B. Wikipedia-Delta-Distribution (2020)). Seien $f(x), g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ und habe $g(x)$ nur endlich viele und nur einfache Nullstellen $g(x_i) = 0, i \in 1, \dots, n$, dann gilt:

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{1}{|g'(x_i)|} .$$

1-dim.: —————

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \int_{BZ} \frac{dk_z}{2\pi} \delta(E_0 + \epsilon_z \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_z} - E) \\
&= D_0(E) + \frac{2}{(2\pi)} \frac{\sqrt{2m_z}}{\hbar} \int_0^{Q_z} dq_z \delta(E_0 + \epsilon_z q_z^2 - E) \\
&= D_0(E) + \frac{2}{(2\pi)} \frac{\sqrt{2m_z}}{\hbar} \frac{1}{2|q_0|} \quad \text{mit} \quad q_0 := \sqrt{\epsilon_z(E - E_0)} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

a. $\epsilon_z = +1$. Dies ist ein Minimum.

a.1. $E = E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + \infty = \infty .$$

a.2. $E < E_0$:

$$\int_0^{Q_z} dq_z \delta(E_0 + q_z^2 - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) .$$

a.3. $E > E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + \frac{1}{(2\pi)} \frac{\sqrt{2m_z}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E - E_0}} .$$

b. $\epsilon_z = -1$. Dies ist ein Maximum.

b.1. $E = E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + \infty = \infty .$$

b.2. $E < E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + \frac{1}{(2\pi)} \frac{\sqrt{2m_z}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E_0 - E}} .$$

b.3. $E > E_0$:

$$\int_0^{Q_z} dq_z \delta(E_0 - q_z^2 - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) .$$

2-dim.:

$$\begin{aligned} D(E) &= D_0(E) + 2 \int_{BZ} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \delta(E_0 + \epsilon_x \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_x} + \epsilon_y \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_y} - E) \\ &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_{BZ} dq_x dq_y \delta(E_0 + \epsilon_x q_x^2 + \epsilon_y q_y^2 - E) . \end{aligned}$$

Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor.

a. $\epsilon_x = +1$, $\epsilon_y = +1$: Dies ist ein Minimum. Wir gehen zur Integration zu sphärische Koordinaten q_φ, q_r über.

$$\begin{aligned} D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_{BZ} dq_x dq_y \delta(E_0 + q_x^2 + q_y^2 - E) \\ &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_r} dq q \delta(E_0 + q^2 - E) . \end{aligned}$$

a.1. $E = E_0$:

$$\int_0^{Q_r} dq q \delta(q^2) = \lim_{q \rightarrow 0} q \frac{1}{2|q|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) + \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi) \hbar^2} .$$

a.2. $E < E_0$:

$$\int_0^{Q_r} dq q \delta(E_0 + q^2 - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) .$$

a.3. $E > E_0$:

$$\int_0^{Q_r} dq q \delta(E_0 + q^2 - E) = q_0 \frac{1}{2|q_0|} = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad q_0 := \sqrt{E - E_0} \quad \Rightarrow$$

$$D(E) = D_0(E) + \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi) \hbar^2} .$$

b. $\epsilon_x = -1$, $\epsilon_y = -1$: Dies ist ein Maximum. Wir gehen zur Integration wieder zu sphärische Koordinaten q_φ, q_r über.

$$\begin{aligned} D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_{BZ} dq_x dq_y \delta(E_0 - q_x^2 - q_y^2 - E) \\ &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_r} dq q \delta(E_0 - q^2 - E) . \end{aligned}$$

Wegen $\delta(x) = \delta(-x)$ ergibt sich

$$D(E) = D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_r} dq q \delta(E + q^2 - E_0) ,$$

und damit folgt das spiegelbildliche Ergebnis wie oben im Fall $\epsilon_x = +1$, $\epsilon_y = +1$.

b.1. $E = E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + 2\pi \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2}.$$

b.2. $E < E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + 2\pi \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2}.$$

b.3. $E > E_0$:

$$D(E) = D_0(E).$$

c. $\epsilon_x = +1$, $\epsilon_y = -1$: Dies ist ein Sattelpunkt.

Sei nun $E \leq E_0$:

$$\begin{aligned} D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_{BZ} dq_x dq_y \delta(E_0 + q_x^2 - q_y^2 - E) \\ &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_x} dq_x \frac{1}{2|q_{y0}|} \quad \text{mit } q_{y0} := \sqrt{E_0 - E + q_x^2}. \end{aligned}$$

c.1. Damit folgt für $E = E_0$:

$$\begin{aligned} D(E) &= D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_x} dq_x \frac{1}{2|q_x|} \\ &= D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{2} (\ln(Q_x) - \ln(0)) = \infty. \end{aligned}$$

c.2. Und für $E < E_0$ ergibt sich:

$$D(E) = D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_x} dq_x \frac{1}{2\sqrt{q_x^2 + E_0 - E}}.$$

Mit Bronstein u. Semendjajew (1971), S. 309, Nr. 192 und der makroskopischen Abmessung $Q_x^2 \gg (E_0 - E)$ ergibt sich:

$$D(E) = D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \ln(q_x + \sqrt{q_x^2 + E_0 - E}) \Big|_0^{Q_x}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} [\ln(2Q_x) - \ln(\sqrt{E_0 - E})] \\
&= D_{0,1}(E_0) - 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \ln(\sqrt{E_0 - E}) \\
&= D_{0,1}(E_0) - \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \ln(E_0 - E) .
\end{aligned}$$

c.3. Für $E > E_0$ integrieren wir über dq_y statt über dq_x und es ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E_0) + 2 \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \int_0^{Q_y} dq_y \frac{1}{2\sqrt{q_y^2 + E - E_0}} \\
&= D_{0,2}(E) - \frac{\sqrt{4m_x m_y}}{(2\pi)^2 \hbar^2} \ln(E - E_0) .
\end{aligned}$$

3-dim.:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \int_{BZ} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(E_0 + \epsilon_x \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_x} + \epsilon_y \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_y} + \epsilon_z \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_z} - E) \\
&= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{BZ} dq_x dq_y dq_z \delta(E_0 + \epsilon_x q_x^2 + \epsilon_y q_y^2 + \epsilon_z q_z^2 - E) .
\end{aligned}$$

Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor.

a. $\epsilon_x = +1, \epsilon_y = +1, \epsilon_z = +1$: Dies ist ein Minimum. Wir gehen zur Integration zu zylindrischen Koordinaten q_φ, q_r, q_z über.

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} 2\pi \int_0^{Q_r} \int_0^{Q_z} q_r dq_r dq_z \delta(E_0 + q_r^2 + q_z^2 - E) \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} q_r dq_r \frac{1}{2|q_{z0}|} \quad \text{mit } q_{z0} := \sqrt{-q_r^2 + E - E_0} .
\end{aligned}$$

a.1. $E < E_0$:

$$\int_0^{Q_r} q_r dq_r \delta(E_0 + q_r^2 + q_z^2 - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) .$$

a.2. $E > E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{\sqrt{E-E_0}} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{-q_r^2 + E - E_0}}$$

$$\begin{aligned}
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{(E-E_0)} dp \frac{1}{4\sqrt{-p + E - E_0}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (-\sqrt{-p + E - E_0}) \Big|_0^{(E-E_0)} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_0} .
\end{aligned}$$

b. $\epsilon_x = +1$, $\epsilon_y = +1$, $\epsilon_z = -1$: Dies ist ein Sattelpunkt. Wir gehen zur Integration wieder zu zylindrischen Koordinaten q_φ, q_r, q_z über.

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} 2\pi \int_0^{Q_r} \int_0^{Q_z} q_r dq_r dq_z \delta(E_0 + q_r^2 - q_z^2 - E) \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} q_r dq_r \frac{1}{2|q_{z0}|} \quad \text{mit } q_{z0} := \sqrt{+q_r^2 + E_0 - E} .
\end{aligned}$$

b.1. $E \leq E_0$:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{+q_r^2 + E_0 - E}} \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r^2} dp \frac{1}{4\sqrt{+p + E_0 - E}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (\sqrt{+p + E_0 - E}) \Big|_0^{Q_r^2} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot [\sqrt{Q_r^2 + E_0 - E} - \sqrt{E_0 - E}] \\
&= D_{0,3}(E) - \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot \sqrt{E_0 - E} .
\end{aligned}$$

Aufgrund der makroskopischen Abmessung $Q_r^2 \gg (E_0 - E)$ haben wir den entsprechende Term zu $D_0(E)$ addiert.

b.2. $E > E_0$:

$$D(E) = D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{\sqrt{E-E_0}}^{Q_r} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{+q_r^2 + E_0 - E}}$$

$$\begin{aligned}
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{(E-E_0)}^{Q_r^2} dp \frac{1}{4\sqrt{+p + E_0 - E}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (\sqrt{+p + E_0 - E}) \Big|_{E-E_0}^{Q_r^2} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot [\sqrt{Q_r^2 + E_0 - E} - 0] \\
&= D_{0,4}(E) .
\end{aligned}$$

Aufgrund der makroskopischen Abmessung $Q_r^2 \gg (E_0 - E)$ haben wir den entsprechenden Term zu $D_0(E)$ addiert.

c. $\epsilon_x = +1, \epsilon_y = -1, \epsilon_z = -1$: Dies ist ein anderer Sattelpunkt. Wir gehen zur Integration wieder zu zylindrischen Koordinaten q_φ, q_r, q_x über, aber diesmal erstreckt sich der Zylinder in q_x -Richtung.

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} 2\pi \int_0^{Q_r} \int_0^{Q_x} q_r dq_r dq_x \delta(E_0 + q_x^2 - q_r^2 - E) \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} q_r dq_r \frac{1}{2|q_{x0}|} \quad \text{mit } q_{x0} := \sqrt{+q_r^2 + E - E_0} .
\end{aligned}$$

c.1. $E < E_0$:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{\sqrt{E_0-E}}^{Q_r} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{+q_r^2 + E - E_0}} \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_{(E_0-E)}^{Q_r^2} dp \frac{1}{4\sqrt{+p + E - E_0}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (\sqrt{+p + E - E_0}) \Big|_{(E_0-E)}^{Q_r^2} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot \sqrt{Q_r + E - E_0} \\
&= D_{0,5}(E) .
\end{aligned}$$

Aufgrund der makroskopischen Abmessung $Q_r^2 \gg (E_0 - E)$ haben wir den entsprechenden Term zu $D_0(E)$ addiert.

c.2. $E > E_0$:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{+q_r^2 + E - E_0}} \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r^2} dp \frac{1}{4\sqrt{+p + E - E_0}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (\sqrt{+p + E - E_0}) \Big|_0^{Q_r^2} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot [\sqrt{Q_r^2 + E - E_0} - \sqrt{E - E_0}] \\
&= D_{0,6}(E) - \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_0} ,
\end{aligned}$$

d. $\epsilon_x = -1$, $\epsilon_y = -1$, $\epsilon_z = -1$: Dies ist ein Maximum. Wir gehen zur Integration wieder zu zylindrischen Koordinaten q_φ, q_r, q_z über.

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 2 \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} 2\pi \int_0^{Q_r} \int_0^{Q_z} q_r dq_r dq_z \delta(E_0 - q_r^2 - q_z^2 - E) \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{Q_r} q_r dq_r \frac{1}{2|q_{z0}|} \quad \text{mit } q_{z0} := \sqrt{-q_r^2 + E_0 - E} .
\end{aligned}$$

d.1. $E \leq E_0$:

$$\begin{aligned}
D(E) &= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{\sqrt{E_0 - E}} (2q_r) dq_r \frac{1}{4\sqrt{-q_r^2 + E_0 - E}} \\
&= D_0(E) + 4\pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int_0^{(E_0 - E)} dp \frac{1}{4\sqrt{-p + E_0 - E}} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot (-\sqrt{-p + E_0 - E}) \Big|_0^{(E_0 - E)} \\
&= D_0(E) + \pi \frac{\sqrt{8m_x m_y m_z}}{(2\pi)^3 \hbar^3} \cdot \sqrt{E_0 - E} .
\end{aligned}$$

d.2. $E > E_0$:

$$\delta(E_0 - q_r^2 - q_z^2 - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(E) = D_0(E) . \quad \square$$

5 Geometrische Phasen in der Quantentheorie

Im Jahr 1984 veröffentlichte Berry seine berühmte Arbeit "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes" (Berry (1984)) und bei einem Gespräch von Berry mit Simon erkannte dieser sofort den Zusammenhang der *Berry Phase* mit der *Holonomie eines hermiteschen Linienbündels* und den *Chern-Klassen* (Simon (1983)). Diese beiden Veröffentlichungen waren der Beginn einer stürmischen Entwicklung der Anwendung topologischer Methoden in der Quantentheorie. Viele der wichtigsten Originalarbeiten dieser Anfangsjahre bis zum Jahr 1989 werden als *Reprints* in dem Buch der Herausgeber Shapere u. Wilczek (1989) dokumentiert.

5.1 Dirac Monopol

5.1.1 Dirac Monopol - in Diracs Darstellung

Als allererstes verweisen wir auf unsere Kurzbiographie über Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) in 29.1.

Die Maxwellschen Gleichungen vereinigen alle elektrischen und magnetischen Phänomene der klassischen Physik. Für Dirac war zeitlebens in seinem Forschen die Schönheit einer physikalischen Theorie Leitlinie seines Denkens. Und aus diesen Gedanken heraus kritisierte er die vorhandenen Maxwellschen Gleichungen, weil sie nicht völlig symmetrisch waren, denn es gab ja keine magnetischen Elementarladungen analog zu den elektrischen Elementarladungen. Außerdem stellte sich ihm die Frage, warum denn eigentlich die elektrischen Elementarladungen quantisiert sind?

Im Jahr 1931 stellte Dirac dann seine Antwort vor, in welcher er magnetische Elementarladung einführte, die später nach ihm benannten Dirac Monopole und zeigte, daß dies im Rahmen der Quantenmechanik automatisch zu einer Quantisierung der elektrischen Elementarladungen führte (Dirac (1931)).

Wir wollen zuerst den ursprünglichen Gedankengang von Dirac darstellen und anschließend die heutige topologische Beschreibung eines Dirac Monopols als ein komplexes $U(1)$ Prinzipalbündel, wie das Wu & Yang 1975 vorgeschlagen haben.

Wir folgen Nakahara (2003), S. 60 ff., S. 364 ff., und Sylvain (2018), verwenden aber **SI-Einheiten**, statt der hier von Theoretikern häufig verwendeten 'energetischen Einheiten' (zu den diversen physikalischen Einheiten-Systemen siehe speziell Zeidler (2006), S. 934 ff.). Dies soll den Experimental-Physikerinnen und -Physikern unter unseren Lesern als Erleichterung dienen.

Analog zu einem elektrischen Monopol mit der elektrischen Ladung $q_e = e$ postuliert Dirac die Existenz eines magnetischen Monopols mit der magnetischen Ladung q_m . Das magnetische Feld \vec{B} eines solchen magnetischen Monopols sollte in Analogie zum elektrischen Monopol also sein:

$$\vec{B} := b_{SI} \frac{q_m \vec{r}}{r^3} = b_{SI} \frac{q_m}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit } b_{SI} = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (5.1.1)$$

Damit ergibt sich für die Divergenz von \vec{B} bei $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{B} &= \vec{\nabla} b_{SI} \frac{q_m \vec{r}}{r^3} = b_{SI} q_m \left[\partial_x \frac{x}{r^3} + \partial_y \frac{y}{r^3} + \partial_z \frac{z}{r^3} \right] \\ &= b_{SI} q_m \left[(r^{-3} + x(-3)r^{-4} \frac{1}{2r} 2x) + (r^{-3} + y(-3)r^{-4} \frac{1}{2r} 2y) + (r^{-3} + z(-3)r^{-4} \frac{1}{2r} 2z) \right] \\ &= b_{SI} q_m \left[r^{-3} - 3 \frac{x^2}{r^5} + r^{-3} - 3 \frac{y^2}{r^5} + r^{-3} - 3 \frac{z^2}{r^5} \right] = b_{SI} q_m \left[3r^{-3} - 3 \frac{r^2}{r^5} \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Daher hat Dirac, wiederum in Analogie zum punktförmigen Elektron, eine punktförmige magnetische Ladungsdichte q_m postuliert, die in der Singularität bei $r = 0$ sitzt. Mit dem Satz von Stokes in Vektor-Formulierung folgt für den magnetischen Fluß Φ durch die Fläche S :

$$\Phi = \int_V \vec{\nabla} \vec{B} dV = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S b_{SI} q_m \frac{\vec{r}}{r^3} \vec{r} r^2 d\vartheta d\varphi = 4\pi b_{SI} q_m = \mu_0 q_m \quad \Rightarrow \quad (5.1.3)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 4\pi b_{SI} q_m \delta(\vec{r}) = \mu_0 q_m \delta(\vec{r}). \quad (5.1.4)$$

Wenn es jetzt ein eindeutiges Vektorpotential \vec{A} mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ gäbe - und keine Singularität im Integrationsbereich V - dann würde folgen:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = 0, \quad \text{da } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

Nun kann man beim Dirac-Monopol die Singularität bei $r = 0$ mit der magnetischen Ladungsdichte $\mu_0 q_m \delta(\vec{r})$ aus dem Definitionsbereich der Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^3$ herauschneiden und erhält dann überall auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ für die magnetische Feldstärke $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$, aber diese Mannigfaltigkeit $M_- := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist jetzt global nicht mehr auf einen Punkt zusammenziehbar und damit gibt es auch kein globales Vektorpotential \vec{A} .

In dieser Situation hat Dirac im Jahr 1931, ohne ein Wissen um den topologischen Hintergrund, einfach zwei verschiedene Vektorpotentiale A^N und A^S auf der nördlichen und südlichen Hemisphäre definiert und diese dann am Äquator gleichgesetzt. Die beiden Koordinaten-Umgebungen sind:

$$U^N := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid 0 < r, 0 \leq \vartheta + \epsilon \leq \frac{\pi}{2} + \delta, 0 \leq \varphi < 2\pi \}, \quad (5.1.5)$$

$$U^S := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid 0 < r, \frac{\pi}{2} - \delta \leq \vartheta - \epsilon \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad (5.1.6)$$

$$\text{mit } 0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Jede dieser Koordinaten-Umgebungen ist einfach zusammenhängend und dort gibt es also nach dem Lemma von Poincaré zu jedem vorgegebenen Magnetfeld \vec{B} ein Vektor-Potential \vec{A} mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Dirac hat die folgenden Vektor-Potentiale \vec{A}^N und \vec{A}^S gewählt:

$$A_x^N := b_{SI} \frac{-q_m y}{r(r+z)}, \quad A_y^N := b_{SI} \frac{q_m x}{r(r+z)}, \quad A_z^N := 0, \quad r \neq 0, r \neq -z, \quad (5.1.7)$$

$$A_x^S := b_{SI} \frac{q_m y}{r(r-z)}, \quad A_y^S := b_{SI} \frac{-q_m x}{r(r-z)}, \quad A_z^S := 0, \quad r \neq 0, r \neq +z, \quad (5.1.8)$$

Tatsächlich liefern diese beiden Vektor-Potentiale für $r \neq 0$ das gewünschte Dirac-Monopol Magnetfeld \vec{B} :

$$\vec{B} = b_{SI} \frac{q_m \vec{r}}{r^3}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}^N)_x &= \partial_y A_z^N - \partial_z A_y^N = -b_{SI} q_m \partial_z \frac{x}{r^2 + rz} \\ &= b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 + rz)^2} \left((2r + z) \frac{\partial r}{\partial z} + r \right) = b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 + rz)^2} \left((2r + z) \frac{z}{r} + r \right) \\ &= b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 + rz)^2} \left(2z + \frac{z^2}{r} + r \right) = b_{SI} q_m \frac{x}{r(r^2 + rz)^2} (r^2 + 2zr + z^2) \\ &= b_{SI} q_m \frac{x}{r^3 (r + z)^2} (r + z)^2 = b_{SI} \frac{q_m x}{r^3}, \end{aligned}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}^N)_y = \partial_z A_x^N - \partial_x A_z^N = -b_{SI} q_m \partial_z \frac{y}{r^2 + rz} = \dots = b_{SI} \frac{q_m y}{r^3},$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}^N)_z &= \partial_x A_y^N - \partial_y A_x^N = \\ &= b_{SI} \left(q_m \frac{1}{(r^2 + rz)} + q_m x \partial_x \frac{1}{(r^2 + rz)} + q_m \frac{1}{(r^2 + rz)} + q_m y \partial_y \frac{1}{(r^2 + rz)} \right) \\ &= b_{SI} \left(\frac{2q_m}{(r^2 + rz)} - \frac{q_m x (2r + z) \frac{1}{2r} 2x}{(r^2 + rz)^2} - \frac{q_m y (2r + z) \frac{1}{2r} 2y}{(r^2 + rz)^2} \right) \\ &= b_{SI} \frac{q_m}{r^3 (r + z)^2} (2r^2 (r + z) - x^2 (2r + z) - y^2 (2r + z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r+z)^2} (2(x^2 + y^2 + z^2)(r+z) - 2x^2r - x^2z - 2y^2r - y^2z) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r+z)^2} (2x^2r + 2x^2z + 2y^2r + 2y^2z + 2z^2r + 2z^3 \\
&\quad - 2x^2r - x^2z - 2y^2r - y^2z) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r+z)^2} (x^2z + y^2z + 2z^2(r+z)) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r+z)^2} ((x^2 + y^2 + z^2)z + 2z^2r + z^3) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r+z)^2} (r^2 + 2zr + z^2)z = b_{SI} \frac{q_m z}{r^3} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A}^S)_x &= \partial_y A_z^S - \partial_z A_y^S = b_{SI} q_m \partial_z \frac{x}{r^2 - rz} \\
&= -b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 - rz)^2} ((2r - z) \frac{\partial r}{\partial z} - r) = -b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 - rz)^2} ((2r - z) \frac{z}{r} - r) \\
&= -b_{SI} q_m \frac{x}{(r^2 - rz)^2} (2z - \frac{z^2}{r} - r) = -b_{SI} q_m \frac{x}{r(r^2 - rz)^2} (-r^2 + 2zr - z^2) \\
&= b_{SI} q_m \frac{x}{r^3(r-z)^2} (r-z)^2 = b_{SI} \frac{q_m x}{r^3} ,
\end{aligned}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}^S)_y = \partial_z A_x^S - \partial_x A_z^S = b_{SI} q_m \partial_z \frac{y}{r^2 - rz} = \dots = b_{SI} \frac{q_m y}{r^3} ,$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A}^S)_z &= \partial_x A_y^S - \partial_y A_x^S = \\
&= b_{SI} \left(-q_m \frac{1}{(r^2 - rz)} - q_m x \partial_x \frac{1}{(r^2 - rz)} - q_m \frac{1}{(r^2 - rz)} - q_m y \partial_y \frac{1}{(r^2 - rz)} \right) \\
&= b_{SI} \left(-\frac{2q_m}{(r^2 - rz)} + \frac{q_m x (2r - z) \frac{1}{2r} 2x}{(r^2 - rz)^2} + \frac{q_m y (2r - z) \frac{1}{2r} 2y}{(r^2 - rz)^2} \right) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r-z)^2} (-2r^2(r-z) + x^2(2r-z) + y^2(2r-z)) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r-z)^2} (-2(x^2 + y^2 + z^2)(r-z) + 2x^2r - x^2z + 2y^2r - y^2z) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3(r-z)^2} (-2x^2r + 2x^2z - 2y^2r + 2y^2z - 2z^2r + 2z^3 \\
&\quad + 2x^2r - x^2z + 2y^2r - y^2z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3 (r-z)^2} (x^2 z + y^2 z - 2z^2 (r-z)) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3 (r-z)^2} ((x^2 + y^2 + z^2)z - 2z^2 r + z^3) \\
&= b_{SI} \frac{q_m}{r^3 (r-z)^2} (r^2 - 2zr + z^2)z = b_{SI} \frac{q_m z}{r^3}. \quad \square
\end{aligned}$$

Um jetzt \vec{A}^N und \vec{A}^S am Äquator zu verknüpfen ist es sinnvoll auf Polarkoordinaten überzugehen (Wikipedia-Kugelkoordinaten (2021)):

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (5.1.9)$$

$$(\vec{\nabla} f)(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.1.10)$$

Für die Beschreibung von \vec{A}^N und \vec{A}^S am Äquator genügen A_φ^N und A_φ^S :

$$\begin{aligned}
A_\varphi^N &= -\sin \varphi A_x^N + \cos \varphi A_y^N = \sin \varphi \frac{b_{SI} q_m y}{r(r+z)} + \cos \varphi \frac{b_{SI} q_m x}{r(r+z)} \\
&= \sin \varphi \frac{b_{SI} q_m r \sin \vartheta \sin \varphi}{r(r+r \cos \vartheta)} + \cos \varphi \frac{b_{SI} q_m r \sin \vartheta \cos \varphi}{r(r+r \cos \vartheta)} = \frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta}{r(1+\cos \vartheta)} \\
&= \frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta (1-\cos \vartheta)}{r(1+\cos \vartheta)(1-\cos \vartheta)} = \frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta (1-\cos \vartheta)}{r \sin^2 \vartheta} = \frac{b_{SI} q_m}{r \sin \vartheta} (1-\cos \vartheta), \quad (5.1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\varphi^S &= -\sin \varphi A_x^S + \cos \varphi A_y^S = -\sin \varphi \frac{b_{SI} q_m y}{r(r-z)} - \cos \varphi \frac{b_{SI} q_m x}{r(r-z)} \\
&= -\sin \varphi \frac{b_{SI} q_m r \sin \vartheta \sin \varphi}{r(r-r \cos \vartheta)} - \cos \varphi \frac{b_{SI} q_m r \sin \vartheta \cos \varphi}{r(r-r \cos \vartheta)} = -\frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta}{r(1-\cos \vartheta)} \\
&= -\frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta (1+\cos \vartheta)}{r(1-\cos \vartheta)(1+\cos \vartheta)} = -\frac{b_{SI} q_m \sin \vartheta (1+\cos \vartheta)}{r \sin^2 \vartheta} = \frac{b_{SI} q_m}{r \sin \vartheta} (-1-\cos \vartheta). \quad (5.1.12)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt hat Dirac gezeigt, daß $\vec{A}_\varphi^N - \vec{A}_\varphi^S = \vec{\nabla} \Lambda$ mit einem Skalar Λ geschrieben werden kann. Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda = 0$ ist dies eine Eichtransformation, die also

die magnetische Feldstärke \vec{B} nicht beeinflusst.

$$\begin{aligned}\vec{A}_\varphi^N - \vec{A}_\varphi^S &= \frac{b_{SI}q_m}{r \sin \vartheta} (1 - \cos \vartheta) - \frac{b_{SI}q_m}{r \sin \vartheta} (-1 - \cos \vartheta) = \frac{2b_{SI}q_m}{r \sin \vartheta} \\ &= \vec{\nabla}(2b_{SI}q_m\varphi) =: \vec{\nabla}(\Lambda).\end{aligned}\quad (5.1.13)$$

Bei einer Eichtransformation $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda)$ ändert sich die Wellenfunktion der stationären Schrödingergleichung für ein Elektron im Magnetfeld von

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

zu

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda))^2\psi'(\vec{r}) = E\psi'(\vec{r}) \quad \text{mit } \psi'(\vec{r}) = e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}}\psi(\vec{r}). \quad (5.1.14)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda))^2\psi'(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda))^2 e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}}\psi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda))(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda)) e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}}\psi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda)) e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - i\hbar\frac{-ie\vec{\nabla}(\Lambda)}{\hbar} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda)\right)\psi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - i\hbar\frac{-ie\vec{\nabla}(\Lambda)}{\hbar} + e\vec{A}(\vec{r}) + e\vec{\nabla}(\Lambda)\right) (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))\psi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}} (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))\psi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2m} e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}} (-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{r}))^2\psi(\vec{r}) = e^{-\frac{ie\Lambda}{\hbar}} E\psi(\vec{r}). \quad \square\end{aligned}$$

Nun soll aber die Wellenfunktion am Äquator (d.h. bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) nach einem Umlauf von $\varphi = 0$ nach $\varphi = 2\pi$ gleich bleiben, und damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{e\Lambda}{\hbar} &= \frac{e2b_{SI}q_m\varphi|_0^{2\pi}}{\hbar} = \frac{e2b_{SI}q_m(2\pi - 0)}{\hbar} \stackrel{!}{=} 2\pi n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \\ \frac{2eb_{SI}q_m}{\hbar} &= \frac{e\mu_0q_m}{h} = n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}\quad (5.1.15)$$

Dies ist die berühmte Dirac Quantisierungsbedingung:

$$\mu_0 q_m = \frac{h}{e} n \quad \text{bzw.} \quad e = \frac{h}{\mu_0 q_m} n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e}{\epsilon_0} = \frac{hc^2}{q_m} n. \quad (5.1.16)$$

Soweit zu Dirac im Jahr 1931. Im nächsten Abschnitt wollen wir eine modernere Darstellung der Dirac Monopole in der Sprache der Differentialformen und der Homotopie von Faserbündeln und insb. Prinzipalbündeln betrachten.

5.1.2 Dirac Monopol - geometrische Darstellung

In 21.1.1 haben wir den Satz von Stokes in Differentialformen-Formulierung bewiesen. Für diese Darstellung muß man den 3-dim. Vektor \vec{B} in eine 2-Form umwandeln. Hierzu verwendet man ganz allgemein in einer m -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M das innere Produkt (11.1.16) eines m -dimensionalen Vektors X mit einer m -dimensionalen Volumenform ω , also exakter formuliert:

Seien $\omega \in \Omega^m(M)$ und $X \in T_p(M)$, dann ist das *innere Produkt* definiert als:

$$\omega = \frac{1}{m!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}, \quad X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X, X_1, \dots, X_{m-1} \in T_p(M),$$

$$i_X : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M), \quad i_X \omega(X_1, \dots, X_{m-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{m-1}) \quad \text{d.h.} \quad (5.1.17)$$

$$i_X \omega = \frac{1}{(m-1)!} X^\mu \omega_{\mu\mu_2 \dots \mu_m} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}. \quad (5.1.18)$$

Wenn die Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik g ist, dann ist das invariante Volumenelement:

$$\omega_M := \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Im \mathbb{R}^3 können wir also vom 3-dim. Vektor \vec{B} zu einer 2-dim. Form B übergehen durch:

$$\begin{aligned} B &:= i_{\vec{B}} \omega_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{|g_{det}|} (B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2) \\ &:= (B_{23} dx^2 \wedge dx^3 + B_{31} dx^3 \wedge dx^1 + B_{12} dx^1 \wedge dx^2) \quad . \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Mit Differentialformen schreibt sich der obige Satz von Stokes (5.1.3) jetzt als:

$$\int_V dB = \int_S B = 4\pi b_{SI} q_m = \mu_0 q_m. \quad (5.1.20)$$

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^m(M)$ heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$ ist, und sie heißt exakt, wenn es eine Differentialform $\alpha \in \Omega^{m-1}(M)$ gibt mit $\omega = d\alpha$.

Jede exakte Form $\omega = d\alpha$ ist auch geschlossen wegen $d\omega = dd\alpha = 0$. Wenn es nun für die 2-Form B ein globales Potential A mit $B = dA$ gäbe, dann wäre

$$\int_V dB = \int_V ddA = 0. \quad (5.1.21)$$

Also kann es für den Dirac-Monopol kein globales Potential A mit $B = dA$ geben.

Der umgekehrte Schluß, daß nämlich eine geschlossene Form auch eine exakte Form sein kann gilt nicht in Allgemeinheit, sondern nur unter zusätzlichen Voraussetzungen. Dies ist der Inhalt des bekannten Lemmas von Poincaré, das wir im Anhang bewiesen haben (15.4) und hier nur zitieren:

Satz 5.1.3 (Lemma von Poincaré) *Wenn eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension m eine sternförmige lokale Koordinaten-Umgebung U hat, die sich stetig auf einen Punkt $x_0 \in M$ zusammenziehen läßt, dann ist jede geschlossene Form auch eine exakte Form.*

Beim Dirac Monopol haben wir im Ursprung einen Pol und damit eine Unstetigkeitsstelle. Also kann es kein Potential geben, das diesen Pol enthält. Wenn wir den Ursprung aus unserer Raumdefinition herausnehmen, also $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, dann ist M homotop äquivalent zu S^2 .

Die Maxwell Theorie des Elektromagnetismus wird heute als eine $U(1)$ Eichtheorie beschrieben. Die mathematische Struktur einer Eichtheorie ist ein Prinzipalbündel (siehe 30.4), und dieses ist ein Spezialfall eines Faserbündels (siehe 30.2). Zur Übersicht und Klärung unserer Bezeichnungen wiederholen wir die folgende Graphik zu Prinzipalbündeln:

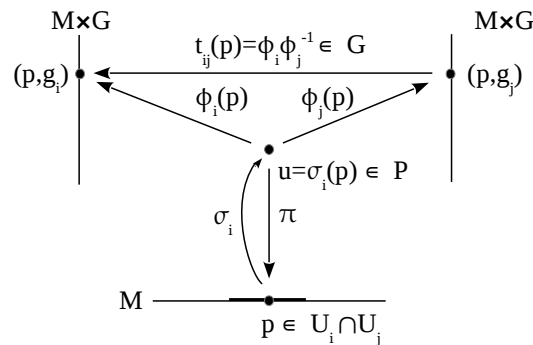


Abbildung 5.1: Prinzipalbündel (P, M, π, G, G) , bzw. $P \xrightarrow{\pi} M$

Struktur von Prinzipalbündeln:

1. die differenzierbare Mannigfaltigkeit P als der Totalraum,
2. die differenzierbare Mannigfaltigkeit M als die Basis,
3. eine differenzierbare Lie-Gruppe (als Mannigfaltigkeit) als die Faser G ,

4. die Projektion π , eine surjektive Abbildung $\pi : P \rightarrow M$, welche die lokale Produkttopologie definiert:
 $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = P_p \cong G$, d.h. das Urbild von p , die sog. Faser über p , sei also homöomorph zu G . Lokal ist also $P_p \cong p \times G$, und dies soll auch für eine offene Umgebung U von $p \in M$ gelten, d.h. $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$,
5. eine offene Überdeckung von M mit sog. Karten U_i , $M = \bigcup_i U_i$, mit Diffeomorphismen $\phi_i : P_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$, die lokale Trivialisierungen genannt werden,
6. eine Menge von Diffeomorphismen, genannt Kartenwechsel,
 $t_{ij} := \phi_i \phi_j^{-1} : U_j \times G \rightarrow U_i \times G$, welche den Übergang zwischen zwei überlappenden Trivialisierungen $U_i \times G$ und $U_j \times G$ beschreiben. Dabei sollen die Kartenwechsel Elemente der obigen Lie-Gruppe G sein, genannt Strukturgruppe, die von links auf die Faser wirkt, d.h. $\phi_j^{-1}(p, f_j) = \phi_i^{-1}(p, t_{ij} f_j)$.
 Mit $t_{ij} \in G$ folgt: $t_{ii}(p) = e$ (Identität), $t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p)$ und $t_{ij}(p) t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$.

In der Riemannschen Geometrie hat man über den *affinen Zusammenhang* (oder *Koszul-Zusammenhang*) eine Verbindung zwischen den Tangentialräumen $T_p M$ und $T_{p+\epsilon} M$ hergestellt und konnte so eine *kovariante Ableitung* definieren. Diesen Gedanken hat Ehresmann für allgemeine Faserbündel erweitert. Bei einem Prinzipalbündel kann man einen globalen Zusammenhang als eine differenzierbare \mathfrak{g} -wertige 1-Form $\omega : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \cong V_u P$ definieren. Hierbei ist \mathfrak{g} die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G und $V_u P$ ist der vertikale Teilraum von $T_u P$, d.h. die Menge aller Vektoren aus $T_u P$, die tangential zur Faser $\pi^{-1}(p)$ durch $u \in P$ sind. Physiker arbeiten im allgemeinen nicht mit globalen Zusammenhangsformen, sondern mit lokalen Zusammenhangsformen, die auf lokalen Karten definiert sind. Seien M der Minkowski-Raum, und wie üblich $c = 1$, und unsere Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale \mathfrak{g} -wertige Zusammenhang 1-Form sei dann $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ und die lokale Krümmungs 2-Form $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$. Die Physiker sprechen hier vom Eichpotential oder Yang-Mills Potential \mathcal{A} und von der Feldstärke \mathcal{F} . Häufig werden in der Physik anstelle von \mathcal{A} und \mathcal{F} auch das Eichpotential A und der Feldstärketensor F verwendet, die sich von \mathcal{A} und \mathcal{F} gerade um den Lie-Algebra-Faktor i unterscheiden:

$$\mathcal{A} =: iA \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} =: iF_{\mu\nu} . \quad (5.1.22)$$

Da die Lie-Gruppe $U(1)$ abelsch ist folgt aus 30.4.20 unmittelbar:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = d\mathcal{A} = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \otimes dx^\nu . \quad (5.1.23)$$

Jetzt führt man analog zu Dirac auf der Mannigfaltigkeit $M = S^2$ zwei Karten ein:

$$U_N := \{(\vartheta, \varphi) | 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon, 0 \leq \varphi < 2\pi\} , \quad (5.1.24)$$

$$U_S := \{(\vartheta, \varphi) | \frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} . \quad (5.1.25)$$

Der Äquator $U_N \cap U_S$ definiert einen Kreis S^1 . Dort können wir mit einer Funktion $t_{NS} : S^1 \rightarrow U(1)$ einen Kartenwechsel vornehmen:

$$t_{NS}(\varphi) := e^{i\bar{\Lambda}(\varphi)} \quad \text{mit einer Funktion } \bar{\Lambda} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.1.26)$$

Damit wir mit $\bar{\Lambda}$ eine Eichtransformation der Schrödingergleichung erhalten fügen wir noch die entsprechenden physikalischen Natur-Konstanten ein (5.1.14):

$$\bar{\Lambda}(\varphi) =: \frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi) \quad \Rightarrow \quad t_{NS}(\varphi) = e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi)} \quad \text{mit einer Funktion } \frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.1.27)$$

Diese Kartenwechsel-Funktionen t_{NS} auf dem Kreis werden klassifiziert nach der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1) = \pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}$, siehe 18.3.12 im Kapitel Homotopie 18. Das heißt, daß t_{NS} bei einer Umrundung des Äquators die beiden Karten 0, 1, oder n mal verdreht.

Für die Eichpotentiale $\mathcal{A} =: iA$ nehmen wir die obigen Ergebnisse aus 5.1.11 und 5.1.12 mit $r = 1$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und ergänzen diese Formeln um ein $d\varphi$, um eine 1-Form auf S^1 zu erhalten:

$$\mathcal{A}_N = iA_N = ib_{SI}q_m d\varphi, \quad \mathcal{A}_S = iA_S = -ib_{SI}q_m d\varphi. \quad (5.1.28)$$

Diese beiden Eichpotentiale sind über die Kartenwechselfunktion $t_{NS}(\varphi)$ verknüpft (30.4.8)

$$\mathcal{A}_N = t_{NS}^{-1} \mathcal{A}_S t_{NS} + t_{NS}^{-1} dt_{NS} \quad (5.1.29)$$

$$= e^{-i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi)} \mathcal{A}_S e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi)} + e^{-i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi)} e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda(\varphi)} i \frac{e}{\hbar} d\Lambda = \mathcal{A}_S + i \frac{e}{\hbar} d\Lambda \quad \Rightarrow$$

$$d\Lambda = -i \frac{\hbar}{e} (\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = -i \frac{\hbar}{e} (2ib_{SI}q_m d\varphi) = \frac{\hbar}{e} 2b_{SI}q_m d\varphi. \quad (5.1.30)$$

Nun läuft φ von 0 bis 2π und damit folgt für die Änderung von Λ :

$$\frac{e}{\hbar} \Delta\Lambda = \frac{e}{\hbar} \int_0^{2\pi} 2b_{SI}q_m d\varphi = \frac{e}{\hbar} \mu_0 q_m.$$

Dieses $\frac{e}{\hbar} \Delta\Lambda$ muß ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, damit t_{NS} eindeutig definiert ist, also muß gelten:

$$\frac{e}{\hbar} \Delta\Lambda = \frac{e}{\hbar} \mu_0 q_m = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \mu_0 q_m = \frac{h}{e} n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (5.1.31)$$

Das ist gerade die Diracsche Quantisierung-Bedingung 5.1.15.

5.2 Aharonow-Bohm Effekt

5.2.1 David J. Bohm (1917-1992)

David Bohm wurde in Wilkes-Barre in Pennsylvania, USA geboren. Seine Eltern waren jüdische Emigranten, der Vater kam aus Ungarn, die Mutter aus Litauen. David Bohm wurde jüdisch-orthodox erzogen, wandte sich aber schon in jungen Jahren dem Agnostizismus zu. Er graduierte 1939 in Physik am Pennsylvania State College (der heutigen Pennsylvania State University) und setzte sein Studium am California Institute of Technology (Caltech) bei Robert Oppenheimer fort. Als dieser an die University of California nach Berkeley an das dortige Lawrence Radiation Laboratory wechselte, folgte ihm Bohm und wurde dort im Jahr 1943 promoviert. Als Postgraduierte in Berkeley entwickelte er eine Theorie von Plasmen und beschrieb das heute Bohm-Diffusion von Elektronen genannte Phänomen in einem Plasma. Als Pazifist und Kommunist nahm er im Gegensatz zu Oppenheimer nicht direkt am Manhattan-US-Atombombenprojekt teil, aber arbeitete indirekt bei der Urananreicherung in Oak Ridge an diesem Projekt mit.

Nach dem Zweiten Weltkrieg im Jahr 1946 fand Bohm eine Stelle als Assistenz-Professor an der Princeton University und hatte dort regelmäßigen Kontakt und Austausch mit Albert Einstein. Im Jahr 1949 weigerte er sich vor dem von McCarthy initiierten Komitee für unamerikanische Umtriebe auszusagen und Freunde und Kollegen zu denunzieren. Daraufhin wurde er 1950 verhaftet, von der Princeton University entlassen, aber 1951 gerichtlich freigesprochen. Dennoch fand er in den USA keine angemessene Stelle. Auf Empfehlung von Oppenheimer und Einstein erhielt Bohm dann eine Professur an der Universität von São Paulo in Brasilien. Es folgten 1955 zwei Jahre am Technion (Israel Institute of Technology) in Haifa, 1957 vier Jahre als Forscher an der University of Bristol und ab 1961 bis zu seiner Emeritierung 1987 eine Professur am Birkbeck College der Universität London.

In Brasilien begann Bohm über Alternativen zur Kopenhagener Interpretation der Quantentheorie (QT) nachzudenken. Er folgte einem früheren Gedanken von De Broglie um eine deterministische und nichtlokale QT-Theorie zu entwickeln, die sog. De Broglie-Bohm Theorie. Weil diese Theorie eine Pilotwelle benützt spricht man manchmal auch von der Pilotwellen-Theorie, oder allgemeiner von einer Theorie mit verborgenen



Abbildung 5.2: D. Bohm
unbekannt, PD.

[http://en.wikipedia.org/wiki/David_Bohm]

Variablen. Bohms Absicht war es nicht eine klassische Theorie an die Stelle der QT zu setzen, sondern darauf hinzuweisen, daß auf einer tiefer liegenden physikalischen Ebene stochastische Prozesse ablaufen könnten, welche die QT-Meßergebnisse determinieren. In ihren Vorhersagen stimmt diese Theorie vollständig mit der gewöhnlichen nichtrelativistischen Quantenmechanik (QT) überein.

Wegen der Nichtlokalität dieser Theorie ergeben sich aber natürlich sofort Probleme bei relativistischen Verallgemeinerungen. Bohm hat 1953 einen ersten Vorschlag für eine Einteilchen-Bohm-Dirac-Gleichung gemacht, die sich aber nicht auf Vielteilchen-Systeme erweitern ließ, da sie eine absolute Zeit verwendete. In der Folge haben bis zum heutigen Tag immer wieder andere Physiker versucht diese Gedanken weiter zu verfolgen. Hier sei der deutsche Physiker und Philosoph Hans-Peter Dürr (1929–2014) genannt, dem wesentliche Fortschritte in der Bohm-Theorie zu verdanken sind, z.B. die Erweiterung auf eine Bohmsche relativistische Quantenfeldtheorie (QFT). Inzwischen gibt es Erweiterungen der Bohm-Theorie, die mit QT-Verschränkungen und gekrümmten Raumzeiten kompatibel sind. Bohm, Vigier, Hiley, Valentini und andere haben Erweiterungen vorgestellt, welche stochastische Prozesse möglicher tiefer liegender physikalischer Ebenen, z.B. Fluktuationen von Raumzeit-Quanten, mit einbeziehen.

In jedem Fall führten Einsteins Gedanken über nichtlokale Effekte der QT zur berühmten Arbeit über das sog. Einstein-Podolski-Rosen (EPR) Paradoxon, das Bohm 1957 in Israel zusammen mit seinem Studenten Aharonov in der heute üblichen Form mit Spins reformulierte. Diese Arbeit griff im Jahr 1964 Bell auf und zeigte, daß eine Theorie mit verborgenen Variablen nicht gleichzeitig lokal sein und die QT-Meßergebnisse reproduzieren kann. Die EPR-Experimente von Alain Aspect et al. (1981) haben die Bellschen Ungleichungen bestätigt und gezeigt, daß die QT-Meßergebnisse korrekt sind. Viele Physiker haben daraus den Schluß gezogen, daß die Kopenhagener Interpretation der QT die einzig mögliche Beschreibung der Quantenwelt sei. Aber dieser Schluß ist so natürlich nicht korrekt, da ja die Bohm-Theorie explizit nichtlokal ist. Aus Sicht einer möglichen Quantengravitation als tiefer liegender physikalischer Ebene ist dazu z.B. sehr lesenswert das Buch von Lee Smolin (Smolin (2019)), in welchem er auch die Gedanken von Bohm aus moderner Sicht diskutiert.

Im Jahr 1957 übersiedelte Bohm nach England und publizierte 1959 zusammen mit seinem Doktoranden Aharonov die Arbeit über den sog. Aharonow-Bohm Effekt, einen nichtlokalen topologischen Effekt von Elektronen in Magnetfeldern.

In England wandte er sich philosophischen Fragen zu. Wenn es eine tiefer liegende nichtlokale Ebene der Physik gibt, etwa auf der Skala der Planck-Länge, dann kann die Welt letztlich nur als eine dynamische Einheit beschrieben werden. Alle Elementarteilchen, etc., können dann nur näherungsweise als semi-autonome und quasi-lokale Eigenschaften dieser tieferliegenden Dynamik verstanden werden. Dies war der Inhalt seines 1980 veröffentlichten Buchs *Wholeness and the Implicate Order*, auf deutsch *Die implizite Ordnung. Grundlagen eines dynamischen Holismus*. Diese Vorstellungen übertrug Bohm dann auch auf die menschliche Gesellschaft als ein Vielteilchensystem.

Zusammen mit dem Neurowissenschaftler Pribram veröffentlichte Bohm unter dem Stichwort *Das holographische Gehirn* einige revolutionäre Gedanken zur Funktionswei-

se des Gehirns und des menschlichen Bewußtseins. In dieser Zeit, so etwa ab 1961, befreundete sich Bohm auch mit dem indischen Philosophen und spirituellen Lehrer Jiddu Krishnamurti. 25 Jahre lang trafen sich die beiden immer wieder und publizierten ihre Gespräche in 3 Bänden.

[Quellen: Bohm (2018), en.wikipedia: David_Bohm].

5.2.2 Yakir Aharonov (* 1932)

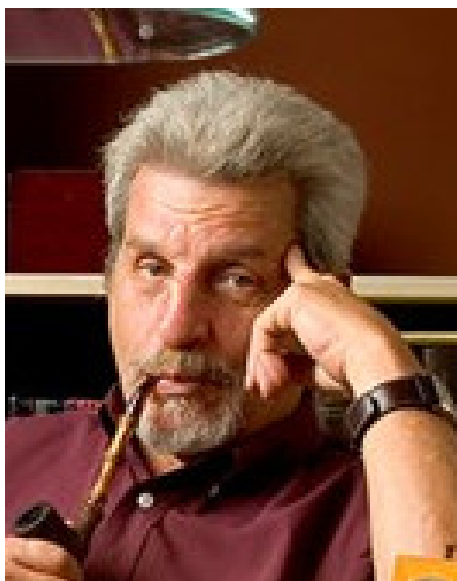


Abbildung 5.3: Y. Aharonov
Ausschnitt, Kobi Kalmanovitz (2006),
CC BY-SA 3.0.
[[http://en.wikipedia.org/wiki/
Yakir_Aharonov](http://en.wikipedia.org/wiki/Yakir_Aharonov)]

Yakir Aharonov wurde in Haifa im von Großbritannien verwalteten Völkerbundsmandat für Palästina geboren. Er studierte Physik am Technion (Israel Institute of Technology) in Haifa, wo er auch seinen Doktorvater David Bohm kennenlernte. Diesem folgte er an die University of Bristol in Großbritannien, wo er 1960 promoviert wurde. Im Jahr 1959 publizierte er zusammen mit seinem Doktorvater David Bohm die Arbeit über den sog. Aharonov-Bohm Effekt, einen nicht-lokalen topologischen Effekt von Elektronen in Magnetfeldern. Im Jahr 1998 erhielt er zusammen mit Michael V. Berry den Wolf-Preis: „... for the discovery of quantum topological and geometrical phases, specifically the Aharonov-Bohm effect, the Berry phase, and their incorporation into many fields of physics.” (Wolf-Foundation (1998))

Als Postdoc verbrachte er ein Jahr an der Brandeis University in Boston, Massachusetts, bevor er von 1961 bis 2006 an der Yeshiva University in New York lehrte und forschte. Da-

nach war er an der George Mason University in Fairfax, Virginia, der Chapman University in Orange, California und dem Perimeter Institute for Theoretical Physics in Waterloo, Ontario, Kanada tätig.

Aharonov interessierte sich Zeit seines Lebens für nichtlokale und topologische Effekte der Quantentheorie (QT) und Quantenfeldtheorie (QFT) und für die Grundfragen der QT. Im Jahr 1984 stellte er zusammen mit Aharon Casher den später so genannten Aharonov-Casher Effekt vor. Dieser Effekt ist in gewisser Weise dual zum Aharonov-Bohm Effekt. Beim Aharonov-Bohm Effekt erfährt die Wellenfunktion eines Teilchens, das an einem abgeschirmten Magnetfeld hinter einem Doppelspalt durch diesen Doppelspalt hindurchläuft eine Phasenverschiebung. Beim Aharonov-Casher Effekt befindet sich hinter dem Doppelspalt ein abgeschirmtes elektisches Feld und die durch den Doppelspalt laufenden Teilchen sind jetzt elektrisch neutrale Teilchen mit einem magnetischen Moment - und wieder wird eine Phasenverschiebung der Wellenfunktion beobachtet.

Im Jahr 1988 stellte Aharonov zusammen mit David Albert und Lev Vaidman den QT-Formalismus der *weak value* vor: seien A eine QT-Observable und $|\psi_i\rangle$ und $|\psi_f\rangle$ definierte Anfangs- und Endzustände des Systems, dann definieren Aharonov et al. den *weak value von A* als:

$$A_w := \frac{\langle \psi_f | A \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} .$$

Es ist klar, daß A_W sehr groß werden kann, wenn die Anfangs- und Endzustände fast orthogonal zueinander sind. Daher gibt es Bemühungen, diese *weak values* für hochempfindliche Quantensensoren zu nutzen. Auch Anwendungen im Feld des Quantum-Computing und der Grundlagen der QT werden diskutiert.

Privat ist Aharonov ein großer Freund des Schachspiels.

[Quelle: en.wikipedia: Yakir_Aharonov].

5.2.3 Aharonov-Bohm Effekt - klassische Darstellung

Aharonov und Bohm haben ihre Arbeit über diesen quantenmechanischen Effekt im Jahr 1959 publiziert. Aber offenbar hatten zuvor andere Physiker schon zuvor mehrfach auf diese Möglichkeit hingewiesen, zuerst wohl Walter Franz im Jahr 1939. Ebenso wie beim Dirac Monopol ist auch hier der topologische Hintergrund eine nicht einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

Wie beim oben beim Dirac Monopol verwenden wir wieder **SI-Einheiten**, statt der hier von Theoretikern häufig verwendeten 'energetischen Einheiten' (zu den diversen physikalischen Einheiten-Systemen siehe speziell Zeidler (2006), S. 934 ff.). Dies soll den Experimental-Physikerinnen und -Physikern unter unseren Lesern als Erleichterung dienen.

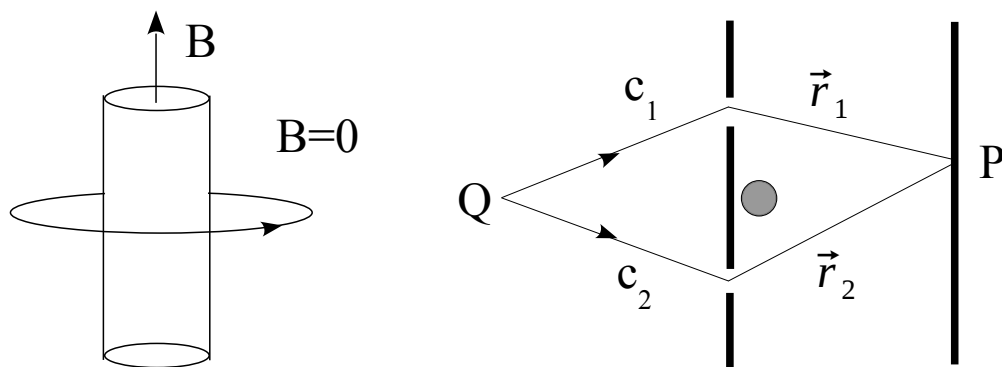


Abbildung 5.4: Aharonov-Bohm Effekt

Die in beiden Zeichnungen abgebildete Spule erzeugt in ihrem Inneren ein Magnetfeld $\vec{B} > 0$ und außerhalb sei das Magnetfeld identisch $\vec{B} = 0$. Nach der klassischen Physik erfährt ein geladenes Teilchen der Ladung q die Lorentz-Kraft

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (5.2.1)$$

also gibt es im feldfreien Raum mit $\vec{E} = 0$ und $\vec{B} = 0$ keine Impulsänderung.

In der Quantentheorie geht aber nicht das Magnetfeld \vec{B} in die Schrödingergleichung ein, sondern das Vektorpotential \vec{A} , und dieses können wir für den oben skizzierten Fall in Zylinderkoordinaten (Wikipedia-Zylinderkoordinaten (2021)) mit dem magnetischen Fluß Φ einfach schreiben als

$$A_\varphi := \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad A_r = 0, \quad A_z = 0, \quad (5.2.2)$$

$$\text{mit } \int_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} A_\varphi r d\varphi = \Phi. \quad (5.2.3)$$

Wie beim Dirac Monopol haben wir bei $r = 0$ eine Singularität in \vec{A} und gleichzeitig verschwindet $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ für $r \neq 0$ ($\vec{\nabla} \times$ in Zylinderkoordinaten siehe Zeidler (2003), S. 377):

$$\begin{aligned} B_\varphi &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0, \\ B_r &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0, \\ B_z &= (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Wir folgen jetzt der schönen Arbeit von Tong (2016) über den Quanten-Hall-Effekt, S. 37, bei einem Gedankenexperiment. Sei ein Elektron mit der Ladung $-e$ in einer kleinen Box eingesperrt. Diese Box habe Ihren Mittelpunkt bei \vec{X} und werde durch ein Potential $V(\vec{x} - \vec{X})$ mit einem undurchdringlichen Potential an den Boxwänden beschrieben. Gleichzeitig möge die Box so klein sein, daß innerhalb das Vektorpotential \vec{A} als konstant angesehen werden kann. Dann gilt für das Elektron in der Box die folgende stationäre Schrödinger-Gleichung:

$$H(\vec{x}, \vec{X})\psi(\vec{x} - \vec{X}) = \left\{ \frac{1}{2m} [-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{X})]^2 + V(\vec{x} - \vec{X}) \right\} \psi(\vec{x} - \vec{X}) = E_0\psi(\vec{x} - \vec{X}). \quad (5.2.5)$$

Sei im Folgenden $\psi(\vec{x} - \vec{X})$ immer die Wellenfunktion des Grundzustands von $H(\vec{x}, \vec{X})$. Nun wollen wir mit unserer Box eine Rundreise um die Singularität, also um die Spule herum machen. Zunächst einmal bewegen wir die Box auf adiabatische Weise nur von \vec{X}_0 nach \vec{X}_1 . Adiabatisch bedeutet hier, daß $\psi(\vec{x} - \vec{X}_1)$ ebenso wie $\psi(\vec{x} - \vec{X}_0)$ die Wellenfunktion des Grundzustands ist. Wir wollen $\vec{A}(\vec{X}_0) = 0$ annehmen, denn mittels einer Eichtransformation können wir das Feld \vec{A} an jedem beliebigen Raumpunkt zum Verschwinden bringen. Nun fragen wir nach der Änderung der Wellenfunktion $\psi(\vec{x} - \vec{X}_0)$ auf dem Weg von \vec{X}_0 nach \vec{X}_1 und finden:

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}_1) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \psi(\vec{x} - \vec{X}_0), \quad (5.2.6)$$

d.h. die Auswirkung der Änderung von $\vec{A}(\vec{X}_0)$ nach $\vec{A}(\vec{X}_1)$ besteht einzig in einer Phasenänderung der Wellenfunktion.

Beweis: Da das Potential $V(\vec{x} - \vec{X}_0)$ bzgl. der bewegten Box fixiert ist gilt bei der Bewegung der Box von \vec{X}_0 nach \vec{X}_1 : $V(\vec{x} - \vec{X}_1) = V(\vec{x} - \vec{X}_0)$ und damit folgt (wie in 5.1.14):

$$\begin{aligned}
& H(\vec{x}, \vec{X}_1)\psi(\vec{x} - \vec{X}_1) \\
&= H(\vec{x}, \vec{X}_1) \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \\
&= \left\{ \frac{1}{2m} [-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{X}_1)]^2 + V(\vec{x} - \vec{X}_1) \right\} \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \\
&= \left\{ \frac{1}{2m} [-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{X}_1)]^2 + V(\vec{x} - \vec{X}_0) \right\} \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \\
&= \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \left\{ \frac{1}{2m} [-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(\vec{X}_0)]^2 + V(\vec{x} - \vec{X}_0) \right\} \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \\
&= \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \int_{\vec{x}=\vec{X}_0}^{\vec{x}=\vec{X}_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] \{E_0\} \psi(\vec{x} - \vec{X}_0). \quad \square
\end{aligned}$$

Um nun Topologie zu betreiben führen wir einen geschlossenen Weg C um die Singularität, also um die Spule herum aus und erhalten den Aharonov-Bohm Phasenfaktor für die Wellenfunktion:

$$e^{i\gamma} = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar} \oint_C \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}\right] = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar}\Phi\right). \quad (5.2.7)$$

Wenn wir jetzt den magnetischen Fluß Φ erhöhen, dann verschwindet das Interferenzmuster immer bei

$$\frac{e}{\hbar}\Phi = 2\pi n \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (5.2.8)$$

Dieses Ergebnis wenden wir jetzt auf das Elektron-Doppelspaltexperiment in der obigen Abbildung rechts an. Seien Q der Ort der Elektronenquelle und c_1 und c_2 die beiden

möglichen Wege für das Elektron durch den Doppelspalt hin zum Punkt P des Detektors. Die am Doppelspalt ankommende Wellenfunktion möge eine ebene Welle sein, so daß die beiden auf den Wegen c_1 und c_2 ankommenden Teilwellen die gleiche Phase haben. Das obige Potential $V(\vec{x})$ wirke in unserer Näherung nur am Doppelspalt und danach möge erneut die potentialfreie Schrödinger-Gleichung die Dynamik bestimmen, so daß wieder die Wellenfunktion eines freien Elektrons vorliege. Damit ergeben sich im Fall von $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ am Detektor für die Wellenfunktion auf den Wegen c_1 und c_2 die bekannten Phasenfaktoren $e^{i\vec{k}\vec{r}_1}$ und $e^{i\vec{k}\vec{r}_2}$ mit $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ und λ der de Broglie-Wellenlänge. Wenn man nun das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x})$ einschaltet, dann erhält man am Punkt P als Differenz der Phasen der Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \delta &:= \vec{k}\vec{r}_1 - \vec{k}\vec{r}_2 + \frac{e}{\hbar} \int_{c_1} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} - \frac{e}{\hbar} \int_{c_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \\ &= \vec{k}\vec{r}_1 - \vec{k}\vec{r}_2 + \frac{e}{\hbar} \oint_{c_1-c_2} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \\ &= \vec{k}\vec{r}_1 - \vec{k}\vec{r}_2 + \frac{e}{\hbar} \Phi . \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Obwohl das Elektron also durch ein Raumgebiet mit $\vec{B} = 0$ fliegt erhalten wir auf dem Schirm ein Interferenzmuster, das vom magnetischen Fluß Φ der Spule abhängt.

5.2.4 Aharonow-Bohm Effekt - geometrische Darstellung

Hier folgen wir Nakahara (2003), S. 403, ff., in unseren Bezeichnungen. Die Maxwell Theorie des Elektromagnetismus wird heute als eine $U(1)$ Eichtheorie beschrieben.

Die mathematische Struktur einer Eichtheorie ist ein Prinzipalbündel (siehe 30.4), und dieses ist ein Spezialfall eines Faserbündels (siehe 30.2). Zur Übersicht und Klärung unserer Bezeichnungen verweisen wir auf die Graphik und Definitionen zu Prinzipalbündeln im Unterkapitel zu den Dirac-Monopolen, siehe 5.1.2.

Physiker arbeiten im allgemeinen nicht mit globalen Zusammenhangsformen, sondern mit lokalen Zusammenhangsformen, die auf lokalen Karten definiert sind. Seien M der Minkowski-Raum, und wie üblich $c = 1$, und unsere Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale \mathfrak{g} -wertige Zusammenhang 1-Form sei dann $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ und die lokale Krümmungs 2-Form $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$. Die Physiker sprechen hier vom Eichpotential oder Yang-Mills Potential \mathcal{A} und von der Feldstärke \mathcal{F} . Häufig werden in der Physik anstelle von \mathcal{A} und \mathcal{F} auch das Eichpotential A und der Feldstärketensor F verwendet, die sich von \mathcal{A} und \mathcal{F} gerade um den Lie-Algebra-Faktor i unterscheiden:

$$\mathcal{A} =: iA \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} =: iF_{\mu\nu} . \quad (5.2.10)$$

Da die Lie-Gruppe $U(1)$ abelsch ist folgt aus 30.4.20 unmittelbar:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}] = d\mathcal{A} = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \otimes dx^\nu . \quad (5.2.11)$$

Eine quantenmechanische Wellenfunktion als Lösung der Schrödingergleichung mit Eichpotential A kann jetzt als ein komplexes Linienbündel beschrieben werden, das einem $U(1)$ -Prinzipalbündel assoziiert ist (siehe 30.5).

Zunächst stellen wir nochmals die notwendigen Begriffe eines Prinzipalbündels mit assoziiertem Vektorbündel zusammen. Das zu einem Prinzipalbündel P assoziierte Vektorbündel ist $E := (P \times_\rho V) / \sim$, das ist die Menge der Äquivalenzklassen von $(P \times_\rho V)$ mit der Äquivalenzrelation $(u, v) \sim (ug, \rho(g^{-1})v)$. Hierbei ist V ein k -dimensionaler Vektorraum und $G = U(1)$ wirkt auf V mittels einer k -dimensionalen Darstellung $\rho(g)$, d.h. $(u, v) \mapsto (ug, \rho(g^{-1})v)$.

Physikalisch gesprochen liegt also folgende Struktur vor:

$$\text{Prinzipalbündel} \times \text{Vektorbündel} \quad \text{mod} \quad \text{Eichtransformationen} .$$

Seien $\gamma(t)$ mit $t \in [0, 1]$ eine Kurve in der Basis-Mannigfaltigkeit M , X ein Tangentialvektor an $\gamma(t)|_{t=0}$, und $\sigma_i : U_i \subset M \rightarrow P$ ein Schnitt im Prinzipalbündel P in der Karte U_i . Sei weiter $\tilde{\gamma}(t)$ ein horizontaler Lift von $\gamma(t)$ in P mit $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_i(\gamma(0)) = g_i(p_0) = e$ wählen kann, wodurch $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))$ wird und $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \sigma_i(p_0) = u_0$ ist.

Jetzt definiert man einen Schnitt $s(\gamma(t))$ im Totalraum $E = (P \times_\rho V) / \sim$ als

$$s(\gamma(t)) := [\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))] .$$

Mit einer orthonormalen Basis $\{e_\alpha^V\}_{\alpha=1, \dots, k}$ im Vektorraum V definiert man einen lokalen Schnitt $e_\alpha(p)$ mit $p \in U_i$ in E :

$$e_\alpha(p) := [\sigma_i(p), e_\alpha^V] \quad \text{mit } p \in U_i .$$

Und daraus folgt für $s(\gamma(t))$:

$$\begin{aligned} s(\gamma(t)) &:= [\sigma_i(\gamma(t)), v_i(\gamma(t))] = [\sigma_i(\gamma(t)), v_i^\alpha(\gamma(t))e_\alpha^V] \\ &= v_i^\alpha(\gamma(t))[\sigma_i(\gamma(t)), e_\alpha^V] = v_i^\alpha(\gamma(t)) e_\alpha(\gamma(t)) , \end{aligned}$$

Für die kovariante Ableitung ∇_X mit $X = \partial_\mu$ von $s(\gamma(t))$ hatten wir in 30.5.12 gefunden:

$$\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial v_i^\alpha(\gamma(t))}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \rho(T_\beta) \right\} |_{t=0} e_\alpha(\gamma(0)) .$$

Hierbei wurden die k -dimensionalen Darstellungen $\rho(\mathcal{A}_i)$ der \mathfrak{g} -wertigen 1-Formen \mathcal{A}_i nach den Generatoren T_β der Lie-Algebra \mathfrak{g} entwickelt.

In unserem $U(1)$ -Beispiel zum Aharonov-Bohm Effekt reduziert sich der obige allgemeine Ansatz beträchtlich. Die komplexe Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ der Schrödingergleichung wird als 1-dimensionaler Vektorraum \mathbb{C} betrachtet, auf den die Lie-Gruppe $G = U(1)$

mittels einer 1-dimensionalen Darstellung $\rho(g)$ wirkt. Die Struktur ist also ein $U(1)$ -Prinzipalbündel mit assoziiertem komplexen 1-dimensionalen Linienbündel. Damit erhalten wir für die kovariante Ableitung auf der Karte U_i :

$$\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial \psi_i(\gamma(t))}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i,\mu} \right\} |_{t=0} e_\alpha(\gamma(0)) .$$

Jetzt wählen wir für den Weg $\gamma(\varphi)$ den Einheitskreis S^1 und schreiben daher statt $\gamma(\varphi)$ nur noch φ . Für $\mathcal{A} = iA$ wählen wir wieder das Aharonov-Bohm Vektorpotential $\bar{\mathcal{A}}_\varphi = \frac{e}{\hbar} \mathcal{A}_\varphi = i \frac{e}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi}$, wobei wir wieder den physikalischen Faktor $\frac{e}{\hbar}$ eingefügt haben, um den Anschluß an die Schrödingergleichung zu erhalten. Sei jetzt $X = \partial_\varphi$, dann folgt mit $t = x^1 = \varphi$, $x^2 = x^3 = 0$ für die kovariante Ableitung:

$$\nabla_{\partial_\varphi} s(\varphi)|_{\varphi=0} = \left\{ \frac{\partial \psi_i(\varphi)}{\partial \varphi} + i \frac{e}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right\} |_{\varphi=0} e_\alpha(\varphi=0) .$$

Wenn wir jetzt unsere Wellenfunktion $\psi(\varphi)$ auf dem Einheitskreis S^1 parallel verschieben, dann ist die Bedingung dafür $\nabla_{\partial_\varphi} s(\varphi)|_{\varphi=0} \stackrel{!}{=} 0$ und das bedeutet:

$$\left\{ \frac{\partial \psi_i(\varphi)}{\partial \varphi} + i \frac{e}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \right\} |_{\varphi=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_i(\varphi) = e^{-i \frac{e}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \varphi} .$$

Die Holonomie für einen vollen Umlauf auf S^1 ergibt also wieder

$$\psi_i(2\pi) = e^{-i \frac{e}{\hbar} \Phi} . \tag{5.2.12}$$

5.3 Berry Phase und Holonomie

5.3.1 Michael V. Berry (* 1941)

Berry ist ein englischer mathematischer Physiker. Er studierte ab 1959 an den Universitäten von Exeter und St Andrews. Ab 1965 arbeitete Berry an der University of Bristol, ab 1979 als Professor.

Im Jahr 1984 veröffentlichte Berry seine berühmte Arbeit "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes" (Berry (1984)) und bei einem Gespräch von Berry mit Simon erkannte dieser sofort den Zusammenhang der *Berry Phase* mit der *Holonomie eines hermiteschen Linienbündels* und den *Chern-Klassen* (Simon (1983)). Diese beiden Veröffentlichungen waren der Beginn einer stürmischen Entwicklung der Anwendung topologischer Methoden in der Quantentheorie. Viele der wichtigsten Originalarbeiten dieser Anfangsjahre bis zum Jahr 1989 werden als *Reprints* in dem Buch der Herausgeber Shapere u. Wilczek (1989) dokumentiert.

Darüber hinaus hat Berry intensiv auf den Gebieten der semiklassische Quantenmechanik und dem Quantenchaos gearbeitet. Er hat im Laufe seines Lebens sehr viele Publikationen veröffentlicht und wurde mit zahlreichen Ehrungen und Preisen gewürdigt. So erhielt er im Jahr 1990 den Dirac Preis und die Dirac-Medaille des britischen Institute of Physics und 1998 zusammen mit Yakir Aharonov den Wolf-Preis: „... for the discovery of quantum topological and geometrical phases, specifically the Aharonov-Bohm effect, the Berry phase, and their incorporation into many fields of physics.“ (Wolf-Foundation (1998))

Ausgehend von seinen Untersuchungen zum Quantenchaos versuchte er auch die Riemannsche Vermutung über die Riemannsche ζ -Funktion zu beweisen - aber bis heute vergeblich :-)

[Quelle: en.wikipedia: Michael_Berry]



Abbildung 5.5: Michael Berry
 Vahram Mekhitarian,
 (Eriwan, Armenien, 2014)
 CC BY-SA 4.0.
 [http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Berry]

5.3.2 Barry M. Simon (* 1946)

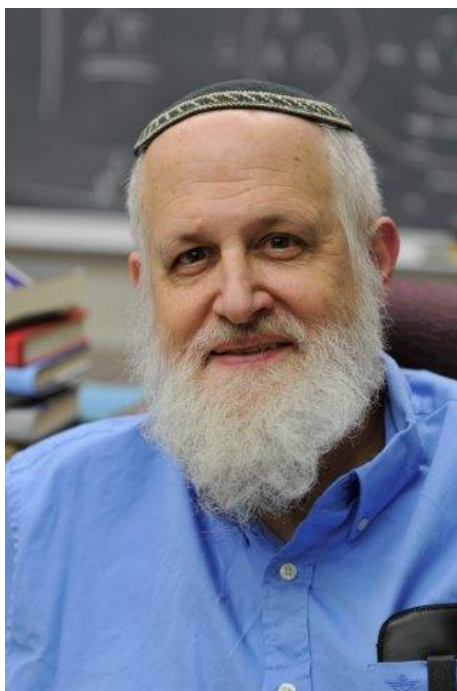


Abbildung 5.6: Barry Simon
Bsimonva (2015), CC BY-SA 4.0.
[[http://en.wikipedia.org/wiki/
Barry_Simon](http://en.wikipedia.org/wiki/Barry_Simon)]

Barry Simon ist ein außergewöhnlicher US-amerikanischer mathematischer Physiker. Bereits als Schüler besuchte er Kurse für Hochbegabte an der Columbia University. 1962 begann er sein Studium der Mathematik und Physik in Harvard und machte 1966 dort seinen Abschluss. Im Jahr 1970 wurde er an der Princeton University bei Wightman mit einer Arbeit über *Quantum mechanics for Hamiltonians defined as quadratic forms* promoviert. Danach blieb Simon viele Jahre als Professor in Princeton. Das berühmte Princeton-Team Bargman, Dyson, Lieb, Simon und Wightman machte Princeton zu einem Zentrum der mathematischen Physik. 1980 ging Simon ans Caltech, wo er bis zu seiner Emeritierung 2016 forschte und lehrte.

Simon hat über 300 Arbeiten aus einem sehr breiten Bereich der mathematischen Physik und der Funktionalanalysis publiziert. Das vierbändige Lehrbuch der mathematischen Physik von Barry Simon zusammen mit Michael C. Reed (Reed u. Simon (1980)), war für viele mathematische Physiker der 1970'er und 1980'er Jahre *die Standardreferenz*:

- Band 1: Functional Analysis.
- Band 2: Fourier Analysis, Self-Adjointness.
- Band 3: Scattering Theory.
- Band 4: Analysis of Operators.

Sein schnelles Auffassungsvermögen und tiefgründiges Verstehen waren legendär: so erkannte er z.B. direkt im Gespräch mit Michael Berry den topologischen Hintergrund der von Berry berichteten *mysteriösen* Phasenverschiebung der quantenmechanischen Wellenfunktion. Und besser als in manch anderem Hinweis spiegelt sich die außergewöhnliche Begabung von Simon und seine Freude an der mathematischen Physik in den berühmten 15 ungelösten Problemen, die er 1984 vortrug und im Jahr 2000 aktualisierte, da einige Probleme inzwischen tatsächlich Lösungen gefunden hatten: Wikipedia-Simon-Probleme (2021).

Simon erhielt zahlreiche Preise und Ehrungen. Die bedeutendsten Preise waren 2012 der Henri-Poincaré-Preis und 2015 der Bolyai-Preis.

[Quelle: en.wikipedia: Barry_Simon]

Achtung: der hier vorgestellte mathematische Physiker Barry Simon ist nicht zu verwechseln mit dem mathematischen Physiker Jim Simons, von dem die Chern-Simons-Theorie stammt und der später einer der erfolgreichsten Hedgefond-Manager der Wallstreet wurde. Mit seinem vielen an der Börse verdienten Geld wurde er ein außergewöhnlicher Philantrop und förderte mit Hilfe seiner Simons-Foundation insb. die Forschungen in Mathematik, Physik und über Autismus. Die Simons-Foundation gibt auch das berühmte Quanta-Magazine zu aktuellen Entwicklungen in Physik, Mathematik, Biologie and Computerwissenschaften heraus (Wikipedia-Quanta_Magazine (2021)).

5.3.3 Ein quantenmechanisches Adiabaththeorem

Adiabatische Prozesse sind allen Physikern aus der Thermodynamik bekannt. Sie bezeichnen Zustandsänderungen ohne Energieaustausch. Diese ereignen sich üblicherweise, wenn in einem System Prozesse ablaufen, die sehr viel 'schneller' wirken als der Wärmeaustausch. Zum Beispiel ist eine Druckwelle in einem Gas sehr viel 'schneller' als eine Wärmewelle, und ist damit adiabatisch.

In der Quantenmechanik dagegen definiert man adiabatische Prozesse für Systeme mit diskretem und nichtentarteten Spektrum als 'quasistatische' Prozesse, bei welchen das System in seinem Eigenzustand verbleibt.

Bereits im Jahr 1928 haben Born und Fock einen ersten quantenmechanischen Adiabathensatz formuliert und bewiesen (Born u. Fock (1928)). Born und Fock setzen explizit voraus, daß das Spektrum des Hamilton-Operators \hat{H} der Schrödinger-Gleichung diskret ist und die Eigenwerte nicht entartet sind - bis auf eventuell zufällige Entartungen beim Kreuzen von Bändern. Weiter sei die explizite Zeitabhängigkeit von $\hat{H} = \hat{H}(\vec{R}(t))$ durch einen Satz äußerer Parameter $\vec{R}(t)$ gegeben, die sich 'hinreichend langsam' ändern, so daß das System in seinem anfänglichen Zustand verbleibt, modulo einer zeitabhängigen Phase.

$$\hat{H}(\vec{R}(t)) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle . \quad (5.3.1)$$

Später hat Kato (1950) den Born-Fock Beweis präzisiert und erweitert.

Wir stützen uns in diesem Unterkapitel auf den Beweis im englischen Wikipedia-Beitrag Wikipedia-Adiabatic-theorem (2021). Dieser Beweis ist ebenso schön, wie auch nicht-trivial, so daß er hier ausführlich dargestellt werden soll :-)

Vorab beweisen wir noch ein nützliches Lemma aus der Theorie der Integralgleichungen, die Grönwall-Ungleichung (Wikipedia-Grönwall_Ungleichung (2021)).

Lemma 5.3.1 (Grönwall-Integral-Ungleichung) *Seien $I = [a, b] \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha, A, u : I \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige stetige Funktionen in I . Weiter gelte in I die folgende*

Integral-Ungleichung

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t A(s)u(s)ds, \quad (5.3.2)$$

dann folgt daraus die Ungleichung:

$$u(t) = \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)A(s) \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) ds. \quad (5.3.3)$$

Und wenn zusätzlich $\alpha(t)$ nicht abnehmend ist, dann gilt sogar:

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t A(s)ds\right). \quad (5.3.4)$$

Beweis: Wir beginnen mit der Definition einer Hilfsfunktion $v(s)$:

$$\begin{aligned} v(s) &:= \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right) \int_a^s A(r)u(r)dr \quad \Rightarrow \\ v'(s) &= -A(s) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right) \int_a^s A(r)u(r)dr + \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right) A(s)u(s) \\ &= \left[u(s) - \int_a^s A(r)u(r)dr \right] A(s) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung 5.3.2 gilt für die erste Klammer $[\dots] \leq \alpha(s)$ und damit

$$v'(s) \leq \alpha(s)A(s) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right).$$

Mit $v(a) = 0$ kann man diese Gleichung integrieren:

$$v(t) \leq \int_a^t \left(\alpha(s)A(s) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right) \right) ds.$$

Aus der Definition von $v(s)$ folgt (jetzt mit t statt mit s)

$$\int_a^t A(r)u(r)dr = \exp\left(\int_a^t A(r)dr\right) v(t)$$

und nun setzt man hier die Ungleichung für $v(t)$ ein und erhält

$$\begin{aligned}
 \int_a^t A(r)u(r)dr &\leq \exp\left(\int_a^t A(r)dr\right) \int_a^t \left(\alpha(s)A(s) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right)\right) ds \\
 &= \int_a^t \left(\alpha(s)A(s) \exp\left(\int_a^t A(r)dr\right) \exp\left(-\int_a^s A(r)dr\right)\right) ds \\
 &= \int_a^t \alpha(s)A(s) \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) ds .
 \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung 5.3.2 folgt 5.3.3:

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t A(s)u(s)ds = \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)A(s) \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) ds .$$

Wenn nun zusätzlich $\alpha(t)$ nicht abnehmend ist, d.h. $s \leq t \Rightarrow \alpha(s) \leq \alpha(t)$, dann folgt mit $\int_a^t f'(s)ds = f(s)|_{s=a}^{s=t}$:

$$\begin{aligned}
 u(t) &\leq \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t A(s) \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right) ds \\
 &= \alpha(t) + \alpha(t) \int_a^t A(s) \exp\left(-\int_t^s A(r)dr\right) ds \\
 &= \alpha(t) - \alpha(t) \exp\left(-\int_t^s A(r)dr\right)|_{s=a}^{s=t} \\
 &= \alpha(t) - \alpha(t) \exp\left(\int_s^t A(r)dr\right)|_{s=a}^{s=t} \\
 &= \alpha(t) - \alpha(t) + \alpha(t) \exp\left(\int_a^t A(r)dr\right) \\
 &= \alpha(t) \exp\left(\int_a^t A(r)dr\right) .
 \end{aligned}$$

□

Damit ist 5.3.4 bewiesen.

Satz 5.3.3 Sei T eine 'makroskopische Zeit', also groß gegenüber den inneren Zeitskalen der ungestörten Quantendynamik. Wir nehmen an, daß sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im n . Eigenzustand befindet:

$$|\psi(0)\rangle = |n, \vec{R}(0)\rangle \quad \text{mit} \quad \hat{H}(\vec{R}(0)) |n, \vec{R}(0)\rangle = E_n(\vec{R}(0)) |n, \vec{R}(0)\rangle . \quad (5.3.5)$$

Wir setzen voraus, daß die zeitabhängige Schrödingergleichung zu jedem Zeitpunkt zum Energie-Eigenwert E_n eine quasistationäre Lösung $|n, \vec{R}(t)\rangle$ hat und fragen nach dem Zusammenhang zwischen $|n, \vec{R}(0)\rangle$ und $|n, \vec{R}(T)\rangle$ für $T \rightarrow \infty$. Unter diesen Voraussetzungen ist $|\psi(n, \vec{R}(t))\rangle_{\text{adiab.}}$ eine Näherungslösung für das exakte $|\psi(t)\rangle$ und es gilt:

$$|\psi(n, \vec{R}(t))\rangle_{\text{adiab.}} := e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |n, \vec{R}(t)\rangle . \quad (5.3.6)$$

Hierbei bezeichnet $\theta_n(t)$ die quantenmechanische Phase und $\gamma_n(t)$ die sog. Berry-Phase. Beide Phasenfaktoren sind reell.

$$\theta_n(t) := -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' , \quad (5.3.7)$$

$$\gamma_n(t) := i \int_0^t \langle n, \vec{R}(T) | \partial_{t'} |n, \vec{R}(T)\rangle dt' \quad (5.3.8)$$

$$= i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} \langle n, \vec{R}(T) | \nabla_{\vec{R}} |n, \vec{R}(T)\rangle d\vec{R} . \quad (5.3.9)$$

Dann ist $|\psi(n, \vec{R}(t))\rangle_{\text{adiab.}}$ eine Näherungslösung für $|\psi(t)\rangle$ mit einer Abweichung in der Größenordnung $o(\frac{1}{T})$, wenn o das Landausche 'Klein-o' Symbol ist:

$$\| |\psi(t)\rangle - |\psi(n, \vec{R}(t))\rangle_{\text{adiab.}} \| = o\left(\frac{1}{T}\right) . \quad (5.3.10)$$

Beweis: Als erstes soll $\gamma_n(t) \in \mathbb{R}$ gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\gamma_n(t)) &= \frac{1}{2} [\gamma_n(t) - \gamma_n^*(t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[i \int_0^t \langle \psi_n(t') | \partial_{t'} \psi_n(t') \rangle dt' - (-i) \int_0^t \langle \partial_{t'} \psi_n(t') | \psi_n(t') \rangle dt' \right] \\ &= \frac{i}{2} \int_0^t \partial_{t'} \langle \psi_n(t') | \psi_n(t') \rangle dt' = \frac{i}{2} \int_0^t \partial_{t'} (1) dt' = 0 . \end{aligned}$$

Um den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ mathematisch einfacher zu gestalten betrachtet man die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit der relativen Zeit $\lambda := \frac{t}{T}$:

$$\begin{aligned}\hat{H}\left(\frac{t}{T}\right) |\tilde{\psi}(t)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad \text{bzw.} \\ \hat{H}(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{T \partial \lambda} |\psi(\lambda)\rangle \quad \text{mit } \lambda := \frac{t}{T} \in [0, 1].\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

Zu jedem Zeitpunkt λ kann man die stationäre Schrödinger-Gleichung lösen:

$$\hat{H}(\vec{R}(\lambda)) |n, R(\lambda)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{T \partial \lambda} |n, \vec{R}(\lambda)\rangle = E_n(\vec{R}(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle \quad \Rightarrow \quad (5.3.12)$$

$$|n, \vec{R}(\lambda)\rangle = |n, \vec{R}(0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} T \int_0^\lambda E_n(\lambda') d\lambda'} = |n, \vec{R}(0)\rangle e^{iT\theta_n(\lambda)}. \quad (5.3.13)$$

Die Eigenvektoren $|n, \vec{R}(\lambda)\rangle$ stellen zum Zeitpunkt λ eine vollständige Orthonormal-Basis dar. Also kann man $|\psi(\lambda)\rangle$ nach dieser Basis entwickeln:

$$|\psi(\lambda)\rangle := \sum_n c_n(\lambda) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle e^{iT\theta_n(\lambda)}. \quad (5.3.14)$$

Daß man hier den Faktor der quantenmechanischen Phase $\theta_n(\lambda)$ mit in diese Definition hinein nimmt ist nur eine Konvention. Jetzt setzt man dieses $|\psi(\lambda)\rangle$ in die stationäre Schrödingergleichung 5.3.12 ein und erhält:

$$\begin{aligned}& i\hbar \sum_n [(\partial_\lambda c_n(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle + c_n(\lambda) \partial_\lambda |n, \vec{R}(\lambda)\rangle + iT(\partial_\lambda \theta_n(\lambda)) c_n(\lambda) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle] e^{iT\theta_n(\lambda)} \\ &= i\hbar \sum_n [(\partial_\lambda c_n(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle + c_n(\lambda) \partial_\lambda |n, \vec{R}(\lambda)\rangle + iT\left(-\frac{1}{\hbar} E_n(\lambda)\right) c_n(\lambda) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle] e^{iT\theta_n(\lambda)} \\ &= T \sum_n c_n E_n(\vec{R}(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle e^{iT\theta_n(\lambda)} \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$i\hbar \sum_n [(\partial_\lambda c_n(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle + c_n(\lambda) \partial_\lambda |n, \vec{R}(\lambda)\rangle] e^{iT\theta_n(\lambda)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle m, \vec{R}(\lambda) | \sum_n [(\partial_\lambda c_n(\lambda)) |n, \vec{R}(\lambda)\rangle e^{iT\theta_n(\lambda)} = -\langle m, \vec{R}(\lambda) | \sum_n c_n(\lambda) \partial_\lambda |n, \vec{R}(\lambda)\rangle e^{iT\theta_n(\lambda)} \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\lambda c_m(\lambda) = - \sum_n c_n(\lambda) \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda |n, \vec{R}(\lambda)\rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))}. \quad (5.3.15)$$

Man sieht, daß die Exponentialfunktion auf der rechten Seite für $T \rightarrow \infty$ immer schneller oszilliert und damit vielleicht alle Terme auf der rechten Seite mit Ausnahme von $\theta_m(\lambda) = \theta_n(\lambda)$, d.h. $E_m(\lambda) = E_n(\lambda)$ unterdrücken wird. Diese Vermutung soll jetzt exakt gezeigt werden.

Zunächst soll aus der Summe in 5.3.15 der Term mit $m = n$ herausgenommen werden und vom Rest gezeigt werden, daß dieser für $T \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Wir führen dazu die folgende Funktion

$$d_m(\lambda) := c_m(\lambda) e^{-i\gamma_m(\lambda)}$$

ein und zeigen, daß $\partial_\lambda d_m(\lambda)$ gerade die Summe in 5.3.15 ohne den $m = n$ Term ist.

$$\begin{aligned} \partial_\lambda d_m(\lambda) &= \partial_\lambda (c_m(\lambda) e^{-i\gamma_m}) \\ &= (\partial_\lambda c_m(\lambda)) e^{-i\gamma_m} + c_m(\lambda) (-i) i \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | m, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{-i\gamma_m(\lambda)} \\ &= - \sum_n c_n(\lambda) \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | n, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))} e^{-i\gamma_m(\lambda)} \\ &\quad + c_m(\lambda) \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | m, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{-i\gamma_m(\lambda)} \\ &= - \sum_{n \neq m} c_n(\lambda) \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | n, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))} e^{-i\gamma_m(\lambda)}. \end{aligned}$$

Nun ist $c_n(\lambda) = d_n(\lambda) e^{i\gamma_n(\lambda)}$ und damit folgt:

$$\partial_\lambda d_m(\lambda) = - \sum_{n \neq m} d_n(\lambda) \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | n, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))} e^{-i(\gamma_m(\lambda) - \gamma_n(\lambda))}.$$

Mit der Definition von

$$\hat{A}_{mn}(T, \lambda) := \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | n, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))} e^{-i(\gamma_m(\lambda) - \gamma_n(\lambda))}$$

können wir dies etwas übersichtlicher schreiben:

$$\partial_\lambda d_m(\lambda) = - \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) d_n(\lambda). \quad (5.3.16)$$

Diese Gleichung kann man integrieren und erhält:

$$\begin{aligned} d_m(1) - d_m(0) &= - \int_0^1 \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) d_n(\lambda) d\lambda \\ &= - \int_0^1 \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) (d_n(\lambda) - d_n(0)) d\lambda \end{aligned}$$

$$- \int_0^1 \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) d_n(0) d\lambda .$$

Jetzt kürzen wir noch den letzten Term etwas ab, indem wir definieren:

$$\alpha_m(T) := \int_0^1 \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) d_n(0) d\lambda ,$$

und schreiben $d_m(1) - d_m(0)$ als Vektorgleichung:

$$\vec{d}(1) - \vec{d}(0) = - \int_0^1 \hat{A}(T, \lambda) (\vec{d}(\lambda) - \vec{d}(0)) d\lambda - \vec{\alpha}(T) \quad \Rightarrow$$

$$\|\vec{d}(1) - \vec{d}(0)\| \leq \|\vec{\alpha}(T)\| + \int_0^1 \|\hat{A}(T, \lambda)\| \cdot \|(\vec{d}(\lambda) - \vec{d}(0))\| d\lambda .$$

Diese Integralgleichung erfüllt nun alle Voraussetzungen der im obigen Lemma bewiesenen Grönwall-Integral-Ungleichung und damit folgt für $\|\vec{d}(1) - \vec{d}(0)\|$:

$$\|\vec{d}(1) - \vec{d}(0)\| \leq \|\vec{\alpha}(T)\| \exp\left(\int_0^1 \|\hat{A}(T, \lambda)\| d\lambda\right) .$$

Hiermit ist der Beweis fast abgeschlossen.

Jetzt muß man nur noch zeigen, daß $\lim_{T \rightarrow \infty} \|\vec{\alpha}(T)\| = 0$ ergibt.

$$\begin{aligned} \alpha_m(T) &:= \int_0^1 \sum_{n \neq m} \hat{A}_{mn}(T, \lambda) d_n(0) d\lambda \\ &= \int_0^1 \sum_{n \neq m} \langle m, \vec{R}(\lambda) | \partial_\lambda | n, \vec{R}(\lambda) \rangle e^{iT(\theta_n(\lambda) - \theta_m(\lambda))} e^{-i(\gamma_m(\lambda) - \gamma_n(\lambda))} d_n(0) d\lambda \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist im Wesentlichen eine Fouriertransformation der Form

$$\left| \int f(x) e^{iT x} dx \right| = \left| \int f'(x) \frac{1}{iT} e^{iT x} dx \right| \leq \frac{1}{T} \int |f'(x)| dx \simeq o\left(\frac{1}{T}\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } T \rightarrow \infty .$$

□

5.3.4 Berry-Phase

Es seien wieder die Voraussetzungen des quantenmechanischen Adiabatentheorems gegeben. Damit enthalte der Hamilton-Operator eine explizite Zeitabhängigkeit $\hat{H} = \hat{H}(\vec{R}(t))$ durch einen Satz äußerer Parameter $\vec{R}(t)$, die sich 'hinreichend langsam' ändern, so daß das System in seinem anfänglichen Energiezustand verbleibt, modulo eines zeitabhängigen Phasenfaktors. Die Phasenänderung $\gamma_n(\vec{R}(t)) \in \mathbb{R}$ mit $t \in [0, T]$ heißt Berry-Phase:

$$\gamma_n(T) := i \int_0^T \langle n, \vec{R}(t') | \partial_{t'} | n, \vec{R}(t') \rangle dt' \quad (5.3.17)$$

$$= i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \langle n, \vec{R}(t') | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | n, \vec{R}(t') \rangle \frac{dR^\mu}{dt'} dt' \quad (5.3.18)$$

$$= i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \langle n, \vec{R}(t') | d | n, \vec{R}(t') \rangle . \quad (5.3.19)$$

Der Phasenfaktor $e^{i\gamma_n(T)}$ ist ein Element der unitären Gruppe $U(1)$. Wir führen nun für den Integralkern die folgende 1-Form $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ ein, von der wir anschließend zeigen werden, daß dieser Ausdruck sich wie eine lokale Zusammenhangsform transformiert, oder in der Sprache der Physiker, wie ein Eichpotential:

$$\mathcal{A}(n, \vec{R}(t)) := \mathcal{A}_\mu dR^\mu := \langle n, \vec{R}(t) | d | n, \vec{R}(t) \rangle = \langle n, \vec{R}(t) | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | n, \vec{R}(t) \rangle dR^\mu . \quad (5.3.20)$$

$\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ ist antihermitesch, denn:

$$\begin{aligned} 0 &= d \langle n, \vec{R}(t) | n, \vec{R}(t) \rangle = (d \langle n, \vec{R}(t) |) | n, \vec{R}(t) \rangle + \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) \\ &= \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle)^* + \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle)^* = -\langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) .$$

Also ist die 1-Form $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ rein imaginär und somit ein Element der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(1) = \{i \cdot c \in i \cdot \mathbb{R}\}$, und die Berry-Phase $\gamma_n(T)$ ist reell.

$$\gamma_n(T) = i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \mathcal{A}(n, \vec{R}(t)) ,$$

führt zu einer entsprechenden Phasenverschiebung der Wellenfunktion:

$$|n, \vec{R}(t)\rangle = \exp(i\gamma_n(t)) |n, \vec{R}(0)\rangle = \exp\left(-\int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \mathcal{A}(n, \vec{R}(t))\right) |n, \vec{R}(0)\rangle .$$

Jetzt soll die differentialgeometrischen Beschreibung der Berry-Phase erläutert werden. Ähnlich wie man den Elektromagnetismus als eine $U(1)$ Eichtheorie über der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit $M = \mathbb{R}^4$ als Basismannigfaltigkeit beschrieben hat (31.2), wählt man hier eine Eichtheorie mit der Eichgruppe

$$U(1) := \{e^{i\gamma_n(t)} = \exp\left(-\int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \mathcal{A}(n, \vec{R}(t))\right) \mid \mathcal{A}(n, \vec{R}(t)) \in \mathfrak{u}(1), t \in [0, T]\}$$

über der Mannigfaltigkeit $M = \{\vec{R}(t) \mid t \in [0, T]\}$.

Das Prinzipalbündel ist also $P(M, U(1))$. Die Liegruppe $U(1)$ ist eindimensional und abelsch, also sind alle Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ und man benötigt keine Gruppenindizes α, β . Damit ist $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ eine $\mathfrak{u}(1)$ -wertige 1-Form und ein geeigneter Kandidat für eine lokale Zusammenhangsform, oder in der Sprache der Physiker, ein Eichpotential.

Seien U_i eine Karte einer offenen Überdeckung von M , $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt. Jetzt soll gezeigt werden, daß $\mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t))$ bei einem Kartenwechsel mit einer Funktion $t_{ij} \in U(1)$ von einer Karte U_i auf eine Karte U_j tatsächlich die für eine Eichtransformation richtige Kompatibilitätsbedingung erfüllt (30.4.8).

$$|n, \vec{R}(t)\rangle_j = |n, \vec{R}(t)\rangle_i t_{ij}(n, \vec{R}(t)) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j(n, \vec{R}(t)) &= \langle n, \vec{R}(t) |_j d |n, \vec{R}(t)\rangle_j \\ &= t_{ij}(n, \vec{R}(t))^{-1} \langle n, \vec{R}(t) |_i d (|n, \vec{R}(t)\rangle_i t_{ij}(n, \vec{R}(t))) \\ &= t_{ij}(n, \vec{R}(t))^{-1} \langle n, \vec{R}(t) |_i d (|n, \vec{R}(t)\rangle_i) t_{ij}(n, \vec{R}(t)) \\ &\quad + t_{ij}(n, \vec{R}(t))^{-1} \langle n, \vec{R}(t) |_i |n, \vec{R}(t)\rangle_i dt_{ij}(n, \vec{R}(t)) \\ &= t_{ij}(n, \vec{R}(t))^{-1} \mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t)) t_{ij}(n, \vec{R}(t)) + t_{ij}(n, \vec{R}(t))^{-1} dt_{ij}(n, \vec{R}(t)) . \end{aligned}$$

Damit stellt $\mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t))$ also einen lokalen Zusammenhang dar - man spricht auch vom Berry-Zusammenhang.

Aus der lokalen Zusammenhang-1-Form $\mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t))$ kann man durch Differenzieren die lokale Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_i(n, \vec{R}(t))$ gewinnen (30.4.21):

$$\mathcal{F}_i(n, \vec{R}(t)) = d\mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t)) + \mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t)) \wedge \mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t))$$

$$\begin{aligned}
&= d\mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t)) = d\langle n, \vec{R}(t)|_i d|n, \vec{R}(t)\rangle_i \\
&= (d\langle n, \vec{R}(t)|_i) \wedge (d|n, \vec{R}(t)\rangle_i) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial R^\mu} \langle n, \vec{R}(t)|_i\right) \left(\frac{\partial}{\partial R^\nu} |n, \vec{R}(t)\rangle_i\right) dR^\mu \wedge dR^\nu .
\end{aligned}$$

Für eine Eichtransformation $t_{ij}(n, \vec{R}(t)) \in U(1)$ dieser Krümmung gilt (30.4.27):

$$\mathcal{F}_j(n, \vec{R}(t)) = t_{ij}^{-1}(n, \vec{R}(t)) \mathcal{F}_i(n, \vec{R}(t)) t_{ij}(n, \vec{R}(t)) = \mathcal{F}_i(n, \vec{R}(t)) .$$

Also ist $\mathcal{F}_j(n, \vec{R}(t))$ eichinvariant.

Der Berry-Phasenfaktor $e^{i\gamma_n(t)}$, der auf einem offenen Weg C von $\vec{R}(0)$ nach $\vec{R}(T)$ entsteht, kann durch eine geeignete Wahl (Eichung) der Wellenfunktion beseitigt werden. Wenn es sich aber bei dem Weg C um einen geschlossenen Weg von $\vec{R}(0)$ nach $\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$ handelt, d.h. um eine Holonomie, dann ist $\gamma_n(T)$ eichinvariant, denn mittels des Satzes von Stokes (21.1.1) kann $\gamma_n(t)$ auch als Intergral der Krümmung über die von C umschlossene Fläche S ausgedrückt werden:

$$\gamma_n(T) = i \oint_{C=\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \mathcal{A}_i(n, \vec{R}(t)) = i \iint_S \mathcal{F}_i(n, \vec{R}(t)) .$$

Wenn es einen einzigen eindeutigen Zusammenhang auf dieser Fläche S gibt, dann muß natürlich $\gamma_n(T)$ nach einem Umlauf auf dem Weg C ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, um die Eindeutigkeit der Wellenfunktion zu gewährleisten. Wenn es aber in der Fläche S eine Singularität gibt, wie z.B. beim Dirac-Monopol, dann erzwingt diese nichttriviale Topologie mehrere verschiedene Zusammenhangsformen und damit eine nichttriviale Berry-Phase $\gamma_n(T)$.

6 Integraler Quanten-Hall-Effekt

6.1 Klaus von Klitzing (1943)

Klaus von Klitzing wurde 1943 in Schroda im Warthegau (polnisch Okręg Warcki) geboren. Die Familie kam nach Kriegsende als Heimatvertriebene nach Niedersachsen. Nach dem Abitur 1962 in Quakenbrück studierte von Klitzing an der TU Braunschweig Physik und schloß dort 1969 mit dem Diplom ab. Danach war er bis 1980 Doktorand und Assistent bei dem Festkörper-Physiker Prof. Landwehr an der Universität Würzburg. Von 1979 bis 1980 arbeitete von Klitzing am Hochfeld-Magnetlabor in Grenoble, wo er den integralen Quanten-Hall-Effekt experimentell entdeckte (von Klitzing u. a. (1980)). Er arbeitete damals mit MOSFETs (metal oxide semiconductor field effect transistors) auf Silizium-Basis, die er von Pepper und Dorda erhalten hatte. Diese Strukturen lassen sich sehr gut als ein 2-dimensionales Elektronengas beschreiben. Von Klitzings Versuche fanden bei einer Temperatur von 4.2 Kelvin und Magnetfeldern von bis zu 40 Tesla statt und sollten ursprünglich der Erforschung von störenden Oberflächenzuständen in MOS-Strukturen dienen. Von Klitzing fand für die Hall-Leitfähigkeit

$$\sigma_{xy} = \frac{J_{\text{kanal}}}{U_{\text{Hall}}} = \frac{e^2 n}{h} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$$

Die Größe R_K heißt *Von-Klitzing-Konstante*:

$$R_K := \frac{h}{e^2} \simeq 25.8 \text{ k}\Omega$$

Unmittelbar nach seiner Entdeckung 1980 berief ihn die TU München auf eine Professur für Festkörperphysik. Seit 1985 arbeitete er als einer der Direktoren des Max-Planck-Instituts für Festkörperforschung in Stuttgart und im gleichen Jahr erhielt er für seine Entdeckung den Nobelpreis für Physik.



Abbildung 6.1: K. von Klitzing
Pontifical Academy of Sciences
(2015), CC BY-SA 4.0.
[[https://de.wikipedia.org/wiki/
Klaus_von_Klitzing](https://de.wikipedia.org/wiki/Klaus_von_Klitzing)]

Seit 2019 stützt sich die Neudefinition der SI-Einheiten auf eine Neudefinition des Kilogramms mittels der Von-Klitzing-Konstanten.

[Quelle: de.wikipedia: Klaus_von_Klitzing]

6.2 Einführung in den integralen Quanten-Hall-Effekt

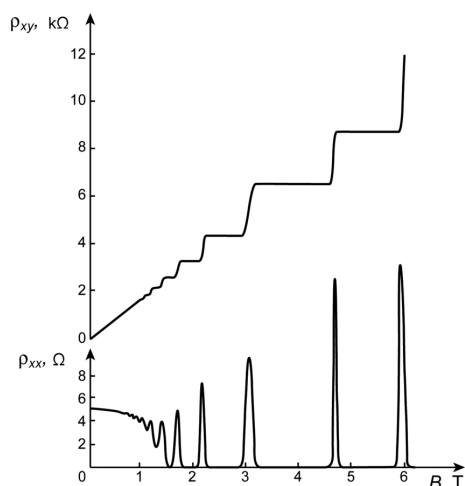


Abbildung 6.2: Quanten-Hall-Effekt:
Hall-Widerstand

Antikon (2009), CC BY-SA 3.0.

[<http://de.wikipedia.org/wiki/Quanten-Hall-Effekt>]

Es dauerte nach der Entdeckung des Quanten-Hall-Effektes durch von Klitzing im Jahr 1980 nicht lange, bis Thouless et al. (Thouless u. a. (1982)) eine festkörpertheoretische Beschreibung des integralen Quanten-Hall-Effektes auf topologischer Basis vorlegen konnten. Die Abkürzung TKNN steht hier für die Anfangsbuchstaben der Autoren dieser Arbeit: Thouless, Kohmoto, Nightingale und den Nijs.

Heute hat sich das Gebiet des Quanten-Hall-Effektes gewaltig verbreitert, wie schon ein erster Blick auf das arXiv Preprint-Archiv zeigt.

Die historisch gesehen erste Erweiterung des integralen Quanten-Hall-Effektes war die Einbeziehung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung, die zum fraktionalen Quanten-Hall-Effekt führte, bei dem die natürlichen Zahlen n im Zähler von σ_{xy} durch rationale Zahlen der Form $q = \frac{m}{2m+1}$, oder $q = 1 - \frac{m}{2m+1}$, mit $m \in \mathbb{N}$, oder ähnliche Quotienten zu ersetzen sind.

Inzwischen konnte man den Quanten-Hall-Effekt sogar bei Raumtemperaturen bei 1-Atom-lagigen Graphen-Proben zeigen. Und der Quanten-Hall-Effekt kann statt mit einem Elektronengas und elektrischen Strömen auch bei einem Spingas und Spinströmen nachgewiesen werden.

Der logisch naheliegende nächste Schritt ist die Erforschung von topologisch geschützten Isolatoren, die mathematisch mit Hilfe von Kohomologie-Gruppen beschrieben werden können.

Wir orientieren uns im folgenden an der Originalarbeit von Thouless u. a. (1982), an einigen der Artikel im Sammelband Prange u. Girvin (1987a), insb. dem Artikel von Thouless 'Topological Considerations', und erneut an der schönen Vorlesung von Tong (2016), S. 61 ff.

Zuvor tragen wir aber noch einige benötigte Grundlagen aus der Quantenmechanik zusammen, insb. zum Wechselwirkungs-Bild der QM und dem Formalismus der Linearen Antwort-Theorie von Kubo.

6.3 Klassischer Hall-Effekt

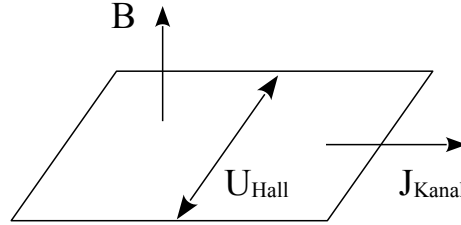


Abbildung 6.3: Geometrie im klassischen Hall-Effekt

Der klassische Hall-Effekt wurde im Jahr 1879 von Edwin Hall im Rahmen seiner Doktorarbeit an einer Gold-Probe entdeckt.

Die klassische Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m und der Ladung $-e$ in einem Magnetfeld senkrecht zur Bewegungsrichtung ergibt sich aus der Lorentzkraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (6.3.1)$$

Jetzt bewege sich das Teilchen nur in der x, y Ebene und \vec{B} zeige in die z -Richtung. Daraus folgen zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen und daraus die Teilchen Bewegung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -e \frac{dy}{dt} B \quad \text{und} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = e \frac{dx}{dt} B. \quad (6.3.2)$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = x_0 + r \sin\left(\frac{eB}{m}t + \varphi_0\right) \quad \text{und} \quad y(t) = y_0 + r \cos\left(\frac{eB}{m}t + \varphi_0\right). \quad (6.3.3)$$

Für zwei gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung gibt es vier Integrationskonstanten, hier also x_0, y_0, r, φ_0 , die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Die Frequenz dieser Kreisbahnen heißt Zyklotron-Frequenz:

$$\omega_B := \frac{eB}{m}. \quad (6.3.4)$$

Ein klassisches Modell für den Hall-Effekt ist das Drude-Modell. Hier wird zur obigen Bewegungsgleichung einfach noch ein elektrisches Feld in x -Richtung und ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungsterm $\frac{m}{\tau}\vec{v}$ mit einer mittleren Streuzzeit τ hinzugefügt:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} - \frac{m}{\tau}\vec{v}. \quad (6.3.5)$$

Eine Gleichgewichtslösung ergibt sich mit $d\vec{v}/dt = 0$:

$$\vec{v} + \frac{e\tau}{m} \vec{v} \times \vec{B} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}. \quad (6.3.6)$$

Es liege \vec{v} wieder in der x, y Ebene und \vec{B} zeige in die z -Richtung. Die Stromdichte J sei über die Ladungsträgerdichte $-ne$ gegeben als:

$$\vec{J} := -ne\vec{v}. \quad (6.3.7)$$

Damit folgt aus 6.3.6:

$$\begin{aligned} \vec{J} + \frac{e\tau}{m} \vec{J} \times \vec{B} &= \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} \quad \Rightarrow \\ J_x + \frac{eB\tau}{m} J_y &= \frac{ne^2\tau}{m} E_x \quad \text{und} \quad J_y - \frac{eB\tau}{m} J_x = \frac{ne^2\tau}{m} E_y \quad \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau \\ -\omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \vec{J} &= \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Im Fall von $\vec{B} = 0$ folgt mit $\omega_B = 0$ sofort $\vec{J} = \sigma_0 \vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$ und damit ergibt sich aus 6.3.8:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau \\ -\omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \rho \vec{J}, \quad (6.3.9)$$

mit dem spezifischen Widerstands-Tensor ρ . Daraus folgt:

$$\rho_{xx} = \frac{1}{\sigma_0} = \frac{m}{ne^2\tau} \quad \text{und} \quad \rho_{xy} = \frac{\omega_B\tau}{\sigma_0} = \frac{eB\tau}{m} \frac{m}{ne^2\tau} = \frac{B}{ne}. \quad (6.3.10)$$

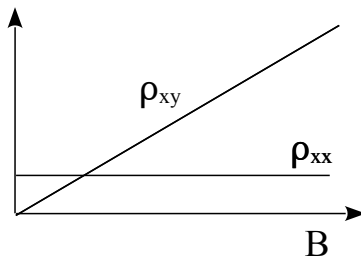


Abbildung 6.4: Spezifischer Widerstand im klassischen Hall-Effekt

Bemerkenswert daran ist, daß ρ_{xx} nicht vom Magnetfeld \vec{B} abhängt und daß ρ_{xy} einerseits linear von \vec{B} abhängt und gleichzeitig unabhängig von der mittleren Streuzzeit τ , und damit den mikroskopischen Details der Probe ist.

In der Theorie des Quanten-Hall-Effektes wird statt dem spezifischen Widerstand ρ jedoch meistens die spezifische Leitfähigkeit σ bestimmt und hierfür ergibt sich im Drude-Modell:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix}^{-1} \vec{E} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \vec{E}. \quad (6.3.11)$$

Soviel zum klassischen Hall-Effekt.

6.4 Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungs-Bild der QM

Die Operator-Gleichungen der Quantenmechanik sind nur bis auf eine Unitäräquivalenz bestimmt. Drei verschiedene *Bilder* oder *Darstellungen* der Quantenmechanik sind in der Physik gebräuchlich, das Schrödinger-Bild, das Heisenberg-Bild und das von Dirac eingeführte Wechselwirkungs-Bild. Alle Physiker sind damit hinlänglich vertraut. Wenn wir dies hier nochmals ausführlich vortragen, dann als Hilfestellung für die Mathematiker unter unseren Leserinnen und Lesern :-). Wir folgen Fick (1972), S. 172-224, in teilweise abweichenden Bezeichnungen.

Eine Form des Zugangs zur Quantenmechanik ist der Übergang von Größen der klassischen Physik zu den entsprechenden selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum. Dieser Vorgang wird Quantisierung genannt und ist nicht eindeutig. Sei also

$$F(q_i, p_i, t) := F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Funktion der klassischen Mechanik, die von den Ortsvariablen q_i und Impulsvariablen p_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und noch explizit von der Zeit t abhängig sei. Eine Formulierung der Bewegungsgleichung für F in der klassischen Mechanik ist die folgende Aussage mithilfe der Poisson-Klammer:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &\stackrel{!}{=} \{H, F\} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{ex}. & (6.4.1) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{ex}. \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dq_i}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{ex}. \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{ex}. \end{aligned}$$

Die gewöhnliche Quantisierungsmethode ersetzt die klassische Variable F durch den selbstadjungierten Operator \mathcal{F} und die klassische Größe $\frac{dF}{dt}$, die zeitliche Veränderung von F , durch einen selbstadjungierten Operator $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$, genannt *Observable der zeitlichen Veränderung des Operators \mathcal{F}* . Der Operator $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ stimmt im allgemeinen nicht mit $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ überein, denn die Zeitabhängigkeit von \mathcal{F} ist ja nur bis auf eine, möglicherweise zeitabhängige unitäre Transformation bestimmt.

Für $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ verlangt man bei der Quantisierung in Analogie zur klassischen Mechanik:

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}} \stackrel{!}{=} \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \mathcal{F}] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)_{ex} = \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{H}) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)_{ex}. \quad (6.4.2)$$

Jedes quantenmechanische System werde durch einen Hilbertraum-Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschrieben, oder alternativ durch den Projektions-Operator $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}$:

$$\mathcal{P}_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi| . \tag{6.4.3}$$

Man kann $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}$ auch als den *statistischen Operator* ρ eines reinen Zustands $|\psi\rangle$ betrachten und dann den Begriff des *statistischen Operators* ρ auf sog. *Gemische* verallgemeinern, in welchen dem Zustand des Systems nur sehr unvollständig bekannt ist:

$$\rho := \sum_{\alpha} p^{\alpha} \mathcal{P}_{|\psi^{\alpha}\rangle} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} |\psi^{\alpha}\rangle\langle\psi^{\alpha}| , \tag{6.4.4}$$

mit Wahrscheinlichkeiten p^{α} und $\sum_{\alpha} p^{\alpha} = 1$.

Der Operator $\overset{\circ}{\mathcal{P}}_{|\psi\rangle}$ beschreibt eine Änderung der zeitlichen Zuordnung von $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}$ zum System. Diese liegt solange nicht vor, solange sich das System ohne eine Messung frei entwickelt:

$$\overset{\circ}{\mathcal{P}}_{|\psi\rangle} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \mathcal{P}_{|\psi\rangle}] + \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{|\psi\rangle}}{\partial t}\right)_{ex.} \stackrel{!}{=} 0 . \tag{6.4.5}$$

In der klassischen Mechanik sagt die Liouville-Gleichung, daß sich die klassische Phasenraumdichte $\rho(q_i, p_i, t)$ zeitlich nicht ändert, da Phasenraumpunkte weder entstehen noch vergehen:

$$\frac{d\rho}{dt} = \{H, \rho\} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{ex.} \stackrel{!}{=} 0 . \tag{6.4.6}$$

Wegen der Linearität des statistischen Operators ρ und 6.4.5 folgt daraus sofort:

$$\overset{\circ}{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho] + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{ex.} \stackrel{!}{=} 0 . \tag{6.4.7}$$

Der Erwartungswert des Operators \mathcal{F} in einem reinen Zustand $|\psi\rangle$ ist definiert als

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \phi | \mathcal{F} \phi \rangle = \text{tr}(\mathcal{P}_{|\psi\rangle} \mathcal{F}) = \text{tr}(\rho \mathcal{F}) . \tag{6.4.8}$$

Im nächsten Schritt untersucht man die Dynamik eines quantenmechanischen Systems unter zeitabhängigen Äquivalenztransformationen. Sei $B(t)$ eine solche zeitabhängige unitäre Äquivalenztransformation, d.h. $B^{\dagger}(t) = B^{-1}(t)$. Alle Erwartungswerte $\langle \mathcal{F} \rangle$ bleiben durch diese Transformation unverändert:

$$\begin{aligned} \langle B(t) \mathcal{F} B(t)^{-1} \rangle &= \langle \phi | B(t) \mathcal{F} B(t)^{-1} \phi \rangle = \langle B(t)^{\dagger} \phi | \mathcal{F} B(t)^{-1} \phi \rangle \\ &= \langle B(t)^{\dagger} \phi | \mathcal{F} B(t)^{\dagger} \phi \rangle = \langle \phi | \mathcal{F} \phi \rangle = \langle \mathcal{F} \rangle . \end{aligned}$$

Seien jetzt

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= B(t)\mathcal{F}(x_i, p_i, t)B(t)^\dagger = \mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t) , \\ \mathcal{F}(t_0) &= B(t_0)\mathcal{F}(x_i, p_i, t)B(t_0)^\dagger = \mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t) , \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= B(t)B(t_0)^\dagger\mathcal{F}(t_0)B(t_0)B(t)^\dagger = (B(t)B(t_0)^\dagger)\mathcal{F}(t_0)(B(t)B(t_0)^\dagger)^\dagger \\ &=: A(t, t_0)\mathcal{F}(t_0)A^\dagger(t, t_0) , \quad \text{mit } A(t, t_0) := B(t)B(t_0)^\dagger . \end{aligned}$$

Aus der Unitarität von $B(t)$ folgt auch die Unitarität von $A(t, t_0)$, d.h. $A^\dagger(t, t_0) = A^{-1}(t, t_0)$, und es gilt:

$$A(t, t) = \mathbb{1} , \quad A(t, t_0) = A^\dagger(t_0, t) , \quad A(t, t_0) = A(t, t_1)A(t_1, t_0) . \quad (6.4.9)$$

Lemma 6.4.1 *Mit den obigen Definitionen folgt:*

$$\mathcal{F}(t) = A(t, t_0)\mathcal{F}(t_0)A^\dagger(t, t_0) . \quad (6.4.10)$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X(t), \mathcal{F}(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)_{ex.} \quad \text{mit } X(t) := \frac{\hbar}{i} \frac{dA(t, t_0)}{dt} A^\dagger(t, t_0) . \quad (6.4.11)$$

Mit der Definition von $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ in 6.4.2 folgt unmittelbar:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \overset{\circ}{\mathcal{F}} + \frac{i}{\hbar}[(X(t) - \mathcal{H}(t)), \mathcal{F}(t)] . \quad (6.4.12)$$

Der Operator $X(t) := \frac{\hbar}{i} \frac{dA(t, t_0)}{dt} A^\dagger(t, t_0)$ hängt nur von der Variablen t ab und ist selbstadjungiert.

Verschiedene Bilder der Quantenmechanik wählen verschiedene Operatoren $X(t)$. Wenn X ein explizit zeitunabhängiger Operator ist, dann folgt einfach:

$$A(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}X(t)(t-t_0)} . \quad (6.4.13)$$

Wenn $X(t)$ dagegen ein zeitabhängiger Operator ist, dann muß man wegen der Nichtkommutativität von $X(t_i)$ und $X(t_j)$ zu verschiedenen Zeiten t_i und t_j zusätzlich einen Zeitordnungs-Operator \hat{T} einführen:

$$A(t, t_0) = \hat{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t', t_0) dt'} . \quad (6.4.14)$$

Hierbei ist \hat{T} der sog. Zeitordnungs-Operator, der in zeitabhängigen Operatorprodukten die Operatoren in der Reihenfolge abnehmender Zeiten von links nach rechts ordnet, also:

$$\hat{T}X(t_1)X(t_2) = \begin{cases} X(t_1)X(t_2) & \text{für } t_1 \geq t_2 , \\ X(t_2)X(t_1) & \text{für } t_2 > t_1 . \end{cases} \quad (6.4.15)$$

Die obige Operator-Exponentialfunktion ist hier als Potenzreihe definiert, wobei zunächst offen bleibt, ob es sich um eine konvergente, eine divergente, oder um eine asymptotische Reihe handelt.

Beweis: Zunächst einmal gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(\mathbb{1}) = \frac{d}{dt}(A(t, t_0)A^{-1}(t, t_0)) \\
&= \frac{dA(t, t_0)}{dt}A^{-1}(t, t_0) + A(t, t_0)\frac{dA^{-1}(t, t_0)}{dt} \Rightarrow \\
\frac{dA^\dagger(t, t_0)}{dt} &= \frac{dA^{-1}(t, t_0)}{dt} = -A^{-1}(t, t_0)\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^{-1}(t, t_0) \\
&= -A^\dagger(t, t_0)\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0) .
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{dA(t, t_0)}{dt}\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)A^\dagger(t, t_0) \\
&+ A(t, t_0)\left(\frac{\partial\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)}{\partial t}\right)_{ex.}A^\dagger(t, t_0) \\
&+ A(t, t_0)\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)\frac{dA^\dagger(t, t_0)}{dt} \\
&= \frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0)A(t, t_0)\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)A^\dagger(t, t_0) \\
&+ A(t, t_0)\left(\frac{\partial\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)}{\partial t}\right)_{ex.}A^\dagger(t, t_0) \\
&- A(t, t_0)\mathcal{F}(x_i(t_0), p_i(t_0), t)A^\dagger(t, t_0)\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0) \\
&= \frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0)\mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t) \\
&+ \left(\frac{\partial\mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)}{\partial t}\right)_{ex.} \\
&- \mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0) \\
&= \left[\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0), \mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)\right] + \left(\frac{\partial\mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)}{\partial t}\right)_{ex.} .
\end{aligned}$$

Jetzt führt man für den ersten Ausdruck im Kommutator als Abkürzung einen neuen Operator $X(t)$ ein:

$$X(t) := \frac{\hbar}{i}\frac{dA(t, t_0)}{dt}A^\dagger(t, t_0) .$$

Dieser Operator $X(t)$ hängt tatsächlich nur von t und nicht von t_0 ab, denn:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t, t_0)}{dt} A^\dagger(t, t_0) &= \frac{d(A(t, t_1)A(t_1, t_0))}{dt} (A(t, t_1)A(t_1, t_0))^\dagger \\ &= \frac{dA(t, t_1)}{dt} A(t_1, t_0) A^\dagger(t_1, t_0) A^\dagger(t, t_1) \\ &= \frac{dA(t, t_1)}{dt} A^\dagger(t, t_1) . \end{aligned}$$

Außerdem ist $X(t)$ wegen des Faktors i selbstadjungiert:

$$\begin{aligned} X^\dagger(t) &= -\frac{\hbar}{i} A(t, t_0) \frac{dA^\dagger(t, t_0)}{dt} = -\frac{\hbar}{i} A(t, t_0) (-A^\dagger(t, t_0) \frac{dA(t, t_0)}{dt} A^\dagger(t, t_0)) \\ &= \frac{\hbar}{i} \frac{dA(t, t_0)}{dt} A^\dagger(t, t_0) = X(t) . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [X(t), \mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}(x_i(t), p_i(t), t)}{\partial t} \right)_{ex.} .$$

Diesen selbstadjungierten Operator $X(t)$ verwendet man zur Definition des quantenmechanischen *Bildes* (Darstellung). Von $X(t)$ kann man dann durch Integration zu $A(t, t_0)$ gelangen:

$$\frac{dA(t, t_0)}{dt} = \frac{i}{\hbar} X(t) A(t, t_0) .$$

Eine hierzu äquivalente Integralgleichung ist

$$A(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t_1) A(t_1, t_0) dt_1 .$$

Eine Lösung dieser Integralgleichung versucht man jetzt mit der Picard-Iteration. Dabei bleibt natürlich im allgemeinen Fall offen, ob es sich bei der entstehenden Reihe um eine konvergente, eine divergente oder um eine asymptotische Reihe handelt.

$$A_0(t, t_0) = \mathbb{1} ,$$

$$A_1(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t_1) \{1\} dt_1 ,$$

$$A_2(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t_1) A_1(t_1, t_0) dt_1$$

$$= \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t_1) dt_1 + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_0}^{t_1} X(t_1)X(t_2) dt_2 dt_1 .$$

Den letzten Term halbieren wir und formen die eine Hälfte noch etwas um. Zunächst vertauschen wir t_1 und t_2 :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_0}^{t_1} X(t_1)X(t_2) dt_2 dt_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_2=t_0}^t \int_{t_1=t_0}^{t_2} X(t_2)X(t_1) dt_1 dt_2 .$$

Betrachten wir in der $t_1 t_2$ Ebene das Quadrat mit den Ecken (t_0, t_0) , (t, t_0) , (t, t) , (t_0, t) .

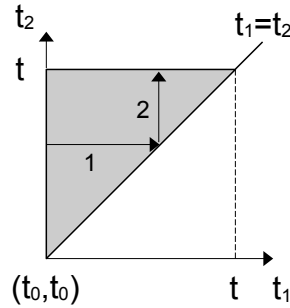


Abbildung 6.5: Integrationswege im Doppelintegral von $A_2(t, t_0)$

Dann erstreckt sich die Integration über das Dreieck (t_0, t_0) , (t, t) , (t_0, t) . Die innere Integration über dt_1 erfolgt auf dem Weg 1 von t_0 bis t_2 . Nun kann man stattdessen aber über die gleiche Fläche auch zuerst über dt_2 auf dem Weg 2 von t_1 bis t integrieren und erhält:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_2=t_0}^t \int_{t_1=t_0}^{t_2} X(t_2)X(t_1) dt_1 dt_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_1}^t X(t_2)X(t_1) dt_2 dt_1 .$$

Damit können wir das Doppelintegral von $A(t, t_0)$ nun schreiben als:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_0}^{t_1} X(t_1)X(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_0}^{t_1} X(t_1)X(t_2) dt_2 dt_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_1}^t X(t_2)X(t_1) dt_2 dt_1 \\ &=: \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1=t_0}^t \int_{t_2=t_0}^t \hat{T} X(t_1)X(t_2) dt_2 dt_1 \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$\hat{T}X(t_1)X(t_2) = \begin{cases} X(t_1)X(t_2) & \text{für } t_1 \geq t_2, \\ X(t_2)X(t_1) & \text{für } t_2 > t_1. \end{cases}$$

Die ersten 3 Glieder der entsprechenden Operator-Exponentialreihe haben wir damit verifiziert, und mit vollständiger Induktion folgt dann:

$$A(t, t_0) = \hat{T}e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t X(t') dt'} . \quad \square$$

Sei jetzt \mathcal{F} ein *explizit zeitunabhängiger* Operator mit diskreten Eigenwerten λ und Eigenvektoren $|u_\lambda(t)\rangle$, dann gilt für die Zeitabhängigkeit von $|u_\lambda(t)\rangle$:

$$\mathcal{F}(t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle = \lambda|u_\lambda(t_0)\rangle \quad \Rightarrow \quad (6.4.16)$$

$$A(t, t_0)\mathcal{F}(t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle = \lambda A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$A(t, t_0)\mathcal{F}(t_0)A^\dagger(t, t_0)A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle = \lambda A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}(t)A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle = \lambda A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle \quad \Rightarrow$$

$$|u_\lambda(t)\rangle = A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle . \quad (6.4.17)$$

Aus 6.4.11 folgt:

$$\frac{dA(t, t_0)}{dt} = \frac{i}{\hbar}X(t)A(t, t_0) , \quad (6.4.18)$$

und mit 6.4.17 folgt für die Zeitableitung von $|u_\lambda(t)\rangle$:

$$\frac{d|u_\lambda(t)\rangle}{dt} = \frac{dA(t, t_0)}{dt}|u_\lambda(t_0)\rangle = \frac{i}{\hbar}X(t)A(t, t_0)|u_\lambda(t_0)\rangle = \frac{i}{\hbar}X(t)|u_\lambda(t)\rangle . \quad (6.4.19)$$

Aus 6.4.11 folgt für den Hamilton-Operator:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X(t), \mathcal{H}(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)_{ex} . \quad (6.4.20)$$

Im nächsten Schritt soll die Zeitableitung des Zustandsvektors $|\psi\rangle$ bestimmt werden.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{|\psi\rangle} &= \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)}{\partial t}\right)_{ex} = 0 \\ \frac{d\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[X(t), \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)}{\partial t}\right)_{ex} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X(t), \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)] - \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)] = \frac{i}{\hbar}[X(t) - \mathcal{H}, \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)] . \quad (6.4.21)$$

Lemma 6.4.3 (Schrödingergleichung) Sei $|\psi(t)\rangle$ der Zustandsvektor des Systems dann gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\mathcal{H}(t) - X(t)) |\psi(t)\rangle . \quad (6.4.22)$$

Wenn \mathcal{F} ein explizit zeitunabhängiger Operator mit diskreten Eigenwerten λ und Eigenvektoren $|u_\lambda(t)\rangle$ ist, dann folgt die bildunabhängigen \mathcal{F} -Darstellung der Zeitabhängigkeit des Zustandsvektors, d.h. die Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\lambda, t) &= \langle u_\lambda(t) | \mathcal{H}(t) \psi(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda'} \mathcal{H}_{\lambda, \lambda'}(t) \psi(\lambda', t) \\ &=: \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t) \psi(\lambda, t) . \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

Wenn $C(t, t_0)$ der Zeitentwicklungs-Operator für $|\psi(t)\rangle$ sei:

$$|\psi(t)\rangle = C(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (6.4.24)$$

dann erfolgt die Zeitentwicklung für $\psi(\lambda, t)$ mit dem Operator

$$U(t, t_0) := A^\dagger(t, t_0) C(t, t_0) \quad (6.4.25)$$

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, t) &= \langle u_\lambda(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \langle u_\lambda(t_0) | A^\dagger(t, t_0) C(t, t_0) \psi(t_0) \rangle = \langle u_\lambda(t_0) | U(t, t_0) \psi(t_0) \rangle , \end{aligned} \quad (6.4.26)$$

$$U(t, t_0) = \hat{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}(x(t_0), p(t_0), t') dt'} , \quad (6.4.27)$$

bzw. wenn \mathcal{H} explizit zeitunabhängig ist:

$$U(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(x(t_0), p(t_0))(t-t_0)} . \quad (6.4.28)$$

Beweis: Wir multiplizieren 6.4.21 von rechts mit einem beliebigen, festen Vektor $|\varphi\rangle$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d|\psi\rangle}{dt} \langle \psi | \varphi \rangle + |\psi\rangle \frac{d\langle \psi |}{dt} \langle \varphi \rangle &= +\frac{i}{\hbar} (X(t) - \mathcal{H}) |\psi\rangle \langle \psi | \varphi \rangle - \frac{i}{\hbar} |\psi\rangle \langle \psi | (X(t) - \mathcal{H}) |\varphi \rangle \Rightarrow \\ \left(\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) |\psi\rangle + \frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) \langle \psi | \varphi \rangle &= -|\psi\rangle \left\langle \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) \psi | \varphi \right\rangle - |\psi\rangle \frac{d\langle \psi |}{dt} \langle \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Damit ist die Klammer der linken Seite proportional zu $|\psi\rangle$ auf der rechten Seite, d.h.:

$$\left(\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) |\psi\rangle + \frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) =: \alpha(t) |\psi\rangle ,$$

und adjungiert ergibt sich

$$\left(\left\langle \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) \psi \mid + \frac{d\langle \psi \mid}{dt} \right\rangle = \alpha^*(t) \langle \psi \mid . \right.$$

Diese beiden Ausdrücke kann man oben einsetzen und erhält:

$$\alpha(t) |\psi\rangle \langle \psi | \varphi\rangle = -|\psi\rangle \alpha^*(t) \langle \psi | \varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = -\alpha^*(t)$$

Also ist $\alpha(t) =: i\beta(t)$ mit $\beta \in \mathbb{R}$. Nun ist der Zustandsvektors $|\psi\rangle$ aber nur bis auf eine frei wählbare Phase festgelegt - und diese Phase wählen wir jetzt so, daß sich gerade $\alpha = 0$ ergibt:

$$|\psi\rangle = e^{i \int \beta(t') dt'} |\bar{\psi}\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) |\psi\rangle + \frac{d|\psi\rangle}{dt} \right) = i\beta(t) |\psi\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) e^{i \int \beta(t') dt'} |\bar{\psi}\rangle + i\beta(t) e^{i \int \beta(t') dt'} |\bar{\psi}\rangle + e^{i \int \beta(t') dt'} \frac{d|\bar{\psi}\rangle}{dt} \right) = i\beta(t) e^{i \int \beta(t') dt'} |\bar{\psi}\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H} - X(t)) |\bar{\psi}\rangle + \frac{d|\bar{\psi}\rangle}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = i\beta(t) = 0 .$$

Damit folgt die Behauptung:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\mathcal{H}(t) - X(t)) |\psi(t)\rangle .$$

Wenn \mathcal{F} ein *explizit zeitunabhängiger* Operator mit diskreten Eigenwerten λ und Eigenvektoren $|u_\lambda(t)\rangle$ ist, dann folgt mit 6.4.17, 6.4.19 die bildunabhängigen \mathcal{F} -Darstellung dieser Gleichung:

$$\psi(\lambda, t) := \langle u_\lambda(t) | \psi(t) \rangle \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\lambda, t) &= \frac{d}{dt} \langle u_\lambda(t) | \psi(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} u_\lambda(t) \mid \psi(t) \right\rangle + \langle u_\lambda(t) \mid \frac{d}{dt} \psi(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{i}{\hbar} X(t) u_\lambda(t) \mid \psi(t) \right\rangle + \langle u_\lambda(t) \mid \frac{i}{\hbar} (X(t) - \mathcal{H}(t)) \psi(t) \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle u_\lambda(t) \mid \mathcal{H}(t) \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda'} \langle u_{\lambda}(t) | \mathcal{H}(t) u_{\lambda'}(t) \rangle \langle u_{\lambda'}(t) | \psi(t) \rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda'} \mathcal{H}_{\lambda, \lambda'}(t) \psi(\lambda', t) =: \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t) \psi(\lambda, t) .
\end{aligned}$$

Die Integration von $\frac{\partial}{\partial t} \psi(\lambda, t)$ kann man jetzt formal auch über einen Operator $U(t, t_0)$ vornehmen:

$$U(t, t_0) := A^\dagger(t, t_0) C(t, t_0) ,$$

mit

$$|\psi(t)\rangle = C(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle ,$$

$$\frac{dC(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}(t) - X(t)) C(t, t_0) ,$$

denn

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda, t) &= \langle u_{\lambda}(t) | \psi(t) \rangle = \langle A(t, t_0) u_{\lambda}(t_0) | C(t, t_0) \psi(t_0) \rangle \\
&= \langle u_{\lambda}(t_0) | A^\dagger(t, t_0) C(t, t_0) \psi(t_0) \rangle = \langle u_{\lambda}(t_0) | U(t, t_0) \psi(t_0) \rangle .
\end{aligned}$$

Den Zeitentwicklungs-Operator $U(t, t_0)$ kann man folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned}
\frac{dU(t, t_0)}{dt} &= \frac{dA^\dagger(t, t_0)}{dt} C(t, t_0) + A^\dagger(t, t_0) \frac{dC(t, t_0)}{dt} \\
&= -\frac{i}{\hbar} A^\dagger(t, t_0) X^\dagger(t) C(t, t_0) + A^\dagger(t, t_0) \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}(t) - X(t)) C(t, t_0) \right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} A^\dagger(t, t_0) X(t) C(t, t_0) + A^\dagger(t, t_0) \left(-\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}(t) - X(t)) C(t, t_0) \right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} A^\dagger(t, t_0) \mathcal{H}(t) A(t, t_0) A^\dagger(t, t_0) C(t, t_0) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(x(t_0), p(t_0), t) U(t, t_0) .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir wie oben integrieren:

$$U(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}(x(t_0), p(t_0), t') dt'} ,$$

bzw. wenn \mathcal{H} explizit zeitunabhängig ist:

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(x(t_0), p(t_0))(t-t_0)} .$$

□

Wir hatten oben für die gewöhnliche Quantisierungsmethode festgesetzt, daß die klassische Variable F durch den selbstadjungierten Operator \mathcal{F} ersetzt wird und die klassische Größe $\frac{dF}{dt}$, die zeitliche Veränderung von F , durch einen selbstadjungierten Operator $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$, genannt *Observable der zeitlichen Veränderung des Operators \mathcal{F}* .

Aus der Definition von $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ in 6.4.2 und den Ergebnissen für $\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ in 6.4.11 und $\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle$ in 6.4.22 folgt der bildunabhängige Satz von Ehrenfest.

Lemma 6.4.5 (Ehrenfest) *Während die Operatoren $\frac{d}{dt}\mathcal{F}$ und $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ in der Quantentheorie i.A. nicht gleich sind, stimmen jedoch ihre Erwartungswerte überein:*

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{F}\rangle = \langle\overset{\circ}{\mathcal{F}}\rangle. \quad (6.4.29)$$

Die Observable \mathcal{F} heißt eine quantentheoretische Erhaltungsgröße, wenn gilt:

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{F}\rangle = \text{const.} . \quad (6.4.30)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\mathcal{F}(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\langle\psi | \mathcal{F}(t) \psi\rangle = \frac{d\langle\psi |}{dt}\mathcal{F}(t)\psi + \langle\psi | \left(\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t)\right)\psi + \langle\psi | \mathcal{F}(t) \frac{d\psi}{dt} \\ &= \langle\frac{i}{\hbar}(X(t) - \mathcal{H}(t))\psi(t) | \mathcal{F}(t)\psi\rangle + \langle\psi | (\overset{\circ}{\mathcal{F}}(t) + \frac{i}{\hbar}[(X(t) - \mathcal{H}(t)), \mathcal{F}(t)])\psi\rangle \\ &\quad + \langle\psi | \mathcal{F}(t) \frac{i}{\hbar}(X(t) - \mathcal{H}(t))\psi\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar}\langle\psi(t) | (X(t) - \mathcal{H}(t))\mathcal{F}(t)\psi\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle\psi | \mathcal{F}(t)(X(t) - \mathcal{H}(t))\psi\rangle \\ &\quad + \frac{i}{\hbar}\langle\psi | [(X(t) - \mathcal{H}(t)), \mathcal{F}(t)]\psi\rangle + \langle\psi | \overset{\circ}{\mathcal{F}}(t)\psi\rangle \\ &= \langle\psi | \overset{\circ}{\mathcal{F}}(t)\psi\rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Schrödinger-Bild:

Das Schrödinger-Bild wird definiert durch:

$$X^S := 0. \quad (6.4.31)$$

Damit folgt aus 6.4.18, 6.4.11, 6.4.21, 6.4.22, 6.4.27:

$$\frac{dA^S(t, t_0)}{dt} = \frac{i}{\hbar}X^S(t)A^S(t, t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^S(t, t_0) = \{1\}, \quad (6.4.32)$$

$$\frac{d\mathcal{F}^S}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X^S(t), \mathcal{F}^S(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{F}^S}{\partial t}\right)_{ex.} = \left(\frac{\partial\mathcal{F}^S}{\partial t}\right)_{ex.}, \quad (6.4.33)$$

$$\frac{d\mathcal{H}^S}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X^S(t), \mathcal{H}^S(t)] + \left(\frac{\partial\mathcal{H}^S}{\partial t}\right)_{ex.} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}^S}{\partial t}\right)_{ex.}, \quad (6.4.34)$$

$$\frac{d\mathcal{P}_{|\psi^S\rangle}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[X^S(t) - \mathcal{H}^S, \mathcal{P}_{|\psi^S\rangle}(t)] = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}^S, \mathcal{P}_{|\psi^S\rangle}(t)], \quad (6.4.35)$$

$$\frac{d}{dt}|\psi^S(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}^S(t) - X^S(t))|\psi^S(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}^S(t)|\psi^S(t)\rangle, \quad (6.4.36)$$

$$\frac{dC^S(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}^S(t) - X^S(t))C^S(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}^S(t)C^S(t, t_0),$$

$$C^S(t, t_0) = \hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathcal{H}^S(x^S, p^S, t')dt'}, \quad (6.4.37)$$

$$U(t, t_0) = A^{S\dagger}(t, t_0)C^S(t, t_0) = C^S(t, t_0) = \hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathcal{H}^S(x^S, p^S, t')dt'},$$

und wegen

$$\mathcal{H}^S(x^S(t), p^S(t), t) = \mathcal{H}^S(x^S(t_0), p^S(t_0), t) = \mathcal{H}^S(x^S, p^S, t)$$

gilt natürlich auch 6.4.27:

$$U(t, t_0) = \hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathcal{H}^S(x^S(t_0), p^S(t_0), t')dt'}. \quad (6.4.38)$$

Heisenberg-Bild:

Das Heisenberg-Bild wird definiert durch:

$$X^H(t) := \mathcal{H}^H(x^H(t), p^H(t), t). \quad (6.4.39)$$

Damit folgt aus 6.4.18, 6.4.11, 6.4.21, 6.4.22, 6.4.27:

$$\frac{dA^H(t, t_0)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\mathcal{H}^H(x^H(t), p^H(t), t)A^H(t, t_0), \quad (6.4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA^H(t, t_0)}{dt} &= \frac{i}{\hbar}A^H(t, t_0)\mathcal{H}^H(x^H(t_0), p^H(t_0), t)A^{H\dagger}(t, t_0)A^H(t, t_0) \\ &= \frac{i}{\hbar}A^H(t, t_0)\mathcal{H}^H(x^H(t_0), p^H(t_0), t), \end{aligned}$$

$$\frac{dA^{H\dagger}(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}^H(x^H(t_0), p^H(t_0), t) A^{H\dagger}(t, t_0), \quad (6.4.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}^H}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [X^H(t), \mathcal{F}^H(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^H}{\partial t}\right)_{ex.} \\ &= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}^H(x^H(t), p^H(t), t), \mathcal{F}^H(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^H}{\partial t}\right)_{ex.}, \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

$$\frac{d\mathcal{H}^H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}^H(x^H(t), p^H(t), t), \mathcal{H}^H(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{H}^H}{\partial t}\right)_{ex.} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}^H}{\partial t}\right)_{ex.}, \quad (6.4.43)$$

$$\frac{d\mathcal{P}_{|\psi^H\rangle}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [X^H(t) - \mathcal{H}^H, \mathcal{P}_{|\psi^H\rangle}(t)] = 0, \quad (6.4.44)$$

$$\frac{d}{dt} |\psi^H(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}^H(t) - X^H(t)) |\psi^H(t)\rangle = 0, \quad (6.4.45)$$

$$\frac{dC^H(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}^H(t) - X^H(t)) C^H(t, t_0) = 0,$$

$$C^H(t, t_0) = \{1\}, \quad (6.4.46)$$

$$U(t, t_0) = A^{H\dagger}(t, t_0) C^H(t, t_0) = A^{H\dagger}(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}^H(x^H(t_0), p^H(t_0), t') dt'}. \quad (6.4.47)$$

Wechselwirkungs-Bild (Dirac):

Der Hamilton-Operator sei zerlegbar in zwei Teile, $\mathcal{H}^W = \mathcal{H}_0^W + \mathcal{H}_1^W$, wobei \mathcal{H}_0^W *explizit zeitunabhängig* sei:

$$\mathcal{H}^W(x^W(t), p^W(t), t) = \mathcal{H}_0(x^W(t), p^W(t)) + \mathcal{H}_1^W(x^W(t), p^W(t), t) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0^W}{\partial t}\right)_{ex} = 0. \quad (6.4.48)$$

Dann wird das Wechselwirkungs-Bild definiert durch:

$$X^W(t) := \mathcal{H}_0^W(x^W(t), p^W(t)). \quad (6.4.49)$$

Die quantenmechanische Dynamik wird also durch \mathcal{H}_0^W bestimmt und damit ist \mathcal{H}_1^W selbst dann zeitabhängig, wenn es gar *keine explizite Zeitabhängigkeit* aufweist.

Damit folgt aus 6.4.18, 6.4.11, 6.4.21, 6.4.22, 6.4.27:

$$\frac{dA^W(t, t_0)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0)) A^W(t, t_0) \quad \Rightarrow \quad A^W(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0))(t-t_0)}, \quad (6.4.50)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}^W}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [X^W(t), \mathcal{F}^W(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^W}{\partial t}\right)_{ex.} \\
&= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0)), \mathcal{F}^W(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{F}^W}{\partial t}\right)_{ex.}, \quad (6.4.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}^W}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0)), \mathcal{H}^W(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{H}^W}{\partial t}\right)_{ex.} \\
&= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0)), \mathcal{H}_1^W(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1^W}{\partial t}\right)_{ex.}, \quad (6.4.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}_{|\psi^W\rangle}(t)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [X^W(t) - \mathcal{H}^W, \mathcal{P}_{|\psi^W\rangle}(t)] \\
&= -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_1^W(t), \mathcal{P}_{|\psi^W\rangle}(t)], \quad (6.4.53)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} |\psi^W(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_1^W(t) |\psi^W(t)\rangle = 0, \quad (6.4.54)$$

$$U^W(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}, \quad \text{mit 6.4.27,} \quad (6.4.55)$$

$$\frac{dC^W(t, t_0)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}^W(t) - X^W(t)) C^W(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_1^W(t) C^W(t, t_0),$$

$$C^W(t, t_0) = \hat{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t'), p^W(t'), t') dt'}. \quad (6.4.56)$$

Da dieses Integral wegen der t' -Abhängigkeit von $x^W(t')$ und $p^W(t')$ wohl eher mühsam zu berechnen ist,

$$x^W(t') = A^W(t', t_0) x^W(t_0) A^{W\dagger}(t', t_0), \quad p^W(t') = A^W(t', t_0) p^W(t_0) A^{W\dagger}(t', t_0),$$

wählt man zumeist den folgenden alternativen Weg:

$$C^W(t, t_0) = A^W(t, t_0) U^W(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0))(t-t_0)} \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}, \quad (6.4.57)$$

und nur, wenn \mathcal{H}_0^W und \mathcal{H}_1^W kommutieren, läßt sich dies zusammenzufassen zu:

$$C^W(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}. \quad (6.4.58)$$

6.5 Kausalität und Kramers-Kronig Relationen

Zur Erinnerung an unsere Physik-Vorlesungen seien hier einige einfache Zusammenhänge zu den Folgen der Kausalität nochmals vorgetragen.

Grundlegend in der Physik ist die Fourier-Transformation. Die üblichste Fouriertransformation ist eine Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist L^1 der Raum der Lebesgue-meßbaren komplex-wertigen Funktionen mit der 1-Norm, d.h. $\|f\|_1 = \int dt |f(t)|$, und C der Raum der komplex-wertigen stetigen Funktionen. Aus funktionalanalytischer Sicht ist es jedoch günstiger die Fouriertransformation als eine symmetrische Abbildung zwischen zwei gleichen Räumen zu definieren. Optimal ist dabei eine Einschränkung auf eine Teilmenge aus L^1 , den sog. Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nämlich den Teilraum der komplex-wertigen glatten Funktionen, d.h. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Funktionen, die für $|x| \rightarrow \infty$ schneller als jedes Polynom in x abfallen.

Seien also $\chi(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $\chi(\omega) := \mathcal{F}\chi(t)$ beide $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -Funktionen.

Kausalität bedeutet, daß in einem Ursache-Wirkungs-Zusammenhang die Ursache immer der Wirkung vorausgehen muß. Wenn also eine Ursache zu einem Zeitpunkt $t = 0$ geschieht, dann muß die Antwortfunktion $\chi(t) = 0$ sein für $t < 0$.

Lemma 6.5.1 *Hinreichend für die Kausalität einer Funktion $\chi(t)$ ist, daß ihre Fouriertransformierte $\chi(\omega)$ analytisch auf $\text{Im } \chi(\omega) > 0$ ist.*

Sei $\chi(\omega)$ analytisch für $\text{Im } \chi(\omega) \geq 0$, dann folgt für $t < 0$:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) = 0, \quad (6.5.1)$$

wenn C der Weg von $] -R, +R[$ plus dem in der oberen ω -Ebene geschlossenen Halbkreis C_R , im Grenzfall $R \rightarrow \infty$ ist.

Wenn $\chi(\omega)$ Pole auf der reellen ω -Achse hat kann man die Integration über die reelle ω -Achse um den Betrag $i\epsilon$ nach oben verschieben und erhält mit $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$ das entsprechende obige Ergebnis:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{-i(\omega+i\epsilon)t} \chi(\omega + i\epsilon) = 0, \quad (6.5.2)$$

wenn C der Weg von $] -R+i\epsilon, +R+i\epsilon[$ plus dem in der oberen ω -Ebene geschlossenen Halbkreis C_R , im Grenzfall $R \rightarrow \infty$ ist.

Für die Fourier-Rücktransformation folgt:

$$\chi(\omega + i\epsilon) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} \chi(t), \quad (6.5.3)$$

bzw., falls $\chi(\omega)$ keine Pole auf der reellen ω -Achse hat:

$$\chi(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(\omega + i\epsilon) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t). \quad (6.5.4)$$

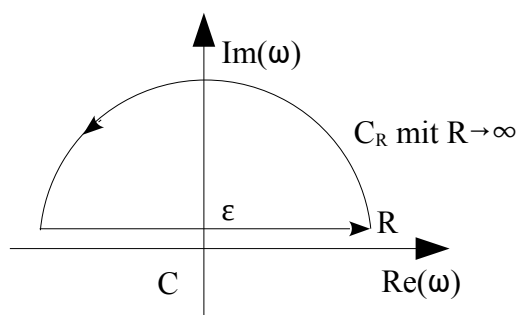


Abbildung 6.6: Integrationsweg C für $e^{-i\omega t}\chi(\omega)$

Beweis: Für $t < 0$ gilt auf dem oberen Halbkreis C_R : $\omega_R = \omega_{1,R} + i\omega_{2,R}$ mit $\omega_{1,R} \in \mathbb{R}$, $\omega_{2,R} \in \mathbb{R}_+$, und damit folgt

$$e^{-i\omega_R t} \chi(\omega_R) = e^{-i(\omega_{1,R} + i\omega_{2,R})t} \chi(\omega_R) = e^{i(\omega_{1,R} + i\omega_{2,R})|t|} \chi(\omega_R) = e^{i\omega_{1,R}|t|} e^{-\omega_{2,R}|t|} \chi(\omega_R).$$

Da $\chi(\omega_R)$ für $R \rightarrow \infty$ schneller als jedes Polynom abfällt folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} d\omega e^{-i\omega_R t} \chi(\omega_R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} d\omega e^{i\omega_{1,R}|t|} e^{-\omega_{2,R}|t|} \chi(\omega_R) = 0.$$

Weil $\chi(\omega)$ nach Voraussetzung in der oberen ω -Halbebene $\text{Im } \chi(\omega) \geq 0$ analytisch ist, folgt für das Fourier-Integral über den geschlossenen Weg C bei $t < 0$ aufgrund des Residuensatzes der Funktionentheorie:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{-i\omega t} \chi(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{i\omega_1|t|} e^{-\omega_2|t|} \chi(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Wenn $\chi(\omega)$ Pole auf der reellen ω -Achse hat, kann man die Integration über die reelle ω -Achse um den Betrag $i\epsilon$ nach oben verschieben. Damit ist $\chi(\omega)$ in der oberen

ω -Halbebene $\text{Im } \chi(\omega) > 0$ analytisch, und es folgt für das Fourier-Integral über den geschlossenen Weg C bei $t < 0$ aufgrund des Residuensatzes der Funktionentheorie wieder wie oben:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega+i\epsilon)t} \chi(\omega+i\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{-i(\omega+i\epsilon)t} \chi(\omega+i\epsilon) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d\omega e^{i\omega_1|t|} e^{-\omega_2|t|} e^{-\epsilon|t|} \chi(\omega+i\epsilon) = 0. \end{aligned}$$

Für die Fourier-Rücktransformation folgt damit

$$\begin{aligned} \chi(\omega+i\epsilon) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(\omega+i\epsilon)t} \chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} \chi(t) \\ &= \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\epsilon t} \chi(t) \quad \text{wegen } \chi(t) = 0 \text{ für } t < 0, \end{aligned}$$

Wenn $\chi(\omega)$ keine Pole auf der reellen ω -Achse hat kann wieder $\epsilon = 0$ gesetzt werden:

$$\chi(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(\omega+i\epsilon) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t). \quad \square$$

Die Kramers-Kronig Relationen sind nun eine einfache Folge des Residuensatzes der Funktionentheorie für kausale Funktionen.

Lemma 6.5.3 (Kramers-Kronig) Sei $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion, und $\mathcal{P}(\frac{1}{t-z})$ der Hauptwert des Integrals über t , dann gilt:

$$\text{Re}f(z) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\text{Im}f(t)}{(t-z)}, \quad \text{Im}f(z) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\text{Re}f(t)}{(t-z)}. \quad (6.5.5)$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\text{Im}f(t)}{(t-i\epsilon-z)}. \quad (6.5.6)$$

Beweis: Für eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ können wir mit einem fast gleichen Integrationsweg C wie oben, nur mit $t \rightarrow t - i\epsilon$, schreiben:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dt \frac{f(t)}{(t-i\epsilon-z)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} dt \frac{f(t)}{(t - i\epsilon - z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R dt \frac{f(t)}{(t - i\epsilon - z)} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t)}{(t - i\epsilon - z)}.
\end{aligned}$$

Die Identität

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

führt im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ zu einer Beziehung zwischen Distributionen (Fick (1972), S. 389):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x),$$

wobei \mathcal{P} den Hauptwert des Integrals und δ die Delta-Distribution bezeichnen.

Diesen Ausdruck können wir für den obigen Nenner von $f(z)$ einsetzen und erhalten:

$$\frac{1}{(t - z) - i\epsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{(t - z)}\right) + i\pi\delta(t - z) \quad \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t)}{(t - z)} + \frac{1}{2} f(z) \quad \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t)}{(t - z)}.$$

Die Kramers-Kroning Relationen sind nun Beziehungen zwischen dem Realteil von $f(z)$ und den dem Imaginärteil von $f(z)$:

$$\operatorname{Re}f(z) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Im}f(t)}{(t - z)}, \quad \operatorname{Im}f(z) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Re}f(t)}{(t - z)}.$$

Gleichzeitig läßt sich $f(z)$ auch allein aus $\operatorname{Im}(f(t))$ bestimmen, denn:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Im}f(t)}{(t - i\epsilon - z)} &= \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Im}f(t)}{(t - z)} + \frac{1}{2} \operatorname{Im}f(z) \\
&= \frac{1}{2i} \operatorname{Re}f(z) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}f(z) = \frac{1}{2i} f(z) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\operatorname{Im}f(t)}{(t - i\epsilon - z)}.$$

□

6.6 Ryōgo Kubo (1920-1995)

Kubo war ein bekannter japanischer Physiker, der sich mit theoretischer Festkörperphysik und Quantenstatistik beschäftigt hat. Er studierte an der Kaiserlichen Universität Tokio und wurde dort 1954 auf eine Professur berufen. Er forschte in den 1950'er Jahren über Relaxationsphänomene in der Kernspinresonanz. Aus diesen Überlegungen entstand sein Verfahren der *Linearen Antwort-Theorie* im Rahmen der Quantentheorie, das er im Jahr 1957 veröffentlichte (Kubo (1957)). Hiermit konnte Kubo lineare Transportkoeffizienten in Systemen nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht berechnen. Ein weiteres wichtiges Ergebnis dieser Arbeit war Kubos Beweis eines Fluktuations-Dissipations-Theorems im Rahmen der Quantentheorie.

Die 2-Punkt Korrelationfunktionen aus Kubos Linearer Antwort-Theorie sind ja letztlich Greensche Funktionen und Kubo formulierte Randbedingungen für diese Funktionen, um die Greenschen Funktionen analytisch ins Komplexe fortsetzen zu können und die imaginäre Zeit als inverse Temperatur interpretieren zu können. Dieser Gedanke wurde auch von Martin und Schwinger ausgearbeitet, so daß man heute von den KMS-Bedingungen an Greensche Funktionen spricht.

Im Jahr 1981 wechselte Kubo an die Universität Kyoto, und 1985 an die Keiō-Universität in Yokohama. Kubo erhielt zahlreiche Preise, u.a. 1977 die Boltzmann-Medaille. Zu seinem Gedenken wird seit 1997 alljährlich der *Kubo-Ryōgo-Gedenkpreis* vergeben.

[Quelle: en.wikipedia: Ryogo_Kubo]

6.7 Kubo-Formel

Die Kubo-Formel wurde nach dem jap. theoretischen Physiker Ryōgo Kubo (1920-1995) benannt. Er hatte dieses Verfahren der *Linearen Antwort-Theorie* im Rahmen der Quantentheorie bereits im Jahr 1957 vorgestellt und dann auf Transportvorgänge in Festkörpern angewandt (Kubo (1957)). Es muß aber gleich zu Beginn unserer Diskussion darauf hingewiesen werden (Kubo (1957), §3), daß implizit im Formalismus der *Linearen Antwort-Theorie* die Ergoden-Hypothese steckt, d.h. die Annahme, daß eine Mittelung über alle Zustände des Systems gleich einer Mittelung über die Zeit ist, oder anders gesagt, daß im Laufe der Zeit alle Zustände des Systems auch erreicht werden können. Eine weitere implizite Voraussetzung ist, daß es sich beim betrachteten System um ein isoliertes System handelt und die Störung adiabatisch eingeschaltet wird.

Wir folgen neben der grundlegenden Arbeit von Kubo (1957) hauptsächlich Tong (2012), S. 93 ff., wiederum in unseren Bezeichnungen.

Da die quantenmechanischen Erwartungswerte unabhängig vom angewandten Bild sind, finden sich in der Literatur Darstellungen, die ausschließlich das Heisenberg-Bild verwenden. Wir arbeiten hier aber zunächst im Wechselwirkungsbild, d.h. der Hamilton-Operator sei zerlegbar in zwei Teile, $\mathcal{H}^W = \mathcal{H}_0^W + \mathcal{H}_1^W$, wobei \mathcal{H}_0^W *explizit zeitunabhängig*

sei:

$$\mathcal{H}^W(x^W(t), p^W(t), t) = \mathcal{H}_0(x^W(t), p^W(t)) + \mathcal{H}_1^W(x^W(t), p^W(t), t) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0^W}{\partial t}\right)_{ex} = 0. \quad (6.7.1)$$

Der Operator $\mathcal{H}_1^W(x^W(t), p^W(t), t)$ sei eine *kleine* Störung des durch $\mathcal{H}_0(x^W(t), p^W(t))$ beschriebenen Systems. *Klein* bedeutet hier, daß die Antwort des Systems noch sinnvoll in einer linearen Näherung beschrieben werden kann.

Seien $\mathcal{O}_i(t)$ quantenmechanische Observable, d.h. selbstadjungierte Operatoren, und $\phi_i(t)$ externe klassische Felder, die zumeist als *Quellen* bezeichnet werden, dann soll die Störung des Systems beschrieben werden durch:

$$\mathcal{H}_1^W(t) := \sum_i \mathcal{O}_i(t) \phi_i(t). \quad (6.7.2)$$

Per Definition soll die Änderung der Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{O}_i(t)$ im Rahmen der *Linearen Antwort-Theorie* nur linear von den Quellen $\phi_i(t)$ abhängen:

$$\delta \langle \mathcal{O}_i(t) \rangle := \int dt' \chi_{ij}(t, t') \phi_j(t'). \quad (6.7.3)$$

Die Größe $\chi_{ij}(t, t')$ heißt *lineare Antwortfunktion*. Da in der Physik häufig Transportphänomene aufgrund der Einwirkung einer äußeren Quelle auf diese Weise beschrieben werden sind die $\chi_{ij}(t, t')$ die entsprechenden Transportkoeffizienten.

Aus mathematischer Sicht ist die die lineare Antwortfunktion eine *Greensche Funktion*. Wenn man eine lineare gewöhnliche inhomogene Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{L}(t)u(t) = \phi(t) \quad (6.7.4)$$

mit einem linearen gewöhnlichen Differentialoperator $\mathcal{L}(t)$ lösen möchte, so kann man zunächst die Greensche Funktion $G(t, t')$ von $\mathcal{L}(t)$ bestimmen und dann wegen der Linearität von $\mathcal{L}(t)$ die Lösung $u(t)$ als Superposition zusammensetzen:

$$\mathcal{L}(t)G(t, t') = \delta(t - t') \quad \Rightarrow \quad (6.7.5)$$

$$u(t) = \int dt' G(t, t') \phi(t'). \quad (6.7.6)$$

Wenn der Differentialoperator $\mathcal{L}(t)$ nicht von der Variablen t abhängt, also die homogene Differentialgleichung zeitinvariant ist, dann ist die Greensche Funktion von der Form $G(t - t')$ und es bietet sich an, das Fourier-transformierte System zu betrachten:

$$f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad \text{und} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} f(\omega), \quad (6.7.7)$$

denn Fourier-transformiert wird die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $u(\omega)$ lokal in der Frequenz ω :

$$\begin{aligned}
u(\omega) &= \int dt e^{i\omega t} \int dt' G(t-t') \phi(t') \\
&= \int dt e^{i\omega(t-t')} \int dt' G(t-t') e^{i\omega t'} \phi(t') \\
&= \int dt' \int dt e^{i\omega(t-t')} G(t-t') e^{i\omega t'} \phi(t') \\
&= \int dt' \int dt'' e^{i\omega t''} G(t'') e^{i\omega t'} \phi(t') \\
&= \int dt' G(\omega) e^{i\omega t'} \phi(t') = G(\omega) \phi(\omega). \tag{6.7.8}
\end{aligned}$$

Zurück zur Quantentheorie. Wenn $C(t, t_0)$ der Zeitentwicklungs-Operator für $|\psi(t)\rangle$ ist (6.4.24) und \hat{T} der Zeitordnungs-Operator (6.4.15):

$$|\psi(t)\rangle = C(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \tag{6.7.9}$$

dann folgt für $C(t, t_0)$ im Wechselwirkungsbild (6.4.57):

$$C(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0^W(x^W(t_0), p^W(t_0))(t-t_0)} \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}. \tag{6.7.10}$$

Im Folgenden gehen wir davon aus, daß \mathcal{H}_0^W und \mathcal{H}_1^W kommutieren, so daß sich die Exponentialfunktionen zusammenzufassen lassen zu (6.4.58):

$$C^W(t, t_0) = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}. \tag{6.7.11}$$

Für den statistischen Operator (6.4.4)

$$\rho := \sum_{\alpha} p^{\alpha} \mathcal{P}_{|\psi^{\alpha}\rangle} = \sum_{\alpha} p^{\alpha} |\psi^{\alpha}\rangle \langle \psi^{\alpha}| \tag{6.7.12}$$

folgt also

$$\rho(t) = C^W(t, t_0) \rho(t_0) C^{W\dagger}(t, t_0). \tag{6.7.13}$$

Damit kann man den Erwartungswert der Operatoren $\mathcal{O}_i(t)$ in Anwesenheit der Quellen $\phi_i(t)$ berechnen, wobei wir nur die linearen Terme der erste Ordnung der Störungsrechnung berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}_i(t) \rangle_{\vec{\phi}} &= \text{tr}(\rho(t) \mathcal{O}_i(t)) = \text{tr}(C^W(t, t_0) \rho(t_0) C^{W\dagger}(t, t_0) \mathcal{O}_i(t)) \\
&= \text{tr}(\rho(t_0) C^{W\dagger}(t, t_0) \mathcal{O}_i(t) C^W(t, t_0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr}(\rho(t_0) \hat{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'} \mathcal{O}_i(t) \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt'}) \\
&= \text{tr} \left(\rho(t_0) \left(\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt' \right) \mathcal{O}_i(t) \right. \\
&\quad \left. \left(\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t') dt' \right) \right) \\
&= \text{tr}(\rho(t_0) \mathcal{O}_i(t)) + \text{tr} \left(\rho(t_0) \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [\mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t'), \mathcal{O}_i(t)] \right) \\
&= \langle \mathcal{O}_i(t) \rangle_{\vec{\phi}=\vec{0}} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle [\mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t'), \mathcal{O}_i(t)] \rangle .
\end{aligned}$$

Den Zeitpunkt t_0 , zu dem die Quellen $\phi_i(t_0) = 0$ sind verschieben wir nach $t_0 \rightarrow -\infty$ und erhalten die *Kubo-Formel-1*:

$$\begin{aligned}
\delta \langle \mathcal{O}_i(t) \rangle &:= \langle \mathcal{O}_i(t) \rangle_{\vec{\phi}} - \langle \mathcal{O}_i(t) \rangle_{\vec{\phi}=\vec{0}} \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \langle [\mathcal{H}_1^W(x^W(t_0), p^W(t_0), t'), \mathcal{O}_i(t)] \rangle \\
&= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \sum_j \langle [\mathcal{O}_j(t'), \mathcal{O}_i(t)] \rangle \phi_j(t') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum_j \chi_{ij}(t-t') \phi_j(t') \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$\chi_{ij}(t-t') := -\frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(t')] \rangle \quad \text{Kubo-Formel-1} . \quad (6.7.14)$$

Jetzt erkennt man, warum es so vorteilhaft ist, in der Linearen Antwort-Theorie im Wechselwirkungsbild zu arbeiten, denn hier ist \mathcal{H}_0^W *explizit zeitunabhängig*, und damit ist die lineare Antwortfunktion auch translationsinvariant bzgl. der Zeit, d.h. $\chi_{ij}(t, t') = \chi_{ij}(t-t')$ und es folgt wie oben:

$$\delta \langle \mathcal{O}_i(\omega) \rangle = \sum_j \chi_{ij}(\omega) \phi_j(\omega) , \quad \text{Kubo-Formel-2} . \quad (6.7.15)$$

Im physikalischen Sprachgebrauch nennt man $\chi_{ij}(0)$ die Suszeptibilität:

$$\chi_{ij}(0) := \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial \delta \langle \mathcal{O}_i(\omega) \rangle}{\partial \phi_j(\omega)} . \quad (6.7.16)$$

Diese lineare Antwortfunktion $\chi_{ij}(\omega)$ im Frequenzraum ist nun im Regelfall eine komplexe Funktion. Daher kann man den Real- und den Imaginärteil von $\chi_{ij}(\omega)$ separat untersuchen:

$$\chi_{ij}(\omega) = \operatorname{Re}(\chi_{ij}(\omega)) + i \operatorname{Im}(\chi_{ij}(\omega)) =: \chi'_{ij}(\omega) + i\chi''_{ij}(\omega). \quad (6.7.17)$$

$$\begin{aligned} \chi'_{ij}(\omega) &= \frac{1}{2}(\chi_{ij}(\omega) + \chi_{ij}^*(\omega)) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi_{ij}(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\chi_{ij}(t) + \chi_{ij}(-t)) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\chi'_{ij}(\omega) = \chi'_{ij}(-\omega). \quad (6.7.18)$$

$\chi'_{ij}(\omega)$ heißt der *reaktive Teil* der linearen Antwortfunktion und ist eine gerade Funktion.

$$\begin{aligned} \chi''_{ij}(\omega) &= -\frac{i}{2}(\chi_{ij}(\omega) - \chi_{ij}^*(\omega)) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi_{ij}(t)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} (\chi_{ij}(t) - \chi_{ij}(-t)) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\chi''_{ij}(\omega) = -\chi''_{ij}(-\omega). \quad (6.7.19)$$

Weil $\chi''_{ij}(\omega)$ nicht invariant unter Zeitumkehr ist nennt man es den *dissipativen Teil* der linearen Antwortfunktion. $\chi''_{ij}(\omega)$ ist eine ungerade Funktion.

Den Zusammenhang von $\chi''_{ij}(\omega)$ mit der Dissipation kann man auf die folgende Weise tiefer verstehen. Der einfacheren Schreibweise wegen betrachten wir bei dieser Überlegung nur den Fall mit einer einzigen Quelle, also $\mathcal{H}_1^W(t) := \mathcal{O}(t)\phi(t)$.

Lemma 6.7.1 *Sei ein periodischer Quellterm mit einer Eigenfrequenz Ω gegeben als $\mathcal{H}_1^W(t) := \mathcal{O}(t)\phi(t) := \mathcal{O}(t) \operatorname{Re}(\phi_0 e^{-i\Omega t})$. Sei weiter $W(t) = \operatorname{tr}(\rho\mathcal{H})$ der Erwartungswert der mit dem System ausgetauschten Energie. Dann gilt für die mittlere Energieänderung des Systems:*

$$\overline{\frac{dW(t)}{dt}} = \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \frac{dW(t)}{dt} = 2\Omega |\phi_0|^2 \chi''(\Omega). \quad (6.7.20)$$

Die Energieänderung des Systems ist also proportional zu $\chi''(\Omega) = \operatorname{Im}(\chi(\Omega))$, dem Imaginärteil der linearen Antwortfunktion $\chi(\Omega)$, weshalb $\chi''(\Omega)$ auch der dissipative Teil der linearen Antwortfunktion heißt.

Beweis: Sei $W(t) = \text{tr}(\rho\mathcal{H})$ der Erwartungswert der mit dem System ausgetauschten Energie. Solange man nur Erwartungswerte betrachtet ist die Wahl des quantenmechanischen Bildes ohne Bedeutung. Wir wählen das Schrödingerbild erhalten mit 6.4.33, 6.4.34, 6.4.35:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} &= 0, \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)_{ex.} = \mathcal{O} \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho(t)]. \\ \frac{dW(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \text{tr}(\rho\mathcal{H}) = \text{tr}\left(\frac{d\rho}{dt}\mathcal{H} + \rho \frac{d\mathcal{H}}{dt}\right) \\ &= \text{tr}\left(-\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \rho(t)]\mathcal{H}\right) + \text{tr}\left(\rho \mathcal{O} \frac{d\phi(t)}{dt}\right) \\ &= \text{tr}\left(\rho \mathcal{O} \frac{d\phi(t)}{dt}\right) = \text{tr}(\rho \mathcal{O}) \frac{d\phi(t)}{dt} = \\ &= \langle \mathcal{O} \rangle \frac{d\phi(t)}{dt} = \delta \langle \mathcal{O} \rangle \frac{d\phi(t)}{dt} + \langle \mathcal{O} \rangle|_{\phi=0} \frac{d\phi(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Um ein grundlegendes Verständnis zu entwickeln wählt man jetzt einen periodischen Quellterm der Form $\phi(t) = \text{Re}(\phi_0 e^{-i\Omega t})$ und mittelt $\frac{dW(t)}{dt}$ über eine Periode:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dW(t)}{dt}} &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \frac{dW(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \delta \langle \mathcal{O} \rangle \frac{d\phi(t)}{dt} + \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \langle \mathcal{O} \rangle|_{\phi=0} \frac{d\phi(t)}{dt} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t-t') \phi(t') \frac{d\phi(t)}{dt} \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \langle \mathcal{O} \rangle|_{\phi=0} \phi(t)|_0^{2\pi/\Omega} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \phi(t') \frac{d\phi(t)}{dt} + \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \langle \mathcal{O} \rangle|_{\phi=0} (\text{Re}(\phi_0 e^{-i\Omega 2\pi/\Omega}) - \text{Re}(\phi_0 e^{-i0})) \\ &= \left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \left(\phi_0 e^{-i\Omega t'} + \phi_0^* e^{i\Omega t'} \right) \left(-i\Omega \phi_0 e^{-i\Omega t} + i\Omega \phi_0^* e^{i\Omega t} \right) \\
& = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} \\
& * \left(-i\Omega \phi_0^2 e^{-i\Omega(t'+t)} + i\Omega |\phi_0|^2 e^{-i\Omega(t'-t)} - i\Omega |\phi_0|^2 e^{i\Omega(t'-t)} + i\Omega \phi_0^{*2} e^{i\Omega(t'+t)} \right) \\
& = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) \\
& * \left(-i\Omega \phi_0^2 e^{-i(\omega+\Omega)t'} e^{i(\omega-\Omega)t} + i\Omega |\phi_0|^2 e^{-i(\omega+\Omega)t'} e^{i(\omega+\Omega)t} \right. \\
& \quad \left. -i\Omega |\phi_0|^2 e^{-i(\omega-\Omega)t'} e^{i(\omega-\Omega)t} + i\Omega \phi_0^{*2} e^{-i(\omega-\Omega)t'} e^{i(\omega+\Omega)t} \right) .
\end{aligned}$$

Zunächst integrieren wir über $\frac{1}{2\pi} dt'$ und erhalten δ -Distributionen wegen

$$\delta(\omega - \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(\omega-\Omega)t'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i(\omega-\Omega)t'} \quad \text{etc.}$$

Anschließend integrieren wir über $d\omega$ und zuletzt führen wir die Integration über dt aus. So bleiben letztlich nur die beiden Terme mit $|\phi_0|^2$ übrig.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{dW(t)}}{dt} & = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi(\omega) \\
& * \left(-i\Omega \phi_0^2 \delta(\omega + \Omega) e^{i(\omega-\Omega)t} + i\Omega |\phi_0|^2 \delta(\omega + \Omega) e^{i(\omega+\Omega)t} \right. \\
& \quad \left. -i\Omega |\phi_0|^2 \delta(\omega - \Omega) e^{i(\omega-\Omega)t} + i\Omega \phi_0^{*2} \delta(\omega - \Omega) e^{i(\omega+\Omega)t} \right) \\
& = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{-1} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \\
& * \left(-i\Omega \phi_0^2 \chi(-\Omega) e^{-i2\Omega t} + i\Omega |\phi_0|^2 \chi(-\Omega) e^{i(-\Omega+\Omega)t} \right. \\
& \quad \left. -i\Omega |\phi_0|^2 \chi(\Omega) e^{i(\Omega-\Omega)t} + i\Omega \phi_0^{*2} \chi(\Omega) e^{i2\Omega t} \right) \\
& = \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right)^{-1} \left(-i\Omega \phi_0^2 \chi(-\Omega) \frac{1}{(-2i\Omega)} e^{-i2\Omega t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi/\Omega} + i\Omega |\phi_0|^2 \chi(-\Omega) \frac{2\pi}{\Omega} \right. \\
& \quad \left. -i\Omega |\phi_0|^2 \chi(\Omega) \frac{2\pi}{\Omega} + i\Omega \phi_0^{*2} \chi(\Omega) \frac{1}{(-2i\Omega)} e^{i2\Omega t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi/\Omega} \right)
\end{aligned}$$

$$= i\Omega|\phi_0|^2(\chi(-\Omega) - \chi(\Omega)) .$$

Nun ist $\text{Re}(\chi(\Omega))$ gerade und $\text{Im}(\chi(\Omega))$ ungerade und damit folgt:

$$\frac{dW(t)}{dt} = 2\Omega|\phi_0|^2 \chi''(\Omega) . \quad \square$$

Was ist nun die mikroskopische Ursache für den dissipativen Teil χ'' der linearen Antwortfunktion und damit für den Energieverlust? Dies kann man sehr schön anhand der Spektraldarstellung $\chi_{ij}(\omega)$ der linearen Antwortfunktion sehen.

Hier trifft man in der Literatur häufig auf zwei verschiedene Spektraldarstellungen, die sich im verwendeten statistischen Operator ρ unterscheiden.

Spektraldarstellung-I: hier präpariert man das System zu Beginn in einem Zustand $|\psi^0\rangle$:

$$\rho := \mathcal{P}_{|\psi^0\rangle} = |\psi^0\rangle\langle\psi^0| .$$

Für die Zeitentwicklung der Operatoren verwenden wir wieder das Wechselwirkungsbild mit

$$\mathcal{H}^W = \mathcal{H}_0^W + \mathcal{H}_1^W ,$$

wobei \mathcal{H}_0^W explizit zeitunabhängig sei. Mit 6.4.10, 6.4.13 und 6.4.49 folgt für die Zeitabhängigkeit der Operatoren $\mathcal{O}_i(t)$:

$$\mathcal{O}_i(t) = A(t, t_0)\mathcal{O}_i(t)A^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W(t_0)(t-t_0)}\mathcal{O}_i(t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W(t_0)(t-t_0)} ,$$

bzw. mit $t_0 = 0$:

$$\mathcal{O}_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t}\mathcal{O}_i(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t} .$$

Die Kubo-Formel-1 (6.7.14) für $t' = 0$ lautet:

$$\chi_{ij}(t) = -\frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle[\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]\rangle .$$

Damit folgt für die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\omega) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle[\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \text{tr}(\rho[\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \text{tr}(|\psi^0\rangle\langle\psi^0| [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{m=0}^\infty \langle\psi^m | \psi^0\rangle \langle\psi^0 | [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)] \psi^m\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle\psi^0 | [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)] \psi^0\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle\psi^0 | [e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t}, \mathcal{O}_j(0)] \psi^0\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle\psi^0 | \{e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t} \mathcal{O}_j(0) \\
&\quad - \mathcal{O}_j(0) e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_0^W t}\} \psi^0\rangle .
\end{aligned}$$

Jetzt schiebt man in der Mitte noch ein $\sum_n |n\rangle\langle n|$ ein und erhält:

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}(\omega) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_n \{e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t} \langle\psi^0 | \mathcal{O}_i(0) n\rangle \langle e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} n | \mathcal{O}_j(0) \psi^0\rangle \\
&\quad - \langle\psi^0 | \mathcal{O}_j(0) e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} n\rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \psi^0\rangle\} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_n \{e^{\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_n)t} \langle\psi^0 | \mathcal{O}_i(0) n\rangle \langle n | \mathcal{O}_j(0) \psi^0\rangle \\
&\quad - e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t} \langle\psi^0 | \mathcal{O}_j(0) n\rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) \psi^0\rangle\} .
\end{aligned}$$

Zunächst stellt man fest, daß sich in der Summe die $n = 0$ Terme, d.h. die Terme mit $|n\rangle = |\psi^0\rangle$, aufheben. Also summieren wir jetzt nur noch über $n \neq 0$.

Wenn man die dt -Integration ausführen will, so stellt man fest, daß bei $\omega = \frac{E_n - E_0}{\hbar}$ Pole auftreten und daß das Integral bei $t = \infty$ nicht konvergiert. Beides zeigt an, daß wir die Kausalitäts-Bedingung von $\chi_{ij}(t)$ gemäß 6.5.1 korrekt berücksichtigen müssen, und d.h., daß wir die Pole auf der ω -Achse vermeiden, indem wir ω ersetzen durch $\omega + i\epsilon$:

$$\chi_{ij}(\omega + i\epsilon) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt e^{i(\omega + i\epsilon)t} \sum_{n \neq 0} \{e^{\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_n)t} \langle\psi^0 | \mathcal{O}_i(0) n\rangle \langle n | \mathcal{O}_j(0) \psi^0\rangle$$

$$\begin{aligned}
& - e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t} \langle \psi^0 | \mathcal{O}_j(0) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) | \psi^0 \rangle \\
& = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{0n} (\mathcal{O}_j(0))_{n0}}{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})} e^{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})t} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\mathcal{O}_j(0))_{0n} (\mathcal{O}_i(0))_{n0}}{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_0}{\hbar})} e^{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_0}{\hbar})t} \right\} \Bigg|_{t=0}^{\infty} \\
& = \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{0n} (\mathcal{O}_j(0))_{n0}}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})} - \frac{(\mathcal{O}_j(0))_{0n} (\mathcal{O}_i(0))_{n0}}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_0}{\hbar})} \right\} \quad \text{Kubo-Formel-3 .}
\end{aligned} \tag{6.7.21}$$

Spektraldarstellung-II: hier verwendet man für den statistischen Operator ρ das kanonische Ensemble:

$$\rho := e^{-\beta \mathcal{H}} := e^{-\frac{1}{kT} \mathcal{H}} . \tag{6.7.22}$$

Deshalb ist es hier einfacher für die Zeitentwicklung der Operatoren das Heisenbergbild zu verwenden. Sei also

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^H .$$

Mit 6.4.10, 6.4.13 und 6.4.39 folgt für die Zeitabhängigkeit der Operatoren $\mathcal{O}_i(t)$:

$$\mathcal{O}_i(t) = A(t, t_0) \mathcal{O}_i(t_0) A^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t_0)(t-t_0)} \mathcal{O}_i(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}(t_0)(t-t_0)} ,$$

bzw. mit $t_0 = 0$:

$$\mathcal{O}_i(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t} .$$

Die Kubo-Formel-1 (6.7.14) für $t' = 0$ lautet:

$$\chi_{ij}(t) = -\frac{i}{\hbar} \theta(t) \langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)] \rangle .$$

Damit folgt für die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}(\omega) & = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)] \rangle \\
& = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \text{tr}(e^{-\beta \mathcal{H}} [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]) \\
& = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \text{tr}(e^{-\beta \mathcal{H}} [e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}t}, \mathcal{O}_j(0)])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \operatorname{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \{ e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \mathcal{O}_j(0) \\
&\quad - \mathcal{O}_j(0) e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \}).
\end{aligned}$$

Jetzt berechnet man die Spur mit einem vollständigen Satz von Energieeigenvektoren $|m\rangle$ zu den Energieeigenwerten E_m , schiebt in der Mitte noch ein $\sum_n |n\rangle\langle n|$ ein und erhält:

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}(\omega) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} \{ e^{\frac{i}{\hbar} E_m t} \langle m | \mathcal{O}_i(0) | n \rangle \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \mathcal{O}_j(0) | m \rangle \\
&\quad - \langle m | \mathcal{O}_j(0) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} | m \rangle \}) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} \{ e^{\frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) t} \langle m | \mathcal{O}_i(0) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_j(0) | m \rangle \\
&\quad - e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) t} \langle m | \mathcal{O}_j(0) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) | m \rangle \}).
\end{aligned}$$

Wenn man die dt -Integration ausführen will, so stellt man fest, daß bei $\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ Pole auftreten und daß das Integral bei $t = \infty$ nicht konvergiert. Beides zeigt an, daß wir die Kausalitäts-Bedingung von $\chi_{ij}(t)$ gemäß 6.5.1 korrekt berücksichtigen müssen, und d.h., daß wir die Pole auf der ω -Achse vermeiden, indem wir ω ersetzen durch $\omega + i\epsilon$:

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}(\omega + i\epsilon) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega + i\epsilon)t} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} \{ e^{\frac{i}{\hbar} (E_m - E_n) t} \langle m | \mathcal{O}_i(0) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_j(0) | m \rangle \\
&\quad - e^{\frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) t} \langle m | \mathcal{O}_j(0) | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_i(0) | m \rangle \}) \\
&= -\frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} \left\{ \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{mn} (\mathcal{O}_j(0))_{nm}}{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_m - E_n}{\hbar})} e^{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_m - E_n}{\hbar})t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathcal{O}_j(0))_{mn} (\mathcal{O}_i(0))_{nm}}{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_m}{\hbar})} e^{i(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_m}{\hbar})t} \right\} \Bigg|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} e^{-\beta E_m} \left\{ \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{mn} (\mathcal{O}_j(0))_{nm}}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_m - E_n}{\hbar})} - \frac{(\mathcal{O}_j(0))_{mn} (\mathcal{O}_i(0))_{nm}}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_m}{\hbar})} \right\} \\
&= \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}) \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{mn} (\mathcal{O}_j(0))_{nm}}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_m - E_n}{\hbar})} \quad \text{Kubo-Formel-4} \quad (6.7.23)
\end{aligned}$$

Nun kann man $\chi_{ij}(\omega)$ wieder in Real- und Imaginärteil aufteilen:

$$\chi_{ij}(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}) \frac{(\mathcal{O}_i(0))_{mn} (\mathcal{O}_j(0))_{nm}}{(\omega + \frac{E_m - E_n}{\hbar})^2 + \epsilon^2} (\omega + \frac{E_m - E_n}{\hbar} - i\epsilon) .$$

Damit ergibt sich für den Imaginärteil $\chi''_{ij}(\omega)$:

$$\chi''_{ij}(\omega + i\epsilon) = -\frac{1}{\hbar} \sum_{m,n} (e^{-\beta E_m} - e^{-\beta E_n}) (\mathcal{O}_i(0))_{mn} (\mathcal{O}_j(0))_{nm} \frac{\epsilon}{(\omega + \frac{E_m - E_n}{\hbar})^2 + \epsilon^2} \quad (6.7.24)$$

und mit $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$ geht der letzte Faktor für $\epsilon \rightarrow 0$ im Distributionssinne in eine δ -Distribution über

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi''_{ij}(\omega + i\epsilon) \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m,n} \frac{\epsilon}{(\omega + \frac{E_m - E_n}{\hbar})^2 + \epsilon^2} = \sum_{m,n} \pi \delta(\omega + \frac{E_m - E_n}{\hbar}) . \quad (6.7.25)$$

Es sind also gerade die Absorptionsvorgänge des Systems für den dissipativen Teil der linearen Antwortfunktion verantwortlich.

Kubo hat zum Schluß seiner fundamentalen Arbeit Kubo (1957) noch ein quantenmechanisches Fluktuations-Dissipations-Theorem bewiesen. Er hat gezeigt, daß der dissipative Teil der linearen Antwortfunktion $\chi''_{ij}(\omega)$ im thermodynamischen Gleichgewicht proportional zur 2-Punkt Korrelationsfunktion $S_{ij}(\omega)$ ist. Dies ist ein sehr weitreichendes Ergebnis der Quantenstatistik.

Lemma 6.7.3 (Fluktuations-Dissipations-Theorem) *Sei wie oben ein Quellterm gegeben als $\mathcal{H}_1^W(t) := \sum_i \mathcal{O}_i(t) \phi_i(t)$ und sei*

$$S_{ij}(t) := \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle \quad (6.7.26)$$

die entsprechende 2-Punkt Korrelationsfunktion, welche die Quanten-Fluktuationen des Systems beschreibt. Dabei setzen wir voraus, daß $S_{ij}(t)$ analytisch für komplexe Zeiten $0 \leq \text{Im}(t) \leq \hbar\beta$ fortgesetzt werden kann und zudem im Unendlichen verschwindet, d.h. $\lim_{\text{Re}(t) \rightarrow \pm\infty} S_{ij}(t) = 0$.

Das System werde wieder beschrieben durch das kanonische Ensemble bei der Temperatur T :

$$\rho := e^{-\beta \mathcal{H}} := e^{-\frac{1}{kT} \mathcal{H}} , \quad (6.7.27)$$

und durch die daraus folgende mittlere Besetzungszahl $n_B(\hbar\omega)$ für wechselwirkungsfreie Bosonen (Bose-Einstein-Statistik):

$$n_B(\hbar\omega) = \frac{1}{e^{\beta \hbar\omega} - 1} . \quad (6.7.28)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt das quantenmechanische Fluktuations-Dissipations-Theorem:

$$S_{ij}(\omega) = -2\hbar (n_B(\hbar\omega) + 1) \chi_{ij}''(\omega) . \quad (6.7.29)$$

Bei $n_B(\hbar\omega) = 0$ sieht man sehr schön den Beitrag des Vakuums auf die Fluktuationen $S_{ij}(\omega)$.

Beweis: Aus der Kubo-Formel-1 (6.7.14) folgt für $\chi_{ij}^*(t)$:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(t-t') &= -\frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(t')] \rangle \quad \Rightarrow \\ \chi_{ij}^*(t-t') &= \frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(t')] \rangle^* \\ &= \frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle (\mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(t'))^\dagger - (\mathcal{O}_j(t') \mathcal{O}_i(t))^\dagger \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle \mathcal{O}_j^\dagger(t') \mathcal{O}_i^\dagger(t) - \mathcal{O}_i^\dagger(t) \mathcal{O}_j^\dagger(t') \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \theta(t'-t) \langle \mathcal{O}_j(t') \mathcal{O}_i(t) - \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(t') \rangle \\ &= \chi_{ji}(t'-t) . \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $t' = 0$ und erhalten für den Imaginärteil $\chi_{ij}''(t) = \frac{1}{2i}(\chi_{ij}(t) - \chi_{ij}^*(t))$:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}''(t) &= \frac{1}{2i}(\chi_{ij}(t) - \chi_{ij}^*(t)) = \frac{1}{2i}(\chi_{ij}(t) - \chi_{ji}(-t)) \\ &= -\frac{1}{2\hbar} \theta(t) \{ \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) - \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle \} \\ &\quad + \frac{1}{2\hbar} \theta(-t) \{ \langle \mathcal{O}_j(-t) \mathcal{O}_i(0) - \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(-t) \rangle \} . \end{aligned}$$

Nun kann man die Zeittranslations-Invarianz ausnutzen

$$\langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle = \langle \mathcal{O}_j(-t) \mathcal{O}_i(0) \rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(-t) \rangle = \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle ,$$

und die θ -Funktionen wegen $\theta(t) + \theta(-t) = 1$ zusammenfassen:

$$\chi_{ij}''(t) = -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_j(-t) \mathcal{O}_i(0) \rangle .$$

Im nächsten Schritt setzt man im 2. Term die Zeitvariable t ins Komplexe fort und interpretiert $\hbar\beta = it$ als eine komplexe 'Zeit':

$$\chi_{ij}''(t) = -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_j(-t) \mathcal{O}_i(0))$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_j(-t) e^{+\beta\mathcal{H}} e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_i(0)) \\
&= -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_i(0) e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_j(-t) e^{+\beta\mathcal{H}}) \\
&= -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_i(0) e^{i(i\beta\mathcal{H})} \mathcal{O}_j(-t) e^{-i(i\beta\mathcal{H})}) \\
&= -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \text{tr}(e^{-\beta\mathcal{H}} \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(-t + i\hbar\beta)) \\
&= -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(-t + i\hbar\beta) \rangle .
\end{aligned}$$

Wiederum mit der Zeittranslationsinvarianz wird daraus:

$$\chi''_{ij}(t) = -\frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \langle \mathcal{O}_i(t - i\hbar\beta) \mathcal{O}_j(0) \rangle .$$

$$\begin{aligned}
\chi''_{ij}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \chi''_{ij}(t) \\
&= -\frac{1}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle + \frac{1}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \mathcal{O}_i(t - i\hbar\beta) \mathcal{O}_j(0) \rangle \\
&= -\frac{1}{2\hbar} S_{ij}(\omega) + \frac{1}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \mathcal{O}_i(t - i\hbar\beta) \mathcal{O}_j(0) \rangle \\
&= -\frac{1}{2\hbar} S_{ij}(\omega) + \frac{1}{2\hbar} \left(\int_{-\infty+i\hbar\beta}^{\infty+i\hbar\beta} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle \right) .
\end{aligned}$$

Das Integral in der komplexen Ebene kann man jetzt wegen der vorausgesetzten Analytizität von $\langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle$ folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty+i\hbar\beta}^{\infty+i\hbar\beta} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+i\hbar\beta}^{R+i\hbar\beta} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+i\hbar\beta}^{-R} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle
\end{aligned}$$

$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{+R}^{+R+i\hbar\beta} dt' e^{i\omega(t'+i\hbar\beta)} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle$$

Der 1. und der 3. Term verschwinden im Grenzwert $R \rightarrow \infty$, weil dort nach Voraussetzung die Korrelationsfunktion $S_{ij}(t) = \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle$ ja verschwindet. Also bleibt nur der 2. Term übrig, die Integration über die reelle Achse:

$$\begin{aligned} \chi''_{ij}(\omega) &= -\frac{1}{2\hbar} S_{ij}(\omega) + \frac{1}{2\hbar} e^{-\beta\hbar\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle \mathcal{O}_i(t') \mathcal{O}_j(0) \rangle \right) \\ &= -\frac{1}{2\hbar} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) S_{ij}(\omega). \end{aligned}$$

$$S_{ij}(\omega) = -2\hbar \frac{1}{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})} \chi''_{ij}(\omega).$$

Mit

$$n_B(\hbar\omega) + 1 = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + 1 = \frac{1 + e^{\beta\hbar\omega} - 1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

folgt sofort:

$$S_{ij}(\omega) = -2\hbar (n_B(\hbar\omega) + 1) \chi''_{ij}(\omega). \quad \square$$

6.8 Kubo-Formel für die elektrische Leitfähigkeit

Wir folgen Tong (2012), S. 100 ff. und Tong (2016), S. 54 ff. wiederum in unseren Bezeichnungen. Dieser Abschnitt stellt eine Anwendung der oben entwickelten Linearen Antwort-Theorie auf die elektrische Leitfähigkeit als Antwort auf ein angelegtes elektrisches Feld dar.

Wir arbeiten hierbei wieder im Wechselwirkungsbild, d.h. der Hamilton-Operator sei zerlegbar in zwei Teile, $\mathcal{H}^W = \mathcal{H}_0^W + \mathcal{H}_1^W$, wobei \mathcal{H}_0^W *explizit zeitunabhängig* sei:

$$\mathcal{H}^W(x^W(t), p^W(t), t) = \mathcal{H}_0(x^W(t), p^W(t)) + \mathcal{H}_1^W(x^W(t), p^W(t), t) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0^W}{\partial t} \right)_{ex} = 0. \quad (6.8.1)$$

Der Operator $\mathcal{H}_1^W(x^W(t), p^W(t), t) := -\sum_i J_i(t) A_i(t)$ sei eine *kleine* Störung des durch $\mathcal{H}_0(x^W(t), p^W(t))$ beschriebenen Systems. *Klein* bedeutet hier, daß die Antwort des Systems noch sinnvoll in einer linearen Näherung beschrieben werden kann.

Die elektrische Feldstärke E_i verwenden wir sowohl als Funktion der Zeit, als auch fouriertransformiert als Funktion der Frequenz:

$$f(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad \text{und} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} f(\omega) . \quad (6.8.2)$$

$$A_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} A_i(\omega) \quad \Rightarrow \quad (6.8.3)$$

$$E_i(t) := -\frac{\partial A_i(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int d\omega (-i\omega) e^{-i\omega t} A_i(\omega) \quad \Rightarrow \quad (6.8.4)$$

$$E_i(\omega) = i\omega A_i(\omega) . \quad (6.8.5)$$

Mit der Kubo-Formel-1 (6.7.14) folgt:

$$\begin{aligned} \delta\langle J_i(t) \rangle &:= \langle J_i(t) \rangle|_{\vec{A}} - \langle J_i(t) \rangle|_{\vec{A}=\vec{0}} \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \sum_j \langle [J_j(t'), J_i(t)] \rangle (-A_j(t')) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \sum_j \langle [J_j(t'), J_i(t)] \rangle A_j(t') \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') \sum_j \langle [J_i(t), J_j(t')] \rangle A_j(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum_j \chi_{ij}(t, t') A_j(t') \quad \text{mit} \\ \chi_{ij}(t, t') &:= \frac{i}{\hbar} \theta(t-t') \langle [J_i(t), J_j(t')] \rangle \quad \text{Kubo-Formel-1} . \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

Das zu 6.7.14 unterschiedliche Vorzeichen rührt vom unterschiedlichen Vorzeichen von \mathcal{H}_1^W her und ist Konvention.

Die lineare Antwortfunktion ist translationsinvariant bzgl. der Zeit, also können wir wieder schreiben $\chi_{ij}(t, t') = \chi_{ij}(t - t')$:

$$\chi_{ij}(t - t') = \frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \langle [J_i(t), J_j(t')] \rangle \quad \Rightarrow \quad (6.8.7)$$

$$\delta\langle J_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sum_i \chi_{ij}(t-t') A_j(t'). \quad (6.8.8)$$

Fouriertransformiert wird daraus wie oben (siehe 6.7.8) die Kubo-Formel-2 (Tong (2016)):

$$\begin{aligned} \delta\langle J_i(\omega) \rangle &= \sum_j \chi_{ij}(\omega) A_j(\omega) = \sum_j \chi_{ij}(\omega) \frac{E_j}{i\omega} \\ &= \frac{1}{i\omega} \sum_j \chi_{ij}(\omega) E_j. \end{aligned} \quad (6.8.9)$$

Der Leitfähigkeitstensor ist definiert als

$$\langle J_i(\omega) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \sigma_{ij}(\omega) E_j(\omega), \quad (6.8.10)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\omega) &:= \frac{1}{i\omega} \chi_{ij}(\omega) = \frac{i}{i\hbar\omega} \int dt' e^{i\omega t'} \theta(t-t') \langle [J_i(t), J_j(t')] \rangle \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \int dt' e^{i\omega t'} \theta(t-t') \langle [J_i(t), J_j(t')] \rangle. \end{aligned} \quad (6.8.11)$$

Zum Schluß wollen wir noch die Spektral-Darstellung von $\sigma_{ij}(\omega)$ angeben. Wir stützen uns dabei auf unsere obige Kubo-Formel-3 (6.7.21). Zugleich nutzen wir

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\omega + i\epsilon) &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | (J_j(0) \psi^0) \rangle}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})} - \frac{\langle \psi^0 | (J_j(0) | n \rangle \langle n | J_i(0) \psi^0 \rangle}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_0}{\hbar})} \right\} \Rightarrow \\ \sigma_{ij}(\omega + i\epsilon) &= \frac{1}{i\omega} \chi_{ij}(\omega + i\epsilon) \\ &= -\frac{i}{\hbar\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | (J_j(0) \psi^0) \rangle}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})} - \frac{\langle \psi^0 | (J_j(0) | n \rangle \langle n | J_i(0) \psi^0 \rangle}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_n - E_0}{\hbar})} \right\}. \end{aligned}$$

Für $\omega + i\epsilon \rightarrow 0$ folgt mit der Entwicklung des Nenners:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\omega + i\epsilon + \frac{E_0 - E_n}{\hbar})} &\simeq \frac{1}{\frac{E_0 - E_n}{\hbar}} - \frac{\omega + i\epsilon}{(\frac{E_0 - E_n}{\hbar})^2} + \mathcal{O}((\omega + i\epsilon)^2) + \dots \Rightarrow \\ \sigma_{ij}(\omega + i\epsilon) &= -\frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_i(0) | n \rangle \langle n | (J_j(0) \psi^0) \rangle}{E_0 - E_n} - \frac{\langle \psi^0 | (J_j(0) | n \rangle \langle n | J_i(0) \psi^0 \rangle}{E_n - E_0} \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{i\hbar^2(\omega + i\epsilon)}{\hbar\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_i(0) n \rangle \langle n | (J_j(0) \psi^0) \rangle - \langle \psi^0 | (J_j(0) n) \rangle \langle n | J_i(0) \psi^0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2} \right\}. \quad (6.8.12)$$

Für die Behandlung des Quanten-Hall-Effektes spezialisieren wir uns jetzt auf einen 2-dimensionalen Festkörper und führen dort ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) ein. Damit folgt für den nicht-diagonalen Teil des Leitfähigkeitstensors:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\omega + i\epsilon) &= \sigma_{xy}^{(1)}(\omega + i\epsilon) + \sigma_{xy}^{(2)}(\omega + i\epsilon) \\ &:= -\frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_x(0) n \rangle \langle n | (J_y(0) \psi^0) \rangle}{E_0 - E_n} - \frac{\langle \psi^0 | (J_y(0) n) \rangle \langle n | J_x(0) \psi^0 \rangle}{E_n - E_0} \right\} \\ &\quad - \frac{i\hbar^2(\omega + i\epsilon)}{\hbar\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_x(0) n \rangle \langle n | (J_y(0) \psi^0) \rangle - \langle \psi^0 | (J_y(0) n) \rangle \langle n | J_x(0) \psi^0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Der erste Term, $\sigma_{xy}^{(1)}(\omega + i\epsilon)$, verschwindet, denn im Wechselwirkungsbild folgt mit 6.4.51:

$$J_x := ev_x = e \frac{d}{dt} x = e \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_0^W, x] \quad \Rightarrow \quad (6.8.13)$$

$$\langle \psi^0 | (\mathcal{H}_0^W x - x \mathcal{H}_0^W) n \rangle = (E_0 - E_n) \langle \psi^0 | x n \rangle \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(1)}(\omega + i\epsilon) &= -\frac{ie^2}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | v_x(0) n \rangle \langle n | v_y(0) \psi^0 \rangle}{E_0 - E_n} + \frac{\langle \psi^0 | (v_y(0) n) \rangle \langle n | v_x(0) \psi^0 \rangle}{E_0 - E_n} \right\} \\ &= -\frac{ie^2}{\omega} \sum_{n \neq 0} (E_0 - E_n) \left\{ \frac{\langle \psi^0 | x(0) n \rangle \langle n | v_y(0) \psi^0 \rangle}{E_0 - E_n} - \frac{\langle \psi^0 | v_y(0) n \rangle \langle n | x(0) \psi^0 \rangle}{E_0 - E_n} \right\} \\ &= -\frac{ie^2}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left\{ \langle \psi^0 | x(0) n \rangle \langle n | v_y(0) \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | v_y(0) n \rangle \langle n | x(0) \psi^0 \rangle \right\} \\ &= -\frac{ie^2}{\omega} \left\{ \langle \psi^0 | x(0) v_y(0) \psi^0 \rangle - \langle \psi^0 | (v_y(0) x(0) \psi^0) \rangle \right\} = 0, \end{aligned}$$

weil die Operatoren x und v_y kommutieren. Man sieht hieraus auch schön, daß diese Konstruktion für die diagonalen Teile des Leitfähigkeitstensors σ_{xx} und σ_{yy} nicht funktioniert und daß in diesen Fällen ohne zusätzliche Annahmen über einen elektrischen Widerstand die Gleichstrom-Leitfähigkeit mit $1/\omega$ für $\omega \rightarrow 0$ divergiert.

Also bleibt nur der zweite Term, $\sigma_{xy}^{(2)}$ übrig:

$$\sigma_{xy} := \lim_{\omega+i\epsilon \rightarrow 0} \sigma_{xy}(\omega + i\epsilon) = \lim_{\omega+i\epsilon \rightarrow 0} \sigma_{xy}^{(2)}(\omega + i\epsilon)$$

$$= -i\hbar \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{\langle \psi^0 | J_x(0) | n \rangle \langle n | (J_y(0) \psi^0) \rangle - \langle \psi^0 | (J_y(0) | n \rangle \langle n | J_x(0) \psi^0 \rangle}{(E_0 - E_n)^2} \right\}. \quad (6.8.14)$$

Dies ist die *Kubo-Formel-4* für den nicht-diagonalen Teil der Leitfähigkeit beim Quanten-Hall-Effekt.

6.9 David James Thouless (1934 – 2019)

David Thouless wurde 1934 als Sohn des britischen Psychologieprofessors Robert Thouless und seiner Frau Priscilla Gorton geboren. David war ein außergewöhnliches Kind und brachte sich bereits mit 4 Jahren selbstständig das Lesen bei. Das Elternhaus bot ihm eine akademisch geprägte, geistig sehr offene und anregende Umgebung. So verkehrte z.B. der Philosoph Ludwig Wittgenstein regelmäßig im Haus der Familie Thouless.

David Thouless studierte dann in Cambridge und wurde unter Hans Bethe an der Cornell Universität promoviert. Nach einem Jahr am Lawrence Radiation Laboratory in Berkeley/Kalifornien arbeitete er unter Rudolf Peierls an der Birmingham Universität. Es folgten Berufungen an die Universitäten von Cambridge, Birmingham, Yale und schließlich an die Universität von Washington in Seattle (1980-2003).

David Thouless war nicht nur ein hochbegabter theoretischer Festkörperphysiker, sondern er hatte sich auch ein vertieftes Verständnis der modernen Mathematik, insb. der Topologie, erarbeitet, was ihm seine physikalischen Einsichten überhaupt erst ermöglichte.

Er forschte und publizierte zu einem weiten Bereich der Vielteilchentheorie und Phasenübergänge in Festkörpern und Atomkernen. Am berühmtesten wurden seine topologischen Arbeiten zu Kosterlitz-Thouless-Übergängen im XY-Modell, zu quantisierten Anregungen in Supraflüssigkeiten und Supraleitern und zum Quanten-Hall-Effekt.

Seine wichtigsten Publikationen sind wohl:

- Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems: Kosterlitz u. Thouless (1973),
- Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential: Thouless u. a. (1982),
- Topological Considerations im Sammelband *The Quantum Hall Effect*: Prange u. Girvin (1987b),
- Das Buch: *Topological quantum numbers in non relativistic physics*, Thouless (1998).

Für seine Verdienste wurde er im Jahr 1979 zu einem 'Fellow of the Royal Society' gewählt und 1995 zu einem Mitglied der 'US National Academy of Sciences'. Im Jahr

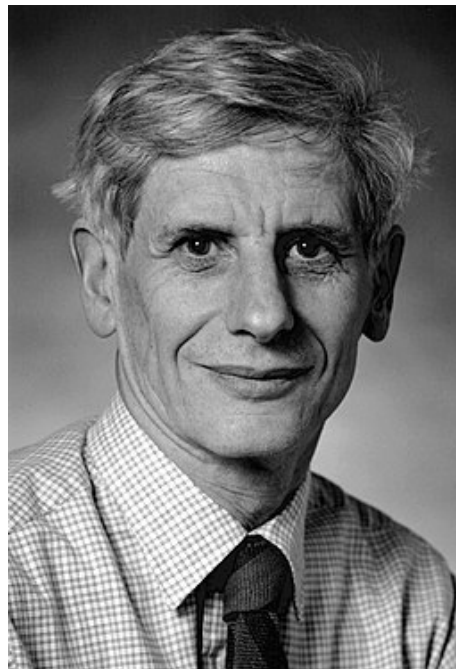


Abbildung 6.7: David J. Thouless
Mary Levin (1995), CC BY-SA 4.0
[http://en.wikipedia.org/wiki/David_J._Thouless]

1990 erhielt er den Wolf-Preis in Physik, 1993 die Dirac-Medaille und 2016 den Nobelpreis der Physik, zusammen mit seinen engen Kollegen Duncan Haldane und J. Michael Kosterlitz.

David Thouless war verheiratet mit Margaret Scrase, die später als Professorin für Pathobiologie an die Universität von Washington in Seattle berufen wurde. Das Paar hatte drei Kinder.

[Quellen:

en.wikipedia: David_J._Thouless

Der Nachruf von J. Michael Kosterlitz in 'The Guardian' vom 19. April 2019 (Kosterlitz (2019))]

6.10 Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit nach TKNN

Nachdem von Klitzing et al. (von Klitzing u. a. (1980)) den Quanten-Hall-Effekt experimentell entdeckt hatten dauerte es nicht lange, bis Thouless et al. (Thouless u. a. (1982)) eine festkörpertheoretische Beschreibung auf topologischer Basis vorlegen konnten. TKNN steht hier für die Anfangsbuchstaben der Autoren dieser Arbeit: Thouless, Kohmoto, Nightingale und den Nijs.

Wir orientieren uns im folgenden an der Originalarbeit Thouless u. a. (1982), an einigen der Artikel im Sammelband Prange u. Girvin (1987a), darunter insb. dem Artikel 'Topological Considerations' von Thouless auf S. 117 ff. und erneut an der schönen Vorlesung von Tong (2016), S. 61 ff.

Die Voraussetzungen für die TKNN-Konstruktion sind:

- gegeben sei ein 2-dimensionaler Nichtleiter-Kristalls mit periodischen Randbedingungen. Damit ist die Geometrie die eines 2-dimensionalen Torus $T_{\vec{x}}^2$. Nichtleiter bedeutet hier, daß es eine Bandlücke zwischen den vollständig besetzten Valenzbändern und den leeren Leitungsbändern geben möge und daß die Fermienergie E_F in dieser Bandlücke liege.
- das Ein-Teilchen-Spektrum läßt sich mit einer Bandstruktur $E_{\alpha\vec{k}}$ für das Band α beschreiben.
- der Wellenvektor $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ ist beschränkt auf das zweidimensionale reziproke Gitter, auch *Brillouin-Zone* genannt, das ebenfalls periodische Randbedingungen hat und damit ebenfalls die Geometrie eines 2-dimensionalen Torus $T_{\alpha\vec{k}}^2$ für jedes Band α .
- Vernachlässigung aller Elektron-Elektron Wechselwirkungen.

Gesucht wird jetzt die elektrische transversale Leitfähigkeit σ_{xy} eines solchen Nichtleiter-Kristalls.

Satz 6.10.1 (TKNN-Theorem) *Seien die Elektronen in einem Band α beschrieben durch Bloch-Wellenfunktionen (3.2):*

$$\psi_{\alpha\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} u_{\alpha\vec{k}}(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad (6.10.1)$$

$$u_{\alpha\vec{k}}(\vec{x} + \vec{a}_1) = u_{\alpha\vec{k}}(\vec{x} + \vec{a}_2) = u_{\alpha\vec{k}}(\vec{x}), \quad (6.10.2)$$

wenn \vec{a}_1 und \vec{a}_2 die Kristallgitter-Einheitsvektoren sind.

Dann kann man für das Band α eine Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k})$, d.h. ein Eichpotential, definieren:

$$\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}) dk^i := -i \langle u_{\alpha\vec{k}} | \frac{\partial}{\partial k^i} u_{\alpha\vec{k}} \rangle dk^i, \quad (6.10.3)$$

Die betrachtete Mannigfaltigkeit ist der Torus $T_{\alpha\vec{k}}^2$ der Brillouin-Zone. $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k})$ ist rein imaginär, also eine $\mathfrak{u}(1)$ -wertige 1-Form. Damit ist das betrachtete Prinzipalbündel

$P(T_{\alpha\vec{k}}^2, U(1))$. Die Liegruppe $U(1)$ ist eindimensional und abelsch, also sind alle Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ und man benötigt keine Gruppenindizes α, β . Im Beweis zeigen wir, daß $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k})$ tatsächlich das Transformationsverhalten einer lokalen Zusammenhangsform zeigt, oder in der Sprache der Physiker, eines Eichpotentials.

Aus der Zusammenhangs-1-Form kann man durch Differenzieren eine entsprechende Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{\alpha xy}(\vec{k})$, d.h. eine Feldstärke, gewinnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha xy} dk^x \wedge dk^y &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}_{\alpha x}(\vec{k})}{\partial k^y} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\alpha y}(\vec{k})}{\partial k^x} \right) dk^x \wedge dk^y \\ &= \left(-i \left\langle \frac{\partial}{\partial k^y} u_{\alpha\vec{k}} \mid \frac{\partial}{\partial k^x} u_{\alpha\vec{k}} \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial}{\partial k^x} u_{\alpha\vec{k}} \mid \frac{\partial}{\partial k^y} u_{\alpha\vec{k}} \right\rangle \right) dk^x \wedge dk^y \\ &= \left(-i \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \mid \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle + i \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \mid \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \right) dk^x \wedge dk^y . \end{aligned} \quad (6.10.4)$$

Das Integral der Krümmungs-2-Form für das Band α über den Torus $T_{\alpha\vec{k}}^2$ ergibt eine topologische Invariante, die 1. Chern-Zahl, die eine natürliche Zahl ist.

$$C_\alpha := -\frac{1}{2\pi} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} d^2\vec{k} \mathcal{F}_{\alpha xy} . \quad (6.10.5)$$

Damit ergibt sich jetzt für die elektrische transversale Leitfähigkeit σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_\alpha C_\alpha = -\frac{e^2}{h} \sum_\alpha C_\alpha . \quad (6.10.6)$$

Die ganzzahlige Summe der Chern-Zahlen der 1. Chernklasse über alle vollbesetzten Valenzbänder $\sum_\alpha C_\alpha$ wird auch TKNN-Invariante genannt.

Die Topologie führt also zu einer ganzzahligen Quantisierung der Leitfähigkeit mal e^2/h , bzw. zu einer ganzzahligen Quantisierung des Hall-Widerstands mal der von Klitzing-Konstanten h/e^2 .

Beweis: Unser Ausgangspunkt ist die Kubo-Formel-4 (6.8.14). Für $J_x(0)$ und $J_y(0)$ schreiben wir einfach J_x und J_y . Weil es sich beim betrachteten Kristall um einen Nichtleiter handelt betrachten wir nur Beiträge von Übergängen aus den Valenzbändern $E_{\alpha\vec{k}}$ in die Leitungsbänder $E_{\beta\vec{k}}$ mit $E_{\alpha\vec{k}} < E_F < E_{\beta\vec{k}}$.

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F < E_{\beta\vec{k}}}} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\langle u_{\alpha\vec{k}} \mid J_y u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} \mid J_x u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle u_{\alpha\vec{k}} \mid J_x u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} \mid J_y u_{\alpha\vec{k}} \rangle}{(E_{\beta\vec{k}} - E_{\alpha\vec{k}})^2} . \quad (6.10.7)$$

Im nächsten Schritt geht man vom Hamilton-Operator $\hat{H}(\hat{x})$ über zu einem auf die Brillouin-Zone beschränkten Hamilton-Operator $\hat{H}(\vec{k})$.

$$\hat{H}(\hat{x}) | \psi_{\alpha\vec{k}} \rangle = E_{\alpha\vec{k}} | \psi_{\alpha\vec{k}} \rangle \quad \Rightarrow \quad (6.10.8)$$

$$\hat{H}(\vec{k}) | u_{\alpha\vec{k}} \rangle := e^{-i\vec{k}\hat{x}} \hat{H} e^{i\vec{k}\hat{x}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle = E_{\alpha\vec{k}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle . \quad (6.10.9)$$

In der Festkörper-Physik definiert man die \vec{k} -abhängige Geschwindigkeit der Elektronen im Band α als (siehe z.B. Ziman (1975), S. 129):

$$\vec{v}(\alpha, \vec{k}) := \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{\alpha\vec{k}}}{\partial \vec{k}} \quad (6.10.10)$$

und den Geschwindigkeits-Operator dann entsprechend als:

$$\hat{v}(\vec{k}) := \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} . \quad (6.10.11)$$

Damit ergibt sich der Operator der elektrischen Stromdichte zu:

$$\hat{J}(\vec{k}) := e\hat{v}(\vec{k}) = \frac{e}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} \quad \text{d.h. ,} \quad (6.10.12)$$

$$\hat{J}_x(\vec{k}) := e\hat{v}_x(\vec{k}) = \frac{e}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\vec{k})}{\partial k^x} = \frac{e}{\hbar} \partial_{k^x} \hat{H}(\vec{k}) , \quad (6.10.13)$$

$$\hat{J}_y(\vec{k}) := e\hat{v}_y(\vec{k}) = \frac{e}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\vec{k})}{\partial k^y} = \frac{e}{\hbar} \partial_{k^y} \hat{H}(\vec{k}) . \quad (6.10.14)$$

Daß diese Definition Sinn macht kann man an folgendem einfachen Beispiel eines freien Elektrons sehen. In diesem Beispiel habe $\vec{A} = \vec{A}(\hat{x})$ nur eine \hat{x} -Abhängigkeit.

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{x}) &= \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \hat{A}(\hat{x}) \right)^2 = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\hat{A}(\hat{x}))^2 \quad \Rightarrow \\ \hat{H}(k) &= e^{-ikx} \hat{H}(\hat{x}) e^{ikx} = e^{-ikx} \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\hat{A}(\hat{x}))^2 e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + \hbar k + e\hat{A}(\hat{x}))^2 = \frac{1}{2m} (\hat{p} + \hbar \vec{k} + e\hat{A}(\hat{x}))^2 . \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial \hat{H}(\vec{k})}{\partial \vec{k}} = \frac{1}{m} (\hat{p} + \hbar \vec{k} + e\hat{A}(\hat{x})) .$$

Aus 6.4.2 folgt mit $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned}\hat{x}^i &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(k), \hat{x}^i] = \frac{i}{2m\hbar}[(\hat{p} + \hbar k + e\hat{A}(\hat{x}))^2, \hat{x}^i] \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \sum_j [\hat{p}^j \hat{p}^j + \hat{p}^j (\hbar k^j + e\hat{A}^j(\hat{x})) + (\hbar k^j + e\hat{A}^j(\hat{x})) \hat{p}^j, \hat{x}^i] \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \sum_j (\hat{p}^j \hat{p}^j \hat{x}^i - \hat{x}^i \hat{p}^j \hat{p}^j + 2(\hbar k^j + e\hat{A}^j(\hat{x}))(\hat{p}^j \hat{x}^i - \hat{x}^i \hat{p}^j)) \\ &= \frac{i}{2m\hbar} (-2i\hbar\hat{p}^i - 2i\hbar(\hbar k^i + e\hat{A}^i(\hat{x}))) = \frac{1}{m}(\hat{p}^i + \hbar k^i + e\hat{A}^i(\hat{x})).\end{aligned}$$

Im Heisenberg-Bild ist $\hat{v}_k := \hat{\dot{x}} = \frac{d}{dt}\hat{x}$ (6.4.42), und damit stimmen die beiden Definitionen überein.

Jetzt setzt man \hat{J}_x und \hat{J}_y aus 6.10.13 und 6.10.14 in die Kubo-Formel 6.10.7 ein:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F < E_{\beta\vec{k}}}} \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \\ & \frac{\langle u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} \hat{H}(\vec{k})) u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k_x} \hat{H}(\vec{k})) u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_x} \hat{H}(\vec{k})) u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k_y} \hat{H}(\vec{k})) u_{\alpha\vec{k}} \rangle}{(E_{\beta\vec{k}} - E_{\alpha\vec{k}})^2}.\end{aligned}$$

Für die einzelnen Ausdrücke im Zähler ergibt sich:

$$\begin{aligned}\langle u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} \hat{H}(\vec{k})) u_{\beta\vec{k}} \rangle &= \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k_y} (\hat{H}(\vec{k}) u_{\beta\vec{k}}) \rangle - \langle u_{\alpha\vec{k}} | \hat{H}(\vec{k}) (\partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}}) \rangle \\ &= \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k_y} (E_{\beta\vec{k}} u_{\beta\vec{k}}) \rangle - \langle \hat{H}(\vec{k}) u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}}) \rangle \\ &= \langle u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} E_{\beta\vec{k}}) u_{\beta\vec{k}} \rangle + \langle u_{\alpha\vec{k}} | E_{\beta\vec{k}} \partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}} \rangle - \langle E_{\alpha\vec{k}} u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}}) \rangle.\end{aligned}$$

Nun bezieht sich ∂_{k_y} nur auf das Valenzband α , deswegen ist $(\partial_{k_y} E_{\beta\vec{k}}) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\langle u_{\alpha\vec{k}} | (\partial_{k_y} \hat{H}(\vec{k})) u_{\beta\vec{k}} \rangle &= (E_{\beta\vec{k}} - E_{\alpha\vec{k}}) \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}} \rangle \\ &= -(E_{\beta\vec{k}} - E_{\alpha\vec{k}}) \langle \partial_{k_y} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\beta\vec{k}} \rangle,\end{aligned}$$

denn

$$\partial_{k_y} \langle u_{\alpha\vec{k}} | u_{\beta\vec{k}} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{denn } u_{\alpha\vec{k}} \text{ und } u_{\beta\vec{k}} \text{ sind orthogonal,} \\ \langle \partial_{k_y} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\beta\vec{k}} \rangle + \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k_y} u_{\beta\vec{k}} \rangle. \end{cases} \quad (6.10.15)$$

Entsprechend ergibt sich

$$\langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k_x} \hat{H}(\vec{k})) u_{\alpha\vec{k}} \rangle = \langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k_x} \hat{H}(\vec{k}) u_{\alpha\vec{k}}) \rangle - \langle u_{\beta\vec{k}} | \hat{H}(\vec{k}) (\partial_{k_x} u_{\alpha\vec{k}}) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k^x} E_{\alpha\vec{k}} u_{\alpha\vec{k}}) \rangle - \langle \hat{H}(\vec{k}) u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}}) \rangle \\
&= \langle u_{\beta\vec{k}} | (\partial_{k^x} E_{\alpha\vec{k}}) u_{\alpha\vec{k}} \rangle + \langle u_{\beta\vec{k}} | E_{\alpha\vec{k}} (\partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}}) \rangle - \langle E_{\beta\vec{k}} u_{\beta\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \\
&= -(E_{\beta\vec{k}} - E_{\alpha\vec{k}}) \langle u_{\beta\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle .
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Leitfähigkeit

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F < E_{\beta\vec{k}}}} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \\
&\quad \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle .
\end{aligned}$$

Aus der Vollständigkeits-Relation der Wellenfunktionen $u_{\alpha\vec{k}}$ und $u_{\beta\vec{k}}$ folgt:

$$\sum_{\beta} | u_{\beta\vec{k}} \rangle \langle u_{\beta\vec{k}} | = \{1\} - \sum_{\alpha} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | .$$

Damit ergibt sich für die Leitfähigkeit

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &= i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F < E_{\beta\vec{k}}}} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \{ \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \\
&\quad - \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle + \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \}
\end{aligned}$$

Die beiden Terme der zweiten Zeile heben sich auf, denn wegen 6.10.15 gilt:

$$\begin{aligned}
&- \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle + \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} | u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \\
&= \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \langle u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Leitfähigkeit

$$\sigma_{xy} = i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\substack{\alpha \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F}} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \{ \langle \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle \partial_{k^x} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{k^y} u_{\alpha\vec{k}} \rangle \} ,$$

und mit Hilfe von 6.10.4

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\substack{\alpha \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F}} \frac{1}{2\pi} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} d^2\vec{k} \mathcal{F}_{\alpha xy} .$$

Indem wir die Größe $-i\{\langle \partial_{ky} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{kx} u_{\alpha\vec{k}} \rangle - \langle \partial_{kx} u_{\alpha\vec{k}} | \partial_{ky} u_{\alpha\vec{k}} \rangle\}$ jetzt einfach $\mathcal{F}_{\alpha xy}$ nennen haben wir natürlich noch keinerlei topologischen Erkenntnisgewinn erreicht. Andererseits ist dieses $\mathcal{F}_{\alpha xy} dk^x \wedge dk^y$ als 2-Form gerade das Differential der 1-Form

$$\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}) dk^i = -i \langle u_{\alpha\vec{k}} | \frac{\partial}{\partial k^i} u_{\alpha\vec{k}} \rangle dk^i = -i \langle u_{\alpha\vec{k}} | d u_{\alpha\vec{k}} \rangle .$$

Und diese 1-Form kann uns an die 1-Form des Berry-Zusammenhangs $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ in 5.3.20 erinnern. $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k})$ ist ebenso wie der Berry-Zusammenhang rein imaginär und damit ein Element der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(1) = \{i \cdot c \in i \cdot \mathbb{R}\}$. Die Eichgruppe ist also $U(1)$. Wir werden jetzt versuchen zu zeigen, daß sich auch dieses $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k})$ wie eine lokale Zusammenhangsform transformiert, oder in der Sprache der Physiker, wie ein Eichpotential.

Seien U_m eine Karte einer offenen Überdeckung von M , $\sigma_m : U_m \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt. Jetzt soll gezeigt werden, daß $(\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}) d\vec{k})_m$ bei einem Kartenwechsel mit einer Funktion $t_{mn} \in U(1)$ von einer Karte U_m auf eine Karte U_n tatsächlich die für eine Eichtransformation richtige Kompatibilitätsbedingung erfüllt (30.4.8).

$$| u_{\alpha\vec{k}} \rangle_n = | u_{\alpha\vec{k}} \rangle_m t_{mn}(\vec{k}) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}) d\vec{k})_n &= -i \langle (u_{\alpha\vec{k}})_n | d (u_{\alpha\vec{k}})_n \rangle \\ &= (t_{mn}(\vec{k}))^{-1} \langle (u_{\alpha\vec{k}})_m | d u_{\alpha\vec{k}} \rangle_m t_{mn}(\vec{k}) \\ &= (t_{mn}(\vec{k}))^{-1} \langle (u_{\alpha\vec{k}})_m | d (u_{\alpha\vec{k}})_m \rangle t_{mn}(\vec{k}) \\ &\quad + (t_{mn}(\vec{k}))^{-1} \langle (u_{\alpha\vec{k}})_m | (u_{\alpha\vec{k}})_m \rangle dt_{mn}(\vec{k}) \\ &= t_{mn}(\vec{k})^{-1} (\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}) d\vec{k})_m t_{mn}(\vec{k}) + t_{mn}(\vec{k})^{-1} dt_{mn}(\vec{k}) . \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{F}_{\alpha xy}$ nun tatsächlich eine lokale Krümmung und das Integral über $\mathcal{F}_{\alpha xy}$ die 1. Chern-Zahl, und damit eine natürliche Zahl, und wir erhalten für die Leitfähigkeit σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\substack{\alpha \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F}} \frac{1}{2\pi} \int_{T_{\alpha\vec{k}}^2} d^2\vec{k} \mathcal{F}_{\alpha xy} = -\frac{e^2}{h} \sum_{\substack{\alpha \\ E_{\alpha\vec{k}} < E_F}} C_{\alpha} . \quad \square$$

Das Ergebnis der TKNN-Formel ist durchaus überraschend. Ströme sind ja üblicherweise durch die unzähligen Streuvorgänge der Elektronen am Kristallgitter und an Störstellen ein sehr komplexes Phänomen - aber in diesem Fall erzwingt die Topologie eine ganzzahlige Quantisierung der Leitfähigkeit mal e^2/h , bzw. eine ganzzahlige Quantisierung des Hall-Widerstands mal der von Klitzing-Konstanten h/e^2 .

6.11 Landau Niveaus

Lew Dawidowitsch Landau (1908 - 1968) hat im Jahr 1930 eine quantenmechanische Theorie des Diamagnetismus in Metallen publiziert. Darin behandelt er die Elektronen des Metalls als ein freies Elektronengas. Legt man nun ein homogenes Magnetfeld B in z -Richtung an ein in der x - y Ebene befindliches 2-dimensionales Elektronengas mit den Längen L_x und L_y und periodischen Randbedingungen an, so entsteht eine Aufspaltung der Energie-Niveaus in die sog. Landau-Niveaus. Zudem zeigt sich, daß diese Niveaus hochgradig entartet sind. Wir folgen Ziman (1975), S. 298 ff., und Tong (2016), S. 20 ff., wiederum in unseren Bezeichnungen und spezialisiert auf den 2-dimensionalen Fall.

Das Vektorpotential \vec{A} ist als ein Eichpotential ja nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt, da die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet (Eichinvarianz). Wir wählen im Folgenden die Landau-Eichung:

$$\vec{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} . \quad (6.11.1)$$

Der Hamilton-Operator für dieses Problem lautet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} + e\vec{A})^2 = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + exB)^2) . \quad (6.11.2)$$

Dieser Hamilton-Operator ist in y -Richtung translationsinvariant, also macht man für die Wellenfunktion den folgenden Ansatz:

$$\psi_k(x, y) = e^{iky} u_k(x)$$

und erhält

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_k(x, y) &= \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \partial_x^2 + (-i\hbar \partial_y + exB)^2) e^{iky} u_k(x) \\ &= \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \partial_x^2 + (\hbar k + exB)^2) e^{iky} u_k(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{(eB)^2}{2m} \left(x + k \frac{\hbar}{eB} \right)^2 \right) e^{iky} u_k(x) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{m\omega_B^2}{2} (x + kl_B^2)^2 \right) e^{iky} u_k(x) \end{aligned}$$

mit der *Zyklotronfrequenz* ω_B und der *magnetischen Länge* l_B :

$$\omega_B := \frac{eB}{m} \quad \text{und} \quad l_B := \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^{1/2} . \quad (6.11.3)$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit verschobenem Nullpunkt $x_0 = -kl_B^2$ (siehe z.B. Greiner (1989), S. 180 ff.). Die Eigenwert-Gleichung $\hat{H}\psi_k(x, y) =$

$E\psi_k(x, y)$ führt auf eine Webersche Differentialgleichung mit Hermiteschen Polynomen H_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ als Lösung.

Damit ergeben sich für die Energie-Eigenwerte und Energie-Eigenfunktionen:

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (6.11.4)$$

$$\psi_{n,k}(x, y) = N_n e^{iky} e^{-(x+kl_B^2)^2/2l_B^2} H_n\left(\frac{1}{l_B}(x + kl_B^2)\right), \quad (6.11.5)$$

mit dem Normierungsfaktor N_n und dem Hermiteschen Polynom $H_n(X)$ (siehe z.B. Wikipedia-Hermitesches_Polynom (2022), Abramowitz u. Stegun (1970), S. 775, S. 785, S. 801). Hier die Formel von Rodrigues für das Hermitesche Polynom $H_n(X)$:

$$H_n(X) := (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} e^{-X^2}, \text{ bzw.} \quad (6.11.6)$$

$$:= e^{X^2/2} \left(X - \frac{d}{dX}\right)^n e^{-X^2/2}. \quad (6.11.7)$$

Die Wellenfunktion des Grundzustands $\psi_{0,k}(x, y)$ des harmonischen Oszillators in der Landau-Eichung ist mit $H_0(X) = 1$ gerade

$$\psi_{0,k}(x, y) = N_0 e^{iky} e^{-(x+kl_B^2)^2/2l_B^2}. \quad (6.11.8)$$

Nun zur Frage der Entartung der Energieniveaus E_n . Das 2-dimensionale Elektronengas mit den Längen L_x und L_y und periodischen Randbedingungen ist jetzt in seiner Ausdehnung begrenzt durch:

$$0 \leq y \leq L_y \quad \text{und} \quad 0 \leq |x_0| = kl_B^2 \leq L_x. \quad (6.11.9)$$

Damit ist die Anzahl der erlaubten \vec{k} -Werte (siehe 3.2):

$$N_y = \frac{L_y}{2\pi} \quad \text{und} \quad N_x = \int_0^{L_x/l_B^2} dk = \frac{L_x}{l_B^2} \quad \Rightarrow$$

$$N_B := N_x N_y = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBL_x L_y}{2\pi\hbar}. \quad (6.11.10)$$

Nun ist $\Phi := BL_x L_y$ der magnetische Fluß durch die Fläche $L_x L_y$. Dann kann man das magnetische Flußquantum Φ_0 einführen, das man sich als den magnetischen Fluß durch eine Fläche $2\pi l_B^2$ vorstellen kann:

$$L_x L_y \rightarrow 2\pi l_B^2 \quad \Rightarrow \quad N_B \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_0 = B(2\pi l_B^2) = \frac{2\pi\hbar}{e} \quad \Rightarrow \quad (6.11.11)$$

$$N_B = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (6.11.12)$$

6.12 Translationen im Magnetfeld

Zunächst eine kleine Wiederholung zum Operator für Translationen in der Physik. Sei $\psi(\vec{x})$ eine Wellenfunktion der Schrödingergleichung und $T(\vec{d})$ der Operator einer 1-dimensionalen Darstellung kontinuierlicher Translationen im Ortsraum \mathbb{R}^3 . Dann folgt aus einer Talorentwicklung für $T(\vec{d})$:

$$\begin{aligned} (T(\vec{d})\psi)(\vec{r}) &:= \psi(\vec{r} - \vec{d}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{d}\vec{\nabla})^n \psi(\vec{r}) = e^{-\vec{d}\vec{\nabla}} \psi(\vec{r}) \\ &=: e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d}\hat{p}} \psi(\vec{r}) \quad \text{mit } \hat{p} := -i\hbar\vec{\nabla}. \end{aligned} \quad (6.12.1)$$

Es gilt also:

$$(e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d}\hat{p}} \psi)(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{d})$$

und durch Differenzieren beider Seiten nach \vec{d} bei $\vec{d} = \vec{0}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{-i}{\hbar} (\hat{p}\psi)(\vec{r}) &= \vec{\nabla}_{\vec{d}} \psi(\vec{r} - \vec{d})|_{\vec{d}=\vec{0}} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \psi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \\ (\hat{p}\psi)(\vec{r}) &= -i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{r}} \psi(\vec{r}). \end{aligned} \quad (6.12.2)$$

Der Impuls \hat{p} ist also der infinitesimale Generator der Translationensgruppe. So weit, so bekannt :-)

Im Folgenden orientieren wir uns an Tong (2016) S. 57 ff., S. 68 ff. und Eschrig (2011) S. 289 ff.

Wir untersuchen jetzt einen in der (x, y) -Ebene liegenden 2-dimensionalen Festkörper mit den Abmessungen $L_x \times L_y$, bei dem wir wieder periodische Randbedingungen verlangen. Damit handelt es sich also erneut um einen 2-dimensionalen Torus T^2 . Diesen Festkörper modellieren wir zunächst als ein freies Elektronengas, bevor wir in einem anschließenden Schritt eine Gitterstruktur einführen. Senkrecht zur (x, y) -Ebene, also in Richtung der z -Achse, stehe ein statisches Magnetfeld der Stärke B . Wir wählen erneut die Landau-Eichung, also

$$\vec{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (6.12.3)$$

Jetzt kann der obige Operator der Translationsgruppe im Sinne der *minimalen Kopplung* um das Vektorpotential \vec{A} erweitert werden. Der Ausdruck $(\vec{p} - q\vec{A})$ mit der elektrischen Ladung q wird für Elektronen zu $(\vec{p} + e\vec{A})$ mit der Elektronenladung e :

$$T_B(\vec{d}) := e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d}(\hat{p} + e\vec{A})} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})} \quad (6.12.4)$$

$T_B(\vec{d})$ ist also der Operator der magnetischen Translationsgruppe mit dem infinitesimalen Generator

$$\hat{p}_B := \hbar \hat{k}_B := \hat{p} + e\vec{A} = -i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}. \quad (6.12.5)$$

Seien

$$T_x := T_B \begin{pmatrix} L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_y := T_B \begin{pmatrix} 0 \\ L_y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12.6)$$

Damit schreiben sich die periodischen Randbedingungen als:

$$T_x\psi(x, y) = \psi(x + L_x, y) \stackrel{!}{=} \psi(x, y), \quad (6.12.7)$$

$$T_y\psi(x, y) = e^{-\frac{i}{\hbar}L_y e x B} \psi(x, y + L_y) \stackrel{!}{=} \psi(x, y). \quad (6.12.8)$$

Man sieht, daß sich $T_y\psi(x, y)$ von $\psi(x, y)$ durch eine $U(1)$ -Eichtransformation unterscheidet.

Im nächsten Schritt vergleicht man $T_y T_x \psi(x, y)$ mit $T_x T_y \psi(x, y)$ und erhält:

$$T_y T_x \psi(x, y) = T_y \psi(x + L_x, y) = e^{-\frac{i}{\hbar}L_y e x B} \psi(x + L_x, y + L_y),$$

$$T_x T_y \psi(x, y) = T_x e^{-\frac{i}{\hbar}L_y e x B} \psi(x, y + L_y) = e^{-\frac{i}{\hbar}L_y e(x+L_x)B} \psi(x + L_x, y + L_y),$$

$$\Rightarrow T_y T_x = e^{-\frac{i}{\hbar}L_y L_x e B} T_x T_y \quad (6.12.9)$$

$$\Rightarrow \frac{eB}{\hbar} L_x L_y \stackrel{!}{=} 2\pi N \quad \text{mit } N \in \mathbb{Z}, \quad (6.12.10)$$

da bei einer Vollumrundung des Torus via $T_y T_x$ und via $T_x T_y$ in beiden Fällen das Resultat die gleiche Wellenfunktion $\psi(x, y)$ sein muß.

Diese Quantisierungsbedingung ist nun die Gleiche, wie beim Aharonow-Bohm Effekt, siehe 5.2.8 mit $\Phi = B L_x L_y$. Und es ist der gleiche Wert, wie die Anzahl der Landau-Niveaus, siehe 6.11.10.

Im nächsten Schritt erweitert man den Hamilton-Operator 6.11.2 um ein in der (x, y) -Ebene liegendes 2-dimensionales periodisches Gitterpotential $U(x, y)$:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \hat{p}_B^2 + U(x, y) = \frac{1}{2m} (\hat{p} + e\vec{A})^2 + U(x, y) \\ &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y^2 + e x B)^2) + U(x, y) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} ((-i\partial_x)^2 + (-i\partial_y + \frac{e}{\hbar} x B)^2) + U(x, y). \end{aligned} \quad (6.12.11)$$

Dieser Hamilton-Operator ist nicht mehr periodisch in x -Richtung. Der Einfachheit halber gehen wir von einem rechteckigen Gitter aus. Dann sind die Gitterpunkte gegeben durch

$$\vec{d} := n_1 a e_x + n_2 b e_y ,$$

wenn die Vektoren $\vec{a} = a e_x$ und $\vec{b} = b e_y$ das Gitter im Ortsraum der (x, y) -Ebene mit den Einheitsvektoren (e_x, e_y) definieren. Damit wird jetzt der Translations-Operator 6.12.4 zu

$$(T(\vec{d})) := e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d} \hat{p}_B} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d} (\hat{p} + e\vec{A})} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A})} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{d} (-i\hbar \vec{\nabla} + e x B e_y)} . \quad (6.12.12)$$

$$\hat{p}_B := \hbar \hat{k}_B := \hat{p} + e\vec{A} = -i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} . \quad (6.12.13)$$

$T(\vec{d})$ kommutiert mit H wegen

$$[T(\vec{d}), H] = [e^{-\frac{i}{\hbar} (n_1 a e_x + n_2 b e_y) (\hat{p} + e\vec{A})}, \frac{1}{2m} (\hat{p} + e\vec{A})^2 + U(x, y)] = 0 \quad (6.12.14)$$

da

$$e^{-\frac{i}{\hbar} (n_1 a e_x + n_2 b e_y) (\hat{p} + e\vec{A})} U(x, y) = U(x + n_1 a, y + n_2 b) = U(x, y) .$$

Analog dem obigen Vorgehen definieren wir

$$T_x := T_B \begin{pmatrix} n_1 a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad T_y := T_B \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.12.15)$$

und erhalten

$$T_y T_x = e^{-\frac{i}{\hbar} n_1 n_2 a b e B} T_x T_y . \quad (6.12.16)$$

Jetzt kommt der entscheidende Punkt: man definiert ein magnetisches Übergitter mit $a_B e_x$ und $b_B e_y$ derart, daß sich gerade

$$\frac{eB}{\hbar} a_B b_B \stackrel{!}{=} 2\pi \quad (6.12.17)$$

ergibt. Das heißt, die Einheitszelle des magnetischen Übergitters mit der Fläche $a_B b_B$ wird durchdrungen von einem magnetischen Fluß

$$\Phi_0 := B a_B b_B = \frac{2\pi \hbar}{e} . \quad (6.12.18)$$

Damit kommutieren T_x und T_y und der Hamilton-Operator auf dem magnetischen Übergitter und es gibt einen gemeinsamen Satz von Eigenvektoren. Also kann man wie gewohnt mit dem Bloch-Theorem 3.2 und der Konstruktion einer magnetischen Brillouin Zone mit magnetischen reziproken Gittervektoren \vec{k}_B fortfahren.

$$\psi(x, y) = e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}(x, y) \quad \text{mit } \vec{r} := n_1 a_B e_x + n_2 b_B e_y . \quad (6.12.19)$$

Mit

$$\begin{aligned}\hat{p}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) &= (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= \hbar \vec{k}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + e^{i\vec{k}_B \vec{r}} (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}) u_{\vec{k}_B}^-(x, y)\end{aligned}\quad (6.12.20)$$

folgt:

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi(x, y) &= \hat{H} e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_B^2 + U(x, y)\right) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}_B \hat{p}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + U(x, y) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= \frac{1}{2m} \hat{p}_B \{ \hbar \vec{k}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \hat{p}_B u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \} \\ &\quad + U(x, y) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= \frac{1}{2m} \{ \hbar^2 \vec{k}_B^2 e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + \hbar \vec{k}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \hat{p}_B u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &\quad + \hbar \vec{k}_B e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \hat{p}_B u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \hat{p}_B^2 u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \} \\ &\quad + U(x, y) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \\ &= e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \frac{1}{2m} (\hat{p}_B + \hbar \vec{k}_B)^2 u_{\vec{k}_B}^-(x, y) + U(x, y) e^{i\vec{k}_B \vec{r}} u_{\vec{k}_B}^-(x, y).\end{aligned}$$

Damit kann man schreiben:

$$\hat{H}\psi(x, y) = e^{i\vec{k}_B \vec{r}} \hat{H}_{\vec{k}_B}^- u_{\vec{k}_B}^-(x, y) = e^{i\vec{k}_B \vec{r}} E_{\vec{k}_B}^- u_{\vec{k}_B}^-(x, y) \quad \text{mit} \quad (6.12.21)$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\vec{k}_B}^- &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_B + \hbar \vec{k}_B)^2 + U(x, y) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} (\hat{k}_B + \vec{k}_B)^2 + U(x, y).\end{aligned}\quad (6.12.22)$$

Auf den 2-dim. Torus des Bandes $\alpha \vec{k}_B$ der magnetischen Brillouin-Zone $T_{\alpha \vec{k}_B}^2$ kann man jetzt das TKNN-Theorem (6.10.1) anwenden und erhält die elektrische transversale Leitfähigkeit σ_{xy} eines Nichtleiter-Kristalls.

Das heißt zusammengefaßt: man definiert eine Zusammenhangs-1-Form $\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}_B)$, d.h. ein Eichpotential (6.10.3), und durch Differenzieren die entsprechende Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{\alpha xy}(\vec{k}_B)$, d.h. eine Feldstärke (6.10.4):

$$\mathcal{A}_{\alpha i}(\vec{k}_B) dk_B^i := -i \langle u_{\alpha \vec{k}_B} | \frac{\partial}{\partial k_B^i} u_{\alpha \vec{k}_B} \rangle dk_B^i, \quad (6.12.23)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\alpha xy} dk^x \wedge dk^y &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}_{\alpha x}(\vec{k}_B)}{\partial k_B^y} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\alpha y}(\vec{k}_B)}{\partial k_B^x} \right) dk_B^x \wedge dk_B^y \\
&= (-i \langle \partial_{k_B^y} u_{\alpha \vec{k}_B} | \partial_{k_B^x} u_{\alpha \vec{k}_B} \rangle + i \langle \partial_{k_B^x} u_{\alpha \vec{k}_B} | \partial_{k_B^y} u_{\alpha \vec{k}_B} \rangle) dk_B^x \wedge dk_B^y .
\end{aligned} \tag{6.12.24}$$

Das Integral der Krümmungs-2-Form für das Band α über den Torus $T_{\alpha \vec{k}_B}^2$ ergibt eine topologische Invariante, die 1. Chern-Zahl, die eine natürliche Zahl ist (6.10.5).

$$C_\alpha := -\frac{1}{2\pi} \int_{T_{\alpha \vec{k}_B}^2} d^2 \vec{k} \mathcal{F}_{\alpha xy} . \tag{6.12.25}$$

Damit ergibt sich jetzt für die elektrische transversale Leitfähigkeit σ_{xy} (6.10.6):

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} C_\alpha = -\frac{e^2}{h} \sum_{\alpha} C_\alpha . \tag{6.12.26}$$

Die Topologie führt also zu einer ganzzahligen Quantisierung der Leitfähigkeit mal e^2/h , bzw. zu einer ganzzahligen Quantisierung des Hall-Widerstands mal der von Klitzing-Konstanten h/e^2 .

Der Unterschied zwischen dem obigen Fall ohne Magnetfeld und dem jetzigen Fall mit Magnetfeld liegt also nur darin, daß im ersten Fall \vec{k} -Vektoren aus der gewöhnlichen Brillouin-Zone verwendet werden, und im zweiten Fall \vec{k} -Vektoren der magnetischen Brillouin-Zone.

6.13 Hall-Plateaus

In unserer bisherigen Darstellung des Quanten-Hall-Effektes und der Landau-Niveaus ist die Frage unbeantwortet geblieben, wieso der quantisierte Hall-Widerstand im Experiment diese speziellen Plateaus zeigt. In der Literatur wird die folgende heuristische Überlegung vorgetragen.

Wenn die verwendeten 2-D Nichtleiter-Strukturen völlig 'rein' wären, dann würden wir mit dem Modell des freien Elektronengases die oben beschriebenen hochdimensional entarteten Landau-Niveaus erhalten (6.11.3, 6.11.4, 6.11.10). Jedes Energieniveau E_n ist N_B fach entartet:

$$\omega_B = \frac{eB}{m} \quad \text{und} \quad l_B = \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^{1/2} \quad \text{und} \quad E_n = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right) ,$$

$$N_y = \frac{L_y}{2\pi} \quad \text{und} \quad N_x = \int_0^{L_x/l_B^2} dk = \frac{L_x}{l_B^2} \quad \Rightarrow$$

$$N_B = N_x N_y = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{e B L_x L_y}{2\pi \hbar}.$$

Die Zustandsdichte $N_B(E)$ ist hier nun eine Folge von δ -Funktionen.

Die experimentell verwendeten 2-D MOSFETs (metal oxide semiconductor field effect transistors) auf Silizium-Basis sind nun aber nicht wirklich 'rein', sondern enthalten mikroskopisch betrachtet zahlreiche Störstellen. Wenn man diese statischen Störpotentiale jetzt quantenmechanisch störungstheoretisch behandelt, dann führen sie zu einer Verbreiterung der δ -Funktionen der Zustandsdichte. Dabei befinden sich die delokalisierten Elektronen nach wie vor in der Mitte der Zustandsdichte bei E_n , und die an den Störstellen gebundenen Elektronen haben eine niedrigere oder höhere Energie als E_n .

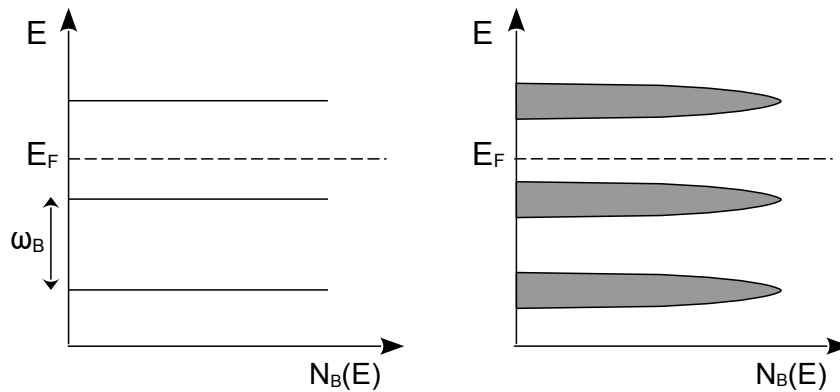


Abbildung 6.8: Zustandsdichte $N_B(E)$ der Landau-Niveaus

E_n und N_B sind beide proportional zu B . Seien jetzt bei einem gewissen Wert des Magnetfeldes B alle Landau-Niveaus gefüllt. Wenn nun B verringert wird, wandern einerseits die Landau-Niveaus E_n nach unten und andererseits können diese Niveaus nicht mehr so viele Elektronen aufnehmen, wie zuvor. Aber anstatt jetzt auf das nächst höhere Landau-Niveau zu springen, besiedeln diese Elektronen jetzt zunächst die energetisch höheren lokalisierten Zustände der Störstellen. Da die lokalisierten Zustände nichts zur Leitfähigkeit beitragen, bleibt diese gleich und das führt genau zu dem beobachteten Plateau-Verhalten.

Wenn umgekehrt B erhöht wird, wandern die Landau-Niveaus E_n nach oben, und bevor die Elektronen auf das nächst tiefere Landau-Niveau springen, besiedeln sie zunächst die energetisch tieferen lokalisierten Zustände der Störstellen. Wenn letztlich alle Landau-Niveaus E_n bis auf den Grundzustand über die Fermi-Energie angewachsen sind gibt es keine weiteren Stufen im Quanten-Hall-Widerstand mehr (magnetic quantum limit).

Die Übergänge zwischen den verschiedenen Quanten-Hall Plateaus werden heute als Phasenübergänge mit Hilfe der Renormierungsgruppe und kritischen Exponenten beschrieben (Wikipedia-Quantum_Hall_Transitions (2022)).

6.14 Andre Geim (1958)

Andre Geim wurde als Russlanddeutscher 1958 in Sotschi am Schwarzen Meer in der Sowjetunion geboren. Er besuchte im nahegelegenen Naltschik die Schule, die er schon mit 16 Jahren erfolgreich abschloß. Von 1976 bis 1982 studierte er am Moskauer Institut für Physik und Technologie, wo er mit einem Diplom abschloß (äquivalent zu unserem jetzigen M.Sc.) und graduierte 1987 zum 'Kandidaten der Wissenschaften' (äquivalent zu unserem Doktor/Ph.D.) am 'Institut für Festkörperphysik der Russischen Akademie der Wissenschaften' in Tschernogolowka. Nach dem Ende der Sowjetunion wechselte er 1990 als Postdoc an die University of Nottingham in Großbritannien und danach an die Radboud-Universität Nijmegen in den Niederlanden. Im Jahr 2001 nahm er eine Berufung auf die 'School of Physics and Astronomy' der Universität Manchester in Großbritannien an, wo er augenblicklich als Direktor des 'Manchester Centre for Mesoscience and Nanotechnology and chair of condensed matter physics' tätig ist. Gleichzeitig arbeitet er auf einer Forschungsprofessur der Royal Society am 'Britischen Nationalen Graphen- Institut'. Seine berühmteste Arbeit, zusammen mit seinem Schüler Konstantin Novoselov (Novoselov u. a. (2004)), ist die Herstellung und Untersuchung von Graphen, d.h. von stabilen 1-lagigen 2-dimensionalen Graphitschicht-Kristallen. Hierfür erhielten beide im Jahr 2010 den Nobelpreis für Physik.

[Quelle: en.wikipedia: Andre_Geim]



Abbildung 6.9: A. Geim,
Bengt Oberger (2018),
CC BY-SA 4.0.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Andre_Geim]

6.15 Konstantin Novoselov (1974)



Abbildung 6.10: K. Novoselov,
Zp2010 (2013),
CC BY-SA 3.0.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Konstantin_Novoselov]

Konstantin Novoselov wurde 1974 in Nizhny Tagil in der Sowjetunion geboren. Er erwarb 1997 am Moskauer Institut für Physik und Technologie sein Diplom (äquivalent zu unserem jetzigen M.Sc.). Anschließend folgt er Andre Geim an die Radboud-Universität Nijmegen in den Niederlanden, wo er im Jahr 2004 unter dessen Anleitung zum Doktor/Ph.D. graduierte. Gegenwärtig arbeitet Novoselov auf einem Lehrstuhl für Physik an der 'School of Physics and Astronomy' der Universität Manchester in Großbritannien und gleichzeitig als Professor am 'Centre for Advanced 2D Materials' der National University of Singapore. Er hat bis heute (Anfang 2023) bereits 376 Forschungspublikationen veröffentlicht. Seine berühmteste Arbeit, zusammen mit seinem Lehrer Andre Geim (Novoselov u. a. (2004)), ist die Herstellung und Untersuchung von Graphen, d.h. von stabilen 1-lagigen 2-dimensionalen Graphitschicht-Kristallen. Hierfür erhielten beide im Jahr

2010 den Nobelpreis für Physik.

[Quelle: en.wikipedia: Konstantin_Novoselov]

6.16 Graphen

Im Jahr 2004 gelang es Andre Geim und Konstantin Novoselov stabile einlagige Graphen-Kristalle herzustellen und zu untersuchen. Diese 2-dimensionalen Graphen-Kristalle zeigen eine Reihe sehr interessanter physikalischer Effekte, u.a. einen fraktionalen Quanten-Hall-Effekt bei Zimmertemperatur - siehe die beiden schönen Übersichtsartikel Geim u. Novoselov (2007) und Katsnelson (2007). Im Jahr 2010 erhielten Geim und Novoselov für ihre Arbeiten der Physik-Nobelpreis.

Diese 2-dimensionalen Graphen-Kristalle bestehen aus Kohlenstoffatomen, die sich 'bienenwabenförmig' in hexagonalen Strukturen anordnen. Ein Kohlenstoffatom hat vier Valenzelektronen, 2 Elektronen besetzen das $2s$ Niveau, und je ein Elektron befindet sich im $2p_x$ und $2p_y$ Niveau. In Graphen sind nun alle Kohlenstoffatome sp^2 -hybridisiert, d.h. jedes Kohlenstoffatom kann 3 gleichwertige σ -Bindungen in der Ebene zu anderen C-Atomen ausbilden. Der Winkel zwischen diesen 3 gleichwertigen Bindungen in der Ebene beträgt $360^\circ/3 = 120^\circ$. Daraus folgt die hexagonale Struktur des Atom-Gitters

in der Ebene. Das nicht hybridisierte $2p$ -Orbital steht wie in Benzol und Graphit senkrecht zur Ring-Ebene und bildet mit den $2p$ -Orbitalen der benachbarten Atome ein delokalisiertes π -Bindungssystem aus.

Wir folgen zunächst González u. a. (1993).

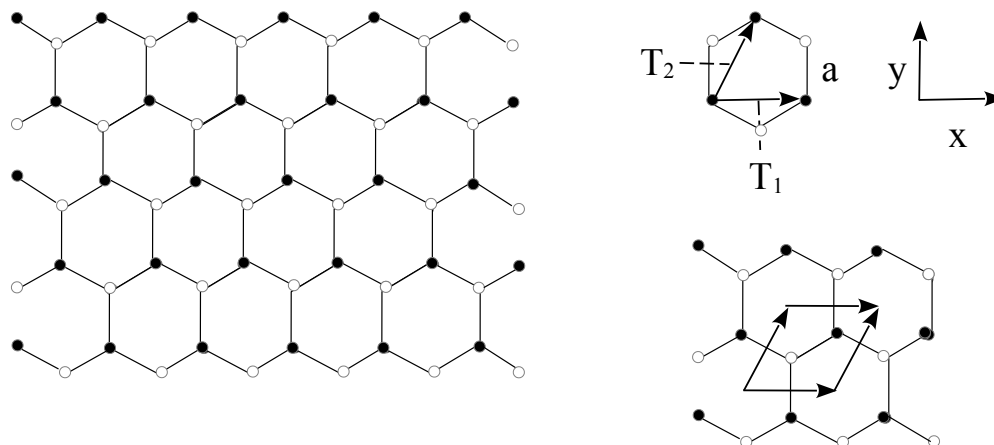


Abbildung 6.11: Geometrie des Graphen-Gitters und seine Elementarzelle

Mit den Translations-Operatoren \hat{T}_1 und \hat{T}_2 erreicht man nur die Hälfte der Graphen-Gitterpunkte, oder anders ausgedrückt, die räumliche Elementarzelle enthält 2 zu unterscheidende Kohlenstoffatome, hier als $\bullet = A$ und $\circ = B$ bezeichnet.

Der Winkel zwischen den im Koordinatenursprung beginnenden Vektoren \vec{T}_1 und \vec{T}_2 beträgt 60° , denn der Winkel zwischen \vec{T}_2 und der Senkrechten beträgt ja gerade $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. Seien \vec{e}_x und \vec{e}_y die Einheitsvektoren in x und y Richtung und a der Betrag der Kantenlänge des Hexagons, dann ergibt sich die folgende Koordinatendarstellung für \vec{T}_1 und \vec{T}_2 :

$$\frac{|\vec{T}_1|/2}{a} = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_1 = \sqrt{3}a \cdot \vec{e}_x, \quad (6.16.1)$$

$$\vec{T}_2 = \frac{\vec{T}_1}{2} + \frac{|\vec{T}_1|}{2} \tan(60^\circ) \cdot \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} \cdot \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \vec{e}_x + \frac{3}{2}a \cdot \vec{e}_y. \quad (6.16.2)$$

Aus den Vektoren \vec{T}_1 und \vec{T}_2 und dem senkrecht dazu stehenden Vektor \vec{e}_z kann man jetzt die Basisvektoren des reziproken Gitters \vec{b}_1 und \vec{b}_2 berechnen, welche die erste Brillouin-Zone des \vec{k} -Raums aufspannen.

$$\vec{T}_1 \cdot (\vec{T}_2 \wedge \vec{e}_z) = \sqrt{3}a\vec{e}_x \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \vec{e}_x + \frac{3}{2}a \cdot \vec{e}_y \right) \wedge \vec{e}_z \right)$$

$$= \sqrt{3}a^2 \vec{e}_x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (-\vec{e}_y) + \frac{3}{2} \vec{e}_x \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2, \quad (6.16.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &:= 2\pi \frac{\vec{T}_2 \wedge \vec{e}_z}{\vec{T}_1 \cdot (\vec{T}_2 \wedge \vec{e}_z)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a^2} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \vec{e}_x + \frac{3}{2} a \cdot \vec{e}_y \right) \wedge \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (-\vec{e}_y) + \frac{3}{2} \vec{e}_x \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} \vec{e}_x - \frac{2\pi}{3a} \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (6.16.4)$$

$$\vec{b}_2 := 2\pi \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{T}_1}{\vec{T}_1 \cdot (\vec{T}_2 \wedge \vec{e}_z)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a^2} (\vec{e}_z \wedge \sqrt{3}a \cdot \vec{e}_x) = \frac{4\pi}{3a} \vec{e}_y. \quad (6.16.5)$$

Während der Winkel zwischen den Ortsraum-Translations-Vektoren \vec{T}_1 und \vec{T}_2 60° beträgt, ergibt sich für den Winkel zwischen den \vec{k} -Raum-Translations-Vektoren \vec{b}_1 und \vec{b}_2 120° , und damit wiederum eine hexagonale Struktur der \vec{k} -Raum-Elementarzelle, d.h. der 1. Brillouin-Zone:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{b}_1, \vec{b}_2) &= \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1| \cdot |\vec{b}_2|} = \frac{-\frac{8\pi^2}{9a^2}}{\sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{3a^2} + \frac{4\pi^2}{9a^2}\right) \cdot \frac{16\pi^2}{9a^2}}} = \frac{-\frac{8\pi^2}{9a^2}}{\sqrt{\frac{16\pi^2}{9a^2} \cdot \frac{16\pi^2}{9a^2}}} \\ &= -\frac{8\pi^2}{16\pi^2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = 120^\circ. \end{aligned}$$

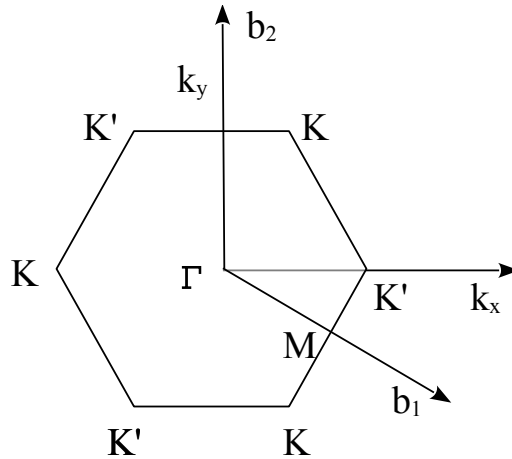


Abbildung 6.12: 1. Brillouin-Zone von Graphen

Für die ausgezeichneten Punkte Γ, M, K und K' im ersten Quadranten der 1. Brillouin-Zone ergeben sich die folgenden Koordinaten im \vec{k} -Raum:

- Der Punkt Γ liegt definitionsgemäß im Ursprung:

$$\Gamma = (0, 0).$$

- Der Punkt M im ersten Quadranten hat als y -Koordinate gerade den Wert von $b_2/2$ und damit folgen die Koordinaten von M :

$$M = \left(0, \frac{2\pi}{3a}\right).$$

- Des Vertex K hat die y -Koordinate $b_2/2$. Der Winkel zwischen der y -Achse und der Linie $\overline{\Gamma K}$ beträgt 30° (nämlich $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$) und damit folgt für die x -Koordinate von K gerade $b_2/2 \cdot \tan(30^\circ) = b_2/2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. Also sind die Koordinaten von K :

$$K = \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}a}, \frac{2\pi}{3a}\right).$$

- Der Vertex K' liegt auf der x -Achse. Der Winkel zwischen der x -Achse und der Linie $\overline{\Gamma M}$ beträgt erneut 30° (nämlich $180^\circ - 90^\circ - 60^\circ$) und damit folgt für die Länge der Linie $\overline{\Gamma K'}$ gerade $\overline{\Gamma M} / \cos(30^\circ) = (b_2/2) / (\sqrt{3}/2) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}$. Also sind die Koordinaten von K' :

$$K' = \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0\right).$$

- Alle anderen Vertizes der 1. Brillouin-Zone folgen durch Symmetrieoperationen.

Im nächsten Schritt sollen die \vec{k} -abhängigen Energieeigenwerte von Graphen in einem allereinfachsten Modell, dem Tight-Binding-Modell, berechnet werden. Bei diesem Modell wird eine 1-Elektronen Näherung verwendet und in unserem Fall darüber hinaus auch nur die Wechselwirkung eines Valenz-Elektrons eines Graphen-Atoms mit jeweils einem Valenz-Elektron seiner drei unmittelbar benachbarten Atome berücksichtigt.

Sei $\psi_{n\vec{k}}$ eine Bloch-Wellenfunktion zum Energieband n und dem Energie-Eigenwert $E_{n\vec{k}}$, siehe 3.2. Dann gilt:

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) := e^{i\vec{k}\vec{r}} w_{n\vec{k}}(\vec{r}), \quad \text{und} \quad (6.16.6)$$

$$w_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = w_{n\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{R} := p\vec{T}_1 + q\vec{T}_2, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (6.16.7)$$

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}(\vec{r} + \vec{R})} w_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\vec{R}} e^{i\vec{k}\vec{r}} w_{n\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{R}} \psi_{n\vec{k}}(\vec{r}). \quad (6.16.8)$$

Im Tight-Binding Modell ist eine Beschreibung der elektronischen Wellenfunktionen mittel delocalisierter Bloch-Wellenfunktionen nicht sehr sinnvoll und man wählt deshalb als Ansatz für eine Wellenfunktion eine Überlagerung lokaler atomarer Wellenfunktionen $\phi_n(\vec{r} - \vec{R}_i)$ an den verschiedenen Gitterpunkten \vec{R}_i .

Man könnte die Qualität dieser Näherung noch verbessern, indem man als Ansatzfunktionen nicht $\phi_n(\vec{r} - \vec{R}_i)$ verwendet, sondern an jedem Gitterpunkt \vec{R}_i eine Linearkombination $\sum_n \alpha_n \phi_n(\vec{r} - \vec{R}_i)$ verwendet, und anschließend die Faktoren α_n mit einem Variationsverfahren bestimmt. Man spricht dann von einer LCAO-Wannierfunktion,

aber diesen numerischen Aufwand wollen wir für unsere einfachen Überlegungen nicht betreiben. Wir machen also den einfachen Wannier-Ansatz:

$$\psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\vec{k}\vec{R}_i} \phi_n(\vec{r} - \vec{R}_i). \quad (6.16.9)$$

Hierbei sei N die Normierungskonstante der Wellenfunktion $\psi_{n\vec{k}}(\vec{r})$. Tatsächlich erfüllt diese Wannier-Wellenfunktion auch die Bloch'sche Periodizitätsbedingung, denn mit einem Gittervektor \vec{R} gilt:

$$\begin{aligned} \psi_{n\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\vec{k}\vec{R}_i} \phi_n(\vec{r} + \vec{R} - \vec{R}_i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\vec{k}(\vec{R}_i - \vec{R} + \vec{R})} \phi_n(\vec{r} + \vec{R} - \vec{R}_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\vec{k}\vec{R}_j} e^{i\vec{k}\vec{R}} \phi_n(\vec{r} - \vec{R}_j) = e^{i\vec{k}\vec{R}} \psi_{n\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{mit } \vec{R}_j := \vec{R}_i - \vec{R}. \end{aligned} \quad (6.16.10)$$

Wenn man hierbei pro Atom eine Linearkombination atomarer Wellenfunktionen verwendet spricht man von einer Wannier-LCAO-Wellenfunktion, wenn man pro Atom jedoch nur eine atomare Wellenfunktion auswählt spricht man von einer einfachen Wannier-Wellenfunktion. Wir wählen hier für die Konstruktion der Wannier-Wellenfunktion pro Atom nur eine einzige atomare Wellenfunktion und nur das unterste Band mit $n = 1$, also:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{i\vec{k}\vec{R}_i} \phi(\vec{r} - \vec{R}_i). \quad (6.16.11)$$

Sei nun \hat{H} der Schrödinger-Hamilton-Operator, dann kann man die Schrödinger-Gleichung auch als das folgende Variationsproblem formulieren:

$$\begin{aligned} \int d^2r \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \hat{H} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= E_{\vec{k}} \int d^2r \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j} e^{i\vec{k}(\vec{R}_j - \vec{R}_i)} \int d^2r \phi^*(\vec{r} - \vec{R}_i) \hat{H} \phi(\vec{r} - \vec{R}_j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j} e^{i\vec{k}(\vec{R}_j - \vec{R}_i)} \int d^2r' \phi^*(\vec{r}') \hat{H} \phi(\vec{r}' - (\vec{R}_j - \vec{R}_i)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r' \phi^*(\vec{r}') \hat{H} \phi(\vec{r}' - \vec{R}_l) \quad \Rightarrow \\ \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi^*(\vec{r}) \hat{H} \phi(\vec{r} - \vec{R}_l) &= E_{\vec{k}} \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r} - \vec{R}_l). \end{aligned} \quad (6.16.12)$$

Satz 6.16.1 (Graphen-Bandstruktur) Die Elementarzelle von Graphen enthält 2 Kohlenstoff-Atome, die hier als die Atome A und B des Graphen-Gitters-A und des Graphen-Gitters-B bezeichnet werden. Die Vektoren \vec{u}_i seien die Vektoren von einem Graphen A Atom zu seinen drei nächsten Nachbar Graphen B Atomen. Die Wellenfunktionen $\phi_A(\vec{r})$ und $\phi_B(\vec{r})$ seien die atomaren Wellenfunktionen der Valenzelektronen der Atome A und B.

Im allereinfachsten Tight-Binding Modell der Schrödinger-Gleichung für das 2-dimensionale hexagonale Graphen-Gitter folgt für die Energie-Eigenwerte $E_{\vec{k}}$:

$$E_{\vec{k}} = \pm \gamma \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a\right) \cos\left(\frac{3}{2} k_y a\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a\right)} \quad (6.16.13)$$

mit dem 'Transfer-Integral' (oder 'Hopping-Integral') γ :

$$\gamma = \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{u}_i) . \quad (6.16.14)$$

Beweis: Da der Überlapp der atomaren Wellenfunktionen $\phi^*(\vec{r})\phi(\vec{r} - \vec{R}_l)$ für $\vec{R}_l \neq 0$ sehr klein ist, reduzieren wir die Summe über \vec{R}_l auf $\vec{R}_l = 0$ plus \vec{R}_l der nächsten Nachbarn und setzen als nächste Näherung die Normierung der Wannier-Wellenfunktionen als konstant an, d.h. der Einfachheit halber als 1:

$$E_{\vec{k}} = \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2 r \phi^*(\vec{r}) \hat{H} \phi(\vec{r} - \vec{R}_l) , \quad (6.16.15)$$

$$N = \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2 r \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r} - \vec{R}_l) \stackrel{!}{=} 1 . \quad (6.16.16)$$

Die Summe über $\vec{R}_l \neq 0$ soll nun in der üblichen Tight-Binding Näherung nur über die jeweils drei nächsten Nachbarn jedes Graphen-Atoms gehen. Allerdings haben wir in der Graphen-Elementarzelle zwei Atome, welche durch einen Vektor \vec{a} der Länge a verbunden seien. Deshalb erweitern wir also unseren Ansatz für die Wannierfunktion $\phi(\vec{r})$ zur folgenden Linearkombination:

$$\phi(r) := c_A \phi_A(\vec{r}) + c_B e^{i\vec{k}\vec{a}} \phi_B(\vec{r} - \vec{a}) . \quad (6.16.17)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich für die Normierung:

$$\begin{aligned} N &= \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2 r \phi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r} - \vec{R}_l) \\ &= c_A^* c_A \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \phi_A(\vec{r} - \vec{R}_l) \\ &\quad + c_A^* c_B \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} e^{i\vec{k}\vec{a}} \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \phi_B(\vec{r} - \vec{R}_l - \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_B^* c_A \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} e^{-i\vec{k}\vec{a}} \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \phi_A(\vec{r} - \vec{R}_l) \\
& + c_B^* c_B \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \phi_B(\vec{r} - \vec{R}_l - \vec{a}) .
\end{aligned}$$

In allen vier Zeilen werden nur die Terme mit $\vec{R}_l = 0$ betrachtet und die 2. und 3. Zeile werden komplett gestrichen, wegen des Arguments eines zu geringen Überlapps der atomaren Wellenfunktionen $\phi_A^*(\vec{r})$ und $\phi_B(\vec{r} - \vec{a})$. Weiter seien die atomaren Wellenfunktion $\phi_A(\vec{r})$ und $\phi_B(\vec{r})$ auf 1 noriert. Damit bleibt für N übrig:

$$\begin{aligned}
N & = c_A^* c_A \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \phi_A(\vec{r}) \\
& + c_B^* c_B \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \phi_B(\vec{r} - \vec{a}) \\
& = c_A^* c_A + c_B^* c_B = (c_A^*, c_B^*) \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} := 1 , \tag{6.16.18}
\end{aligned}$$

da wir für die Wannier-Funktion ja die Normierung 1 angenommen hatten.

Für den Energieeigenwert $E_{\vec{k}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
E_{\vec{k}} & = \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi^*(\vec{r}) \hat{H} \phi(\vec{r} - \vec{R}_l) \\
& = c_A^* c_A \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_A(\vec{r} - \vec{R}_l) \\
& + c_A^* c_B \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} e^{i\vec{k}\vec{a}} \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{R}_l - \vec{a}) \\
& + c_B^* c_A \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} e^{-i\vec{k}\vec{a}} \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_A(\vec{r} - \vec{R}_l) \\
& + c_B^* c_B \sum_l e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{R}_l - \vec{a}) .
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke kann man nun weiter vereinfachen. Zunächst einmal hat ein 2-dim. Gitter mit periodischen Randbedingungen (Born-von-Kármán Randbedingungen) die topologische Form eines Torus und eine Summe über alle Gitterpunkte $\vec{R}_l \pm$ einem Gittervektor \vec{a} ist wieder gleich einer Summe über alle Gittervektoren:

$$\vec{R}_l + \vec{a} = \vec{R}_i , \quad \vec{R}_l - \vec{a} = \vec{R}_j .$$

In der Tight-Binding Näherung mit der ausschließlichen Berücksichtigung der nächsten Nachbarn kann in der 1. und der 4. Zeile aus der Summe \sum_l nur der Term mit $l = 0$ eine Rolle spielen, denn der Überlapp der Wellenfunktionen von A-Atomen, welche mit einem $\vec{R}_l \neq 0$ voneinander entfernt sind wird nicht mehr berücksichtigt. Das Gleiche gilt für den Überlapp der Wellenfunktionen von B-Atomen.

$$\begin{aligned}
E_{\vec{k}} &= c_A^* c_A \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_A(\vec{r}) \\
&+ c_A^* c_B \sum_i e^{i\vec{k}\vec{R}_i} \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{R}_i) \\
&+ c_B^* c_A \sum_j e^{i\vec{k}\vec{R}_j} \int d^2 r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_A(\vec{r} - \vec{a} - \vec{R}_j) \\
&+ c_B^* c_B \int d^2 r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{a}) .
\end{aligned}$$

Übrig bleiben also die 2. und 3. Zeile, welche den Überlapp von A-Atomen mit ihren 3 benachbarten B-Atomen und den Überlapp von B-Atomen mit ihren 3 benachbarten A-Atomen beschreiben.

Seien $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ die Vektoren von einem Atom $\bullet = A$ zu seinen drei nächsten Nachbarn, und ebenso $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ die Vektoren von einem Atom $\circ = B$ zu dessen drei nächsten Nachbarn. Seien \vec{e}_x und \vec{e}_y wieder die 2-dim. Einheitsvektoren. Dann gilt:

$$\vec{u}_1 = a\vec{e}_y , \quad (6.16.19)$$

$$\vec{u}_{2x} = -a \cos(30^\circ) \vec{e}_x = -a \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x , \quad \vec{u}_{2y} = -a \sin(30^\circ) \vec{e}_y = -a \frac{1}{2} \vec{e}_y , \quad (6.16.20)$$

$$\vec{u}_{3x} = a \cos(30^\circ) \vec{e}_x = a \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x , \quad \vec{u}_{3y} = -a \sin(30^\circ) \vec{e}_y = -a \frac{1}{2} \vec{e}_y , \quad (6.16.21)$$

$$\vec{v}_1 = -a\vec{e}_y , \quad (6.16.22)$$

$$\vec{v}_{2x} = a \cos(30^\circ) \vec{e}_x = a \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x , \quad \vec{v}_{2y} = a \sin(30^\circ) \vec{e}_y = a \frac{1}{2} \vec{e}_y , \quad (6.16.23)$$

$$\vec{v}_{3x} = -a \cos(30^\circ) \vec{e}_x = -a \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x , \quad \vec{v}_{3y} = a \sin(30^\circ) \vec{e}_y = a \frac{1}{2} \vec{e}_y . \quad (6.16.24)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
E_{\vec{k}} &= c_A^* c_A \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_A(\vec{r}) \\
&+ c_A^* c_B \sum_i e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \int d^2 r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{u}_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_B^* c_A \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j} \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_A(\vec{r} - \vec{a} - \vec{v}_j) \\
& + c_B^* c_B \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{a}) .
\end{aligned}$$

Nun gilt aus Symmetriegründen:

$$\beta := \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_A(\vec{r}) = \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{a}) , \quad (6.16.25)$$

$$\gamma := \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_B(\vec{r} - \vec{u}_i) = \int d^2r \phi_B^*(\vec{r} - \vec{a}) \hat{H} \phi_A(\vec{r} - \vec{a} - \vec{v}_j) , \quad (6.16.26)$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned}
E_{\vec{k}} &= (c_A^*, c_B^*) \begin{pmatrix} \beta & \gamma \sum_i e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \\ \gamma \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} , \quad \text{bzw.} \\
E_{\vec{k}} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \beta & \gamma \sum_i e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \\ \gamma \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} .
\end{aligned} \quad (6.16.27)$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung zur Bestimmung von $E_{\vec{k}}$ und $(c_A, c_B)^T$:

$$\begin{vmatrix} \beta - E_{\vec{k}} & \gamma \sum_i e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \\ \gamma \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j} & \beta - E_{\vec{k}} \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\beta - E_{\vec{k}})^2 = \gamma^2 \sum_{ii} e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j} .$$

Nun ist $\beta = \int d^2r \phi_A^*(\vec{r}) \hat{H} \phi_A(\vec{r})$ eine von \vec{k} unabhängige Konstante, die nur den Energienullpunkt verschiebt, und ist für uns daher uninteressant. Also setzen wir $\beta = 0$ und erhalten:

$$E_{\vec{k}} = \pm \gamma \sqrt{\sum_i e^{i\vec{k}\vec{u}_i} \sum_j e^{i\vec{k}\vec{v}_j}} . \quad (6.16.28)$$

Dieser Ausdruck soll im Folgenden mit den \vec{u}_i und \vec{v}_j der jeweils nächsten Nachbarn ausgewertet werden. Wir weichen nun in unseren Bezeichnungen leicht von der Arbeit von González u. a. (1993) ab, welche den Faktor a in \vec{u}_i und \vec{v}_j nicht explizit aufführen. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{u}_i} &= e^{i\vec{k}\vec{u}_1} + e^{i\vec{k}\vec{u}_2} + e^{i\vec{k}\vec{u}_3} \\
&= e^{ik_y a} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{1}{2}k_y a} + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{1}{2}k_y a}, \\
\sum_{j=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{v}_j} &= e^{i\vec{k}\vec{v}_1} + e^{i\vec{k}\vec{v}_2} + e^{i\vec{k}\vec{v}_3} \\
&= e^{-ik_y a} + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{1}{2}k_y a} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{1}{2}k_y a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{u}_i} e^{i\vec{k}\vec{v}_j} &= \left(e^{ik_y a} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{1}{2}k_y a} + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{1}{2}k_y a} \right) \\
&\quad \cdot \left(e^{-ik_y a} + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{1}{2}k_y a} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{1}{2}k_y a} \right) \\
&= 1 + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{3}{2}k_y a} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + i\frac{3}{2}k_y a} \\
&\quad + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{3}{2}k_y a} + 1 + e^{-i\sqrt{3}k_x a} \\
&\quad + e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - i\frac{3}{2}k_y a} + e^{i\sqrt{3}k_x a} + 1 \\
&= 3 + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + \frac{3}{2}k_y a\right) + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - \frac{3}{2}k_y a\right) + 2 \cos(\sqrt{3}k_x a).
\end{aligned}$$

Mit $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$ und $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{u}_i} e^{i\vec{k}\vec{v}_j} &= 3 + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a + \frac{3}{2}k_y a\right) + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a - \frac{3}{2}k_y a\right) \\
&\quad + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right) - 2 \\
&= 1 + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y a\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt für $E_{\vec{k}}$ die Behauptung:

$$E_{\vec{k}} = \pm \gamma \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right) \cos\left(\frac{3}{2}k_y a\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x a\right)}. \quad \square$$

Tatsächlich bestätigen aufwendigere Bandstruktur-Berechnungen (siehe z.B. Ribeiro u. a. (2009), Bross (2013)) diesen schlichten Tight-Binding Ansatz. Das ist zunächst

einmal eigentlich recht erstaunlich. Die Erklärung für diese Tatsache liegt in der deutlichen Lokalisierung der Kohlenstoff-Atome im 2-dim. Graphen-Gitter in Verbindung mit den geometrisch-topologischen Randbedingungen.

An den sechs Vertizes der 1.Brillouin-Zone berühren sich das obere und das untere Energieband bei $E_{\vec{k}} = 0$. Dies sei hier für K und K' im ersten Quadranten gezeigt.

$$\begin{aligned}
K : (E_{\vec{k}})^2 &= \gamma^2 [1 + 4 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a) \cos(\frac{3}{2} k_y a) + 4 \cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a)] \\
&= \gamma^2 [1 - 4 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} a) \cos(\frac{3}{2} \frac{2\pi}{3a} a) + 4 \cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} a)] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \cos(\frac{\pi}{3}) \cos(\pi) + 4 \cos^2(\frac{\pi}{3})] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \cos(60^\circ) \cos(180^\circ) + 4 \cos^2(60^\circ)] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \frac{1}{2} (-1) + 4 \frac{1}{4}] = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K' : (E_{\vec{k}})^2 &= \gamma^2 [1 + 4 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a) \cos(\frac{3}{2} k_y a) + 4 \cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2} k_x a)] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} a) \cos(0) + 4 \cos^2(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} a)] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \cos(\frac{2\pi}{3}) + 4 \cos^2(\frac{2\pi}{3})] \\
&= \gamma^2 [1 + 4 \cos(120^\circ) + 4 \cos^2(120^\circ)] \\
&= \gamma^2 [1 + 4(-\frac{1}{2}) + 4 \frac{1}{4}] = 0 .
\end{aligned}$$

Da sich bei Graphen in jedem Kohlenstoffatom ein Elektron in einem nicht hybridisierten $2p$ -Orbital senkrecht zur Ringebene befindet ist im Grundzustand das negative Valenzband komplett besetzt und das positive Leitungsband komplett leer. Wegen der Bandstruktur $E_{\vec{k}}$ liegt daher das Fermi-Niveau bei Null und es wird tatsächlich nur an den 6 Vertex-Punkten K , K' und deren Symmetriepunkten erreicht. Diese 6 Vertizes heißen auch Dirac-Punkte und die Bandstruktur in ihrer Umgebung Dirac-Kegel. Die Linearität der Bandstruktur in der Umgebung der Vertizes erlaubt in Zusammenhang mit der 2-atomigen Elementarzelle (A-Atom und B-Atom) eine Beschreibung mittels einer 2-komponentigen masselosen Dirac-Gleichung.

Zur Erinnerung an die Dirac-Gleichung und zur Festlegung unserer Bezeichnungen seien diese hier nochmals aufgeführt:

Wir verwenden in der vierdimensionalen Raumzeit die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ und als Basen der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ diese beiden Sätze von 2×2 Matrizen:

$$\sigma_\mu := (-\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_\mu = (-\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{bzw.}$$

$$\sigma^\mu := (\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{mit}$$

$$\mu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 := - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1},$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

Die Diracschen Gamma-Matrizen verwenden wir in der folgenden Weyl-Darstellung:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für den Diracschen Bispinor $\psi^T := (\psi_L, \psi_R)^T$ die folgende Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} + mc\mathbb{1})\psi = (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi = \vec{0}, \quad \text{bzw.}$$

$$(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi(p, x) = (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc\mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0}.$$

Wenn nun für die Teilchenmasse $m = 0$ gilt, dann entkoppeln in der Dirac-Gleichung die beiden Bispinor-Anteile und man erhält die beiden Dirac-Weyl-Gleichungen:

$$(\bar{\sigma}^\mu p_\mu)\psi_L(p, x) = \vec{0},$$

$$(\sigma^\mu p_\mu)\psi_R(p, x) = \vec{0}.$$

Für ψ_R und stationäre Zustände kann man schreiben:

$$\psi_R(p, x) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \chi_R(\vec{p}, x).$$

$$(\sigma^0 p_0 + \sigma^i p_i)\psi_R(p, x) = i\hbar(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \partial_i)\psi_R(p, x)$$

$$= i\hbar(\sigma^0(-i\frac{E}{\hbar c}) + \sigma^i \partial_i)e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \chi_R(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{E}{c} \mathbb{1} \chi_R(\vec{p}, x) = -i\hbar \sigma^i \partial_i \chi_R(\vec{p}, \vec{r}) \quad \Rightarrow$$

$$E \mathbb{1} \chi_R(\vec{p}, x) = -i\hbar c \vec{\sigma} \vec{\nabla} \chi_R(\vec{p}, \vec{r}).$$

Für den Hamilton-Operators für relativistische Quasi-Teilchen mit verschwindender Masse in einem 2-dimensionalen Festkörper, welche aufgrund der Gitterperiodizität der Bloch-Bedingung gehorchen, folgt daher:

$$\chi(\vec{p}, \vec{r}) = e^{i\hbar\vec{k}\vec{r}} u(\vec{r}) \quad \text{mit } u(\vec{r} + \vec{a}) = u(\vec{r}),$$

$$\hat{H}u_R(\vec{r}) = \pm(-i\hbar c \vec{\sigma} \vec{\nabla})u_R(\vec{r}) = \pm(\hbar c \vec{\sigma}(\hbar\vec{k}))u_R(\vec{r}).$$

In der Nähe eines Dirac-Punktes von Graphen mit $E_F = 0$ ergibt sich in der Tight-Binding Näherung ein effektiver Hamilton-Operator:

$$\hat{H}_{\text{eff}}u_R(\vec{r}) = \pm(\hbar v_F \vec{\sigma}(\hbar\vec{k}))u_R(\vec{r}).$$

Dieser Hamilton-Operator ähnelt also einem rechtshändigen Weyl-Dirac-Operator mit v_F statt c .

Satz 6.16.3 (Graphen Dirac-Punkte) Wenn man \hat{H} um einen Dirac-Punkt herum entwickelt, wir nehmen hier K' , dann erhält man eine 2-komponentige masselo-

se Dirac-Gleichung, bei welcher anstelle der Lichtgeschwindigkeit c jetzt die Fermi-Geschwindigkeit $v_F := \frac{3\gamma a}{2\hbar}$ steht. Bei Graphen ergibt sich mit $a \approx 2.46 \text{ \AA}$ und $\gamma \approx 2.8 \text{ eV}$ die Fermi-Geschwindigkeit $v_F \approx 1.57 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma \sum_i e^{i\hbar \vec{k} \vec{u}_i} \\ \gamma \sum_j e^{i\hbar \vec{k} \vec{v}_j} & 0 \end{pmatrix} \approx -\frac{3}{2} \gamma a \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\hbar v_F (\vec{\sigma} \cdot \hbar \delta \vec{k}) . \end{aligned} \quad (6.16.29)$$

$$v_F := \frac{3\gamma a}{2\hbar} \approx 1.57 \cdot 10^5 \frac{m}{s} . \quad (6.16.30)$$

Beweis: In der Umgebung von K' gilt: $K' + \delta \vec{k} = (\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + \delta k_x, \delta k_y)$. Daraus folgt (unter Berücksichtigung von $\cos(x+a) \approx \cos(a) - x \sin(a)$, Bronstein u. Semendjajew (1971), S.279):

$$\begin{aligned} \sum_i e^{i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{u}_i} &= \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{u}_1] + \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{u}_2] + \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{u}_3] \\ &= \exp[i\hbar(\delta k_y)a] \\ &\quad + \exp[i\hbar(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + \delta k_x)(-\frac{\sqrt{3}a}{2}) + i\hbar(\delta k_y)(-\frac{a}{2})] \\ &\quad + \exp[i\hbar(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + \delta k_x)(\frac{\sqrt{3}a}{2}) + i\hbar(\delta k_y)(-\frac{a}{2})] \\ &= \exp[i\hbar(\delta k_y)a] + \exp[-i\hbar(\delta k_y)(\frac{a}{2})] 2 \cos[\frac{\sqrt{3}a}{2} \hbar \delta k_x + \frac{2\pi}{3}] \\ &\approx (1 + i\hbar a \delta k_y) + (1 - i\hbar \frac{a}{2} \delta k_y) 2 [\cos(\frac{2\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}a}{2} \hbar \delta k_x \sin(\frac{2\pi}{3})] \\ &= (1 + i\hbar a \delta k_y) + (1 - i\hbar \frac{a}{2} \delta k_y) 2 [\cos(120^\circ) - \frac{\sqrt{3}a}{2} \hbar \delta k_x \sin(120^\circ)] \\ &= (1 + i\hbar a \delta k_y) + (1 - i\hbar \frac{a}{2} \delta k_y) 2 [-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2} \hbar \delta k_x \frac{\sqrt{3}}{2}] \\ &= (1 + i\hbar a \delta k_y) + (1 - i\hbar \frac{a}{2} \delta k_y) (-1 - \frac{3a}{2} \hbar \delta k_x) \\ &\approx (1 + i\hbar a \delta k_y) + (-1 + i\hbar \frac{a}{2} \delta k_y - \frac{3a}{2} \hbar \delta k_x) = -\frac{3a}{2} \hbar (\delta k_x - i\delta k_y) . \end{aligned}$$

$$\sum_j e^{i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{v}_j} = \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{v}_1] + \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{v}_2] + \exp[i\hbar(K'+\delta\vec{k})\vec{v}_3]$$

$$\begin{aligned}
&= \exp[i\hbar(\delta k_y)(-a)] \\
&\quad + \exp\left[i\hbar\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + \delta k_x\right)\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) + i\hbar(\delta k_y)\left(\frac{a}{2}\right)\right] \\
&\quad + \exp\left[i\hbar\left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} + \delta k_x\right)\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) + i\hbar(\delta k_y)\left(\frac{a}{2}\right)\right] \\
&= \exp[-i\hbar(\delta k_y)a] + \exp\left[i\hbar(\delta k_y)\left(\frac{a}{2}\right)\right] 2 \cos\left[\frac{\sqrt{3}a}{2}\hbar\delta k_x + \frac{2\pi}{3}\right] \\
&\approx (1 - ia\delta k_y) + (1 + i\frac{a}{2}\delta k_y) 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}a}{2}\delta k_x \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= (1 - i\hbar a\delta k_y) + (1 + i\hbar\frac{a}{2}\delta k_y) 2\left[\cos(120^\circ) - \frac{\sqrt{3}a}{2}\hbar\delta k_x \sin(120^\circ)\right] \\
&= (1 - i\hbar a\delta k_y) + (1 + i\hbar\frac{a}{2}\delta k_y) 2\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}a}{2}\hbar\delta k_x \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\
&= (1 - i\hbar a\delta k_y) + (1 + i\hbar\frac{a}{2}\delta k_y)\left(-1 - \frac{3a}{2}\hbar\delta k_x\right) \\
&\approx (1 - i\hbar a\delta k_y) + (-1 - i\hbar\frac{a}{2}\delta k_y - \frac{3a}{2}\hbar\delta k_x) \\
&= -\frac{3a}{2}\hbar(\delta k_x + i\delta k_y).
\end{aligned}$$

Mit $\vec{\sigma} := (\sigma_x, \sigma_y)$ folgt:

$$\hat{H} \approx -\frac{3}{2}\gamma a \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\gamma a (\vec{\sigma} \cdot \hbar\vec{k}).$$

Der 2-dim. Dirac-Hamilton-Operator ist:

$$\hat{H}(\vec{r}) = c(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \quad \leftrightarrow \quad \hat{H}(\vec{k}) = c((\vec{\sigma} \cdot \hbar\vec{k})),$$

und damit steht hier anstelle von c die Geschwindigkeit am Dirac-Punkt $v_F := \frac{3\gamma a}{2\hbar}$.

$$\begin{aligned}
v_F &\approx \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6.6 \cdot 10^{-34} \text{Js}}\right) (2.8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}) \cdot (2.46 \cdot 10^{-10} \text{m}) \\
&= 1.5 \cdot \frac{1}{6.6} \cdot 2.8 \cdot 2.46 \cdot 10^{-10} \text{m} = 1.57 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
\end{aligned}$$

□

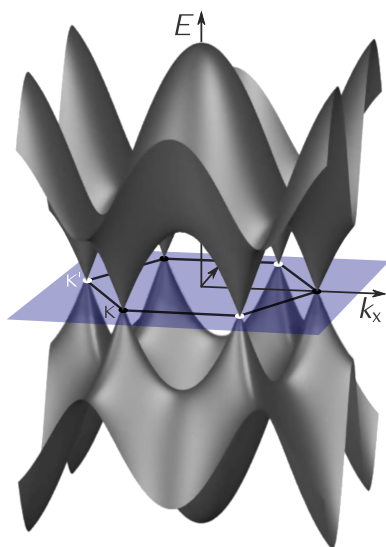


Abbildung 6.13: Graphen-Bandstruktur mit Dirac-Punkten

Ponor, 2020, CC BY-SA 4.0

[<https://commons.wikimedia.org/>

wiki/File:Electronic_band_structure_of_graphene.svg]

Von großer Bedeutung für das Verständnis einer Anomalie im integralen Quanten-Hall-Effekt bei Graphen sind die Nullmoden des masselosen Weyl-Dirac-Operators, die letztlich ein Ergebnis eines Atiyah-Singer Indexsatzes sind. Wir folgen der Arbeit von Tenjinbayashi u. a. (2007). Als Geometrie für das 2-dimensionale Graphen wählen die Autoren, wie in der Festkörperphysik üblich, eine d -dimensionale Fläche D_{ab} mit der Dimension $d \geq 2$ und mit *periodischen Randbedingungen* (Born-von-Kármán-Modell). Dadurch ist D_{ab} topologisch äquivalent zu einem Torus T^d . Der erste Schritt ist der Nachweis, daß in der Quantenmechanik auf einem Torus T^d das Raum-Integral über die Feldstärke 2-Form eine ganze Zahl mal 2π ist.

Lemma 6.16.5 *Sei eine quantenmechanische Wellenfunktion auf einem d -dimensionalen Torus T^d gegeben. Sei weiter ein Abelsches Eichfeld A als eine 1-Form gegeben, dann ist das folgende Integral der Feldstärke 2-Form $F := dA$, also der Fluß der Feldstärke F des Eichfeldes A durch D_{ab} , eine ganze Zahl mal 2π :*

$$A := \sum_a A_a(x) dx^a \quad \Rightarrow \quad (6.16.31)$$

$$F := dA = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}(x) dx^a \wedge dx^b, \quad (6.16.32)$$

$$2\pi\phi_{ab} = \int_{D_{ab}} F \quad \text{mit } \phi_{ab} \in \mathbb{Z}. \quad (6.16.33)$$

Beweis: Sei C ein geschlossener Weg im Bereich D_{ab} . Wir betrachten den Paralleltransport einer quantenmechanischen Wellenfunktion bei einer Umrundung auf C und erhalten dabei als Phasenfaktor der Wellenfunktion:

$$\exp \left[-i \oint_C A \right] = \begin{cases} \exp \left[-i \int_{D_1} F \right] & \text{mit } D_1 \subset D_{ab} \text{ und } D_1 \text{ innerhalb von } C, \\ \exp \left[-i \int_{D_2} F \right] & \text{mit } D_2 \subset D_{ab} \text{ und } D_2 \text{ außerhalb von } C. \end{cases}$$

Das Wegintegral $\oint_C A$ ist nach dem Satz von Stokes gleich dem Flächenintegral von F über die eingeschlossene Fläche D_1 . Im Fall von $D_{ab} \simeq T^d$ ist aber $\oint_C A$ auch gleich dem Flächenintegral von F über die eingeschlossene äußere Fläche D_2 - und diese beiden Integrale müssen ja gleich sein.

Sei nun

$$2\pi\phi_{ab} = \int_{D_{ab}} F,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} \exp[-i2\pi\phi_{ab}] &= \exp \left[-i \int_{D_{ab}} F \right] = \exp \left[-i \int_{D_1 \cup D_2} F \right] = \exp \left[-i \left(\int_{D_1} F + \int_{D_2} F \right) \right] \\ &= \exp \left[-i \int_{D_1} F \right] \exp \left[-i \int_{D_2} F \right] = \exp \left[-i 2 \int_{D_2} F \right]. \end{aligned}$$

Nun können wir C immer weiter vergrößern, so daß es letztlich ganz D_{ab} umfaßt. Mathematisch gesprochen bedeutet das, daß man die folgende Homtopie auf D_{ab} einführt

$$D_{ab} = (t-1) \cdot D_1 \cup (t) \cdot D_2 \quad \text{mit } t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Für $t = 1$ ist also $D_{ab} = D_2$ und damit folgt:

$$\begin{aligned} \exp \left[-i \int_{D_{ab}} F \right] &= \exp \left[-i 2 \int_{D_2} F \right] = \exp \left[-i 2 \int_{D_{ab}} F \right] \Rightarrow \\ \exp[-i2\pi\phi_{ab}] &= \exp[-i4\pi\phi_{ab}] \Rightarrow \\ 1 &= \exp[-i2\pi\phi_{ab}] \Rightarrow \phi_{ab} \in \mathbb{Z}. \quad \square \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir, im Gegensatz zu Tenjinbayashi u. a. (2007), nur noch den 2-dimensionalen Fall T^2 , wie er für die Anwendung auf Graphen von Bedeutung ist. Sei nun ein konstantes Magnetfeld B senkrecht zur Graphen-Ebene D_{ab} gegeben. In der Landau-Eichung (6.11.1) schreibt man dann:

$$\vec{A} := \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (6.16.34)$$

bzw. in der Differentialformen-Schreibweise mit $(x^1, x^2) := (x, y)$:

$$\begin{aligned} A &:= A_i dx^i = Bx^1 dx^2 \Rightarrow \\ F &= dA = (\partial_k A_i) dx^k \wedge dx^i = \partial_1 A_2 dx^1 \wedge dx^2 = B. \end{aligned} \quad (6.16.35)$$

Mit dem obigen Lemma folgt also, daß der magnetische Fluß durch D_{ab} diskret ist. Hierbei setzen wir das Volumen von D_{ab} der Einfachheit halber auf 1, d.h. $\int_{D_{ab}} = 1$:

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2\pi} \int_{D_{ab}} F = \frac{B}{2\pi}.$$

Der 2-dim. masselose Weyl-Dirac-Operator ist mit den Pauli-Matrizen σ^1 und σ^2 :

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.16.36)$$

$$\hat{H}(\vec{r}) = -i\hbar c(\sigma^k \cdot \partial_k) = \hbar c \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 - \partial_2 \\ -i\partial_1 + \partial_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.16.37)$$

wobei für Graphen in der Nähe der Dirac-Punkte statt der Lichtgeschwindigkeit c die Fermigeschwindigkeit v_F steht. In Anwesenheit eines konstanten Magnetfeldes B senkrecht zur (x^1, x^2) -Ebene gehen die Operatoren $\hat{p}_k = -i\hbar\partial_k$ über in $\hat{p}_k = -i\hbar\partial_k + eA_k$, bzw. die ∂_k gehen über in $\partial_k + i\frac{e}{\hbar}A_k$ (hierbei ist e die negative Elektronenladung, d.h. $e = -|e|$):

$$\begin{aligned} \hat{H}(\vec{r}) &= \hbar v_F (\sigma^k \cdot (-i\partial_k + \frac{e}{\hbar}A_k)) \\ &= \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 + \frac{e}{\hbar}A_1 - \partial_2 - i\frac{e}{\hbar}A_2 \\ -i\partial_1 + \frac{e}{\hbar}A_1 + \partial_2 + i\frac{e}{\hbar}A_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 - \partial_2 - i\frac{e}{\hbar}Bx^1 \\ -i\partial_1 + \partial_2 + i\frac{e}{\hbar}Bx^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $\partial_k^\dagger = -\partial_k$ auf einer Mannigfaltigkeit ohne Rand folgt:

$$\begin{aligned}\hat{H}^\dagger(\vec{r}) &= (\hat{H}^{*T}(\vec{r})) = \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & i\partial_1^\dagger + \partial_2^\dagger - i\frac{e}{\hbar}Bx^1 \\ i\partial_1^\dagger - \partial_2^\dagger + i\frac{e}{\hbar}Bx^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 - \partial_2 - i\frac{e}{\hbar}Bx^1 \\ -i\partial_1 + \partial_2 + i\frac{e}{\hbar}Bx^1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{H}(\vec{r}).\end{aligned}$$

Wenig überraschend ist also unser 2-dim. Dirac-Operator immer noch selbstadjungiert.

Das Symbol $\sigma(\vec{r}, \vec{\xi})$ dieses 2-dim. masselosen Dirac-Operators ist:

$$\sigma(\vec{r}, \vec{\xi}) = \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & -i\xi_1 - \xi_2 - i\frac{e}{\hbar}Bx^1 \\ -i\xi_1 + \xi_2 + i\frac{e}{\hbar}Bx^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16.38)$$

und dieses Symbol ist für alle Werte von B für $\xi_2 \pm i\xi_1 \neq 0$ invertierbar, und damit ist der 2-dim. masselose Dirac-Operator ein elliptischer Operator. Infolge dessen kann der Atiyah-Singer Indexsatz in seiner einfachsten Form Anwendung finden. Und wegen der Selbstadjungiertheit von \hat{H} ist der Index trivialerweise gleich 0:

$$\text{index}(\hat{H}) = \dim(\ker(\hat{H})) - \dim(\ker(\hat{H}^\dagger)) = 0. \quad (6.16.39)$$

Als nächstes kann man den *chiralen* Teil dieses Dirac-Operators betrachten. Doch zuvor ist es vielleicht hilfreich, sich an die mathematische Struktur der Theorie von Dirac-Operatoren zu erinnern.

2-dim. Dirac-Spinoren $\psi \in \Delta(T^2)$, d.h. Eigenfunktionen des 2-dim. Dirac-Operators, sind einerseits irreduzible Darstellungen der Clifford-Algebra, andererseits aber auch Elemente eines Spinbündels $S(T^2)$ über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit eines Torus T^2 , d.h. eines Tangentialbündels mit Kartenwechselfunktionen $t_{ij} \in Spin(2)$, wobei $Spin(2)$ die zweifache Überlagerungsgruppe von $SO(2)$ ist, also $SO(2) = Spin(2)/\mathbb{Z}_2$. Dadurch stellen die Dirac-Spinoren gleichzeitig auch eine reduzible Darstellung von $Spin(2)$ dar. Mittels des Chiralitäts-Operators

$$\Gamma := (-i)\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.16.40)$$

zerfällt der Raum der Dirac-Spinoren in seine zwei irreduziblen Teile

$$\Delta(T^2) = \Delta^+(T^2) \oplus \Delta^-(T^2), \quad (6.16.41)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix}, \quad (6.16.42)$$

mit den Projektoren

$$P^+ := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \Gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.16.43)$$

$$P^- := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.16.44)$$

und mit

$$\hat{H}(\vec{r}) : \Delta^+(T^2) \rightarrow \Delta^-(T^2), \hat{H}(\vec{r}) : \Delta^-(T^2) \rightarrow \Delta^+(T^2). \quad (6.16.45)$$

Erneut wegen $\partial_k^\dagger = -\partial_k$ auf einer Mannigfaltigkeit ohne Rand kann man also den Dirac-Operator mit seinen beiden chiralen Anteilen in der folgender Weise schreiben:

$$\hat{H}(\vec{r}) = \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 - \partial_2 - i\frac{e}{\hbar} Bx^1 \\ -i\partial_1 + \partial_2 + i\frac{e}{\hbar} Bx^1 & 0 \end{pmatrix} =: \hbar v_F \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^\dagger \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.16.46)$$

Allerdings sollte man hier darauf hinweisen, daß es sich bei den Räumen $\Delta^+(T^2)$ und $\Delta^-(T^2)$ nicht wie aus der Teilchenphysik gewohnt um Räume von Wellenfunktionen mit Spin \uparrow und Spin \downarrow handelt, sondern um Wannierfunktionen von Elektronen der Kristall-Positionen A und der Kristall-Positionen B .

Um die Nullmoden des obigen chiralen Anteils \hat{D} oder \hat{D}^\dagger des Dirac-Operators zu bestimmen kann man nun entweder die Gleichung $\hat{D} = 0$ oder $\hat{D}^\dagger = 0$ direkt lösen (siehe etwa Tenjinbayashi u. a. (2007), Neto u. a. (2009)), oder man kann auf eines der Atiyah-Singer Indextheoreme zurückgreifen, was wir hier tun wollen.

In unserem Fall haben wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $M = T^2$, einen dazugehörigen Tangentialraum TT^2 , ein Prinzipalbündel $P(T^2, U(1))$ mit der Gruppe $G = U(1)$ und der dazugehörigen Lie-Algebra \mathfrak{g} , und einem zu $P(T^2, U(1))$ assoziierten Vektorbündel E mit einem abelschen Eichpotential \mathcal{A} , (d.h. einer lokalen \mathfrak{g} -wertigen Zusammenhang-1-Form) und einer Feldstärke $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$. Dann ist der analytische Index gegeben als (33.6.4):

$$\text{index}(\hat{D}, TT^2, E) := \nu_+ - \nu_- = \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)), \quad (6.16.47)$$

und der topologische Index (identisch mit dem analytischen Index) ist dann mit dem 1. Chern-Charakter $ch_1(\mathcal{F})$ gerade (siehe 32.6.5, 33.7.6 und 33.7.7):

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TT^2, E) = \nu_+ - \nu_- = ch_1(\mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi} \int_{T^2} \mathcal{F}. \quad (6.16.48)$$

Die Physiker verwenden hier die Feldstärke-2-Form F mit $\mathcal{F} =: iF$ und setzen das Volumen D_{ab} des Torus T^2 der Einfachheit halber auf 1, d.h. $\int_{D_{ab}} = 1$, und damit ergibt sich:

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TT^2, E) = \nu_+ - \nu_- = -\frac{1}{2\pi} \int_{D_{ab}} F = -\frac{B}{2\pi}, \quad (6.16.49)$$

und aus 6.16.33 wissen wir, daß diese Größe tatsächlich ganzzahlig ist:

$$\text{ind}(\mathcal{P}, T T^2, E)\phi_{ab} = \nu_+ - \nu_- = -\frac{1}{2\pi} \int_{D_{ab}} F = -\frac{B}{2\pi} = -\phi_{ab} \in \mathbb{Z} .$$

Mit diesen Nullmoden gibt es jetzt also zwischen den beiden Landau-Niveaus des integralen Quanten-Hall-Effektes (siehe 6.11.4) mit $n = 0$

$$E_n = \pm \hbar \omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_B = \frac{eB}{m}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

den weiteren Zustand der chiralen Dirac-Nullmode mit $E = 0$, der sich im Hall-Widerstand mit einer Stufe bei $E = 0$ darstellt.

Wir haben die beiden Kohlenstoffatome vom Typ A und Typ B in einer Elementarzelle und jedes dieser Kohlenstoffatome hat im Magnetfeld B Landau-Niveaus, die $2N_B$ -fach entartet sind, wobei der Faktor 2 hier von den beiden möglichen Spin-Zuständen herrührt mit (6.11.10)

$$N_B = \frac{eBL_xL_y}{2\pi\hbar} .$$

Sei nun $4N_B$ die Summe der Elektronen der besetzten Landau-Niveaus der beiden Kohlenstoffatome, so kommen jetzt bei Graphen eben noch die beiden Elektronen mit Spin \uparrow und Spin \downarrow der Nullmode hinzu, die sich die beiden Atome teilen. Damit gilt für die Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} \sim 2(2N_B + 1) = 4\left(N_B + \frac{1}{2}\right) .$$

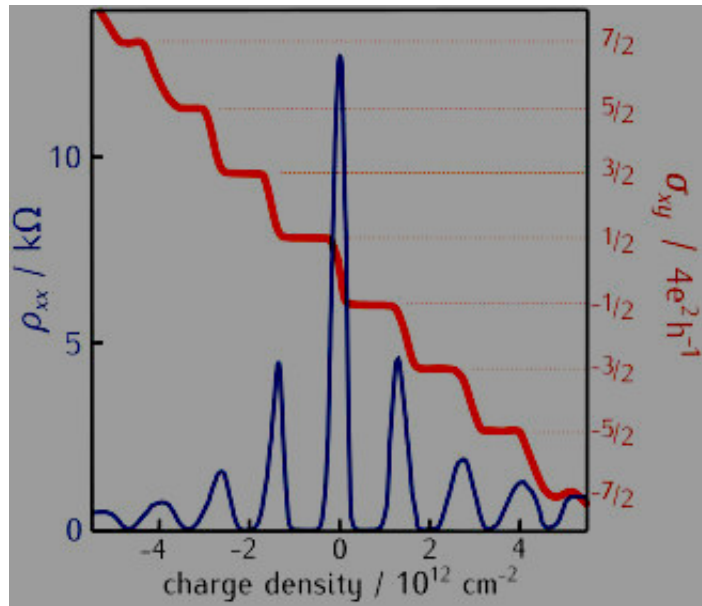


Abbildung 6.14: Quanten-Hall-Effekt: Hall-Widerstand bei Graphen

Ponor (2020), CC BY-SA 4.0.

[<https://en.wikipedia.org/wiki/Graphene/>

wiki/File:Graphene_-_Geim_-_Chiral_half-integer_quantum_Hall_effect.svg]

Frage: Da wir hier topologische Betrachtungen durchführen, stellt sich nun allerdings noch eine ganz andere Frage. Die Geometrie unserer Mannigfaltigkeit ist ja wegen der *periodischen Randbedingungen* (Born-von-Kármán-Modell) der Torus T^2 und wir beschäftigen uns also mit einer Dirac-Gleichung auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit. Also würden wir erwarten, daß in der Dirac-Gleichung auch ein Term mit dem Spin-Zusammenhang $\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}$ mit dem Spintensor Σ_{ab} auftaucht (siehe 29.7).

Zur Erinnerung: es seien an einem Punkt p des gekrümmten Raumes M die Vektoren $\{\partial_\mu\}$ und $\{dx^\mu\}$ die Basen des Tangentialraums T_pM und des Kotangentialraums T_p^*M . Mittels des Vierbeins $e_a{}^\mu$, bzw. $e^a{}_\mu$, (siehe 15.2.1 und 15.2.3) kann man nun die Orthonormalbasen $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ einführen:

$$e_a := e_a{}^\mu \partial_\mu, \quad \theta^a := e^a{}_\mu dx^\mu.$$

Damit kann man lokal am Punkt $p \in M$ von der Metrik $g_{\mu\nu}$ der gekrümmten Raumzeit zu einer Lorentz-Metrik η_{ab} übergehen:

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}.$$

In Bezug auf diese Lorentz-Metrik definiert man jetzt die Diracschen Gamma-Matrizen:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} := \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2\eta^{ab} \mathbb{1}.$$

Statt des gewohnten metrisch-affinen Zusammenhangs $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ der Differentialgeometrie taucht in der Dirac-Gleichung der Spin-Zusammenhang $\Omega_{\mu} := \frac{1}{2}\Gamma^a_{\mu}{}^b\Sigma_{ab}$ mit dem Spintensor $\Sigma^{ab} := -\frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$ auf. In keiner Veröffentlichung zu Graphen taucht nun dieser Spin-Zusammenhang auf. Warum ist das so?

Antwort: in zeitunabhängigen 2-dimensionalen Systemen entfällt der Raumkrümmungsterm $\Omega_{\mu} = \frac{1}{2}\Gamma^a_{\mu}{}^b\Sigma_{ab}$ mit dem Spintensor Σ_{ab} (siehe das Lemma 29.7.11).

7 Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt

Der integrale Quanten-Hall-Effekt wurde im Jahr 1980 durch von Klitzing (von Klitzing u. a. (1980)) im Hochfeld-Magnetlabor in Grenoble an MOSFETs (metal oxide semiconductor field effect transistors) auf Silizium-Basis experimentell entdeckt. Wir haben im vorangegangenen Kapitel gesehen, daß sich diese Strukturen lassen sehr gut als ein 2-dimensionales freies Elektronengas beschreiben lassen.

Im Jahr 1982 haben Tsui, Störmer und Gossard bei den Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, (Tsui u. a. (1982)) an GaAs-GaAlAs Heterostrukturen den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt entdeckt. Hierbei hat sich dann gezeigt, daß diese Strukturen durch ein nur teilbesetztes tiefstes Landau-Niveau beschrieben werden können und daß hierbei im Gegensatz zum integralen Quanten-Hall-Effekt die Elektron-Elektron-Wechselwirkung eine wesentliche Rolle spielt.

In diesen beiden 2-dim. Strukturen liegt die Elektronendichte etwa bei 10^{11} - 10^{12} / cm^2 .

7.1 Frank Wilczek (1951)



Abbildung 7.1: F. Wilczek,
Betsy Devine (Stockholm, 2004),
CC BY 2.5.

[[https://en.wikipedia.org/wiki/
Frank_Wilczek](https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_Wilczek)]

Frank Wilczek wurde 1951 in Queens, New York City, geboren. Er studierte Mathematik an der University of Chicago (BA 1970) und an der Princeton University (MA, 1972). In Princeton promovierte er 1974 bei David Gross in Physik mit der Doktorarbeit 'Non-Abelian Gauge Theories and Asymptotic Freedom'. Von 1974 an wirkte Wilczek als Professor an verschiedenen amerikanischen Hochschulen, zunächst an der Princeton University in New Jersey, an der University of California in Santa Barbara und am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge, Massachusetts. Unterbrochen wurde diese Zeit von zwei Forschungsjahren 1976-1977 am Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey.

Im Jahr 2004 erhielt Wilczek zusammen mit David Gross and H. David Politzer den Nobelpreis für Physik für die Entdeckung des 'asymptotischen Freiheit' in der Quantenchromodynamik, d.h. der Theorie der starken Wechselwirkung.

In seiner Forschung beschäftigte sich Wilczek hauptsächlich mit zahlreichen Aspekten der Quantenfeldtheorie. Bekannt wurde er für seine kreativen Vorschläge zu 'Anyonen', 'Axionen' und 'Zeitkristallen'. In 2-dimensionalen Systemen können Quasiteilchen auftreten, deren Spin jeden Wert zwischen 0 und 1 annimmt - Wilczek gab ihnen den Namen 'Anyonen' (von *any phase*): „Since interchange of two of these particles can give *any phase*, I will call them generically anyons.“ Mit Hilfe dieser Anyonen arbeitete er über die Theorie des fraktionalen Quanten-Hall-Effektes.

Neben dem Nobelpreis hat Wilczek viele weitere Preise und Auszeichnungen erhalten, darunter die Dirac-Medaille, den Julius Wess Preis, die Oskar-Klein-Medaille, und zahlreiche andere.

[Quelle: en.wikipedia: Frank_Wilczek]

7.2 Emil Artin (1898 - 1962)

Artin wurde 1898 in Wien geboren und wuchs in Böhmen auf. Nach dem Abitur 1916 und einem Semester Studium der Mathematik an der Universität Wien wurde er noch als Soldat in die österreichische Armee eingezogen. Nach Kriegsende studierte er dann ab 1919 an der Universität Leipzig, wo er bereits 1921 bei Gustav Herglotz promoviert wurde. Artin wechselte dann an die Universität Hamburg, wo er sich 1923 habilitierte und 1925 zunächst als Extraordinarius und im nächsten Jahr als Ordinarius wirkte. Im Jahr 1932 erhielt er zusammen mit Emmy Noether den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis. 1937 verlor er aufgrund der Nazi-Gesetze seine Anstellung an der Universität Hamburg, da seine Frau Jüdin war. Unmittelbar danach emigrierte die Familie Artin in die USA. Er selbst konnte zuerst an der University of Notre Dame, dann an der Indiana University in Bloomington, Indiana, und danach an der Princeton University in New Jersey arbeiten. Im Jahr 1958 kehrte er nach Deutschland an die Universität Hamburg zurück.



Abbildung 7.2: E. Artin
Konrad Jacobs (unbekanntes Datum),
Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach,
CC BY-SA 2.0 de

[https://de.wikipedia.org/wiki/Emil_Artin]

Artin arbeitete auf dem Gebiet der Algebra und der Zahlentheorie. Das auch bei Physikern beliebte Lehrbuch über Algebra von van der Waerden stammt teilweise aus den Vorlesungen von Emil Artin und Emmy Noether. Neben seinem eigentlichen Arbeitsgebiet lieferte er auch Beiträge, die heute theoretische Physiker interessieren, etwa zu quasiergodischen Bahnen und ab 1925 zur Theorie der Zopfgruppen (Artin (1925)), die für uns im Zusammenhang mit Anyonen und dem fraktionaler Quanten-Hall-Effekt von Bedeutung sind.

Artin hatte zahlreiche Schüler, die selbst bedeutende Mathematiker wurden, darunter David Gilbarg, Serge Lang, John T. Tate, Bartel van der Waerden, u.v.a.

[Quelle: en.wikipedia: Emil_Artin]

7.3 Anyonen und Zopfgruppe

In unserem Physik-Grundstudium lernen wir, daß alle Quantenpartikel mit halbzahligen Spin der Fermi-Dirac-Statistik gehorchen und alle Quantenpartikel mit ganz-

zahligen Spin der Bose-Einstein-Statistik. Die Frage nach dem tieferen Grund dieses Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik beantwortet für relativistische Quantenfeldtheorien in 3 und mehr Dimensionen das berühmte Spin-Statistik-Theorem, das zuerst 1939 von Markus Fierz formuliert und 1940 von Wolfgang Pauli ausführlicher bewiesen wurde, allerdings nur für den Fall nichtwechselwirkender Felder. Der Beweis von Pauli und spätere Beweise sind recht anspruchsvoll in ihren Voraussetzungen und in ihrer Durchführung, insbesondere verlangen sie eine relativistische Quantenfeldtheorie (siehe hierzu z.B. Streater u. Wightman (1969), S. 193). Für nichtrelativistische Quantenfeldtheorien könnte man nun denken, daß der Beweis einfacher ist, da die 3-dim. Drehgruppe nur halb- und ganzzahlige Darstellungen aufweist. Andererseits kann man im nichtrelativistischen Fall mittels antikommutierender Spin-0-Felder und kommutierender Spinor-Felder Gegenbeispiele zum Spin-Statistik-Theorem formulieren.

Im Fall der nichtrelativistischen Quantenmechanik in 3 Dimensionen, d.h. im Fall der Schrödingergleichung, stützt man sich auf 1-dim. Darstellungen der 3-dim Drehgruppe $SO(3)$.

Seien zwei identische Teilchen gegeben, die durch die nichtrelativistische Quantenmechanik beschrieben werden. Die entsprechende 2-Teilchen-Wellenfunktion sei $\psi(r_1, r_2)$. Da die Teilchen ununterscheidbar sind, muß $|\psi(r_1, r_2)|^2$ invariant unter der Permutationsgruppe $S_2(\mathbb{R})$ sein. Eine einfache Permutation von r_1 und r_2 , bzw. der Teilchen an diesen Orten, können wir auch als eine $SO(3)$ -Drehung beider Teilchen um 180° betrachten, und also eine 1-dim. Darstellung von $SO(3)$ auf die Wellenfunktion ψ untersuchen.

$$\begin{aligned} |\psi(r_1, r_2)|^2 &= |\psi(r_2, r_1)|^2 \quad \Rightarrow \\ \psi(r_1, r_2) &= e^{i\pi\alpha} \psi(r_2, r_1) . \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Zwei solcher Permutationen entsprechen jetzt einer $SO(3)$ -Drehung um 360° und führen uns wieder zum Ausgangspunkt zurück. Wir erhalten zwei Klassen von Lösungen und definieren als Spin $s := \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \psi(r_1, r_2) &= e^{i2\pi\alpha} \psi(r_1, r_2) \quad \Rightarrow \\ \begin{cases} \alpha = 2n, & n \in \mathbb{N}, & \psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1), & s = n & \text{Bosonen,} \\ \alpha = 2n + 1, & n \in \mathbb{N}, & \psi(r_1, r_2) = -\psi(r_2, r_1), & s = n + \frac{1}{2} & \text{Fermionen.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Daß hier bei der 1-dim. Darstellung von $SO(3)$ gerade zwei Klassen entstehen ist nun topologisch leicht verständlich, denn für die Fundamentalgruppe von $SO(3)$ gilt (19.2.6):

$$\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{für } n \geq 3 . \quad (7.3.3)$$

$SO(3) \simeq Spin(3)/\mathbb{Z}_2$ ist also nicht einfach zusammenhängend, im Gegensatz zu seiner universellen Überlagerungsgruppe $Spin(3) \simeq SU(2)$.

Wenn wir jetzt aber von einem 3-dim. Raum übergehen zu einem 1-dim. oder einem 2-dim. Raum, dann ändern sich die topologischen Verhältnisse grundlegend.

Zunächst der 1-dim. Fall:

die Gruppen $O(1) = S^0 = \{+1, -1\}$ und $SO(1) = \{+1\}$ sind diskrete Mengen für welche keine Fundamentalgruppen definiert werden können. So bleibt hier als Symmetrie für die Zweiteilchen-Wellenfunktion nur die Permutationsgruppe $S_2(\mathbb{R})$. Eine 1-dim. unitäre Darstellung von $S_2(\mathbb{R})$ kann nun geschrieben werden als

$$\psi(r_1, r_2) = e^{i\pi\alpha}\psi(r_2, r_1) \quad \text{mit beliebigem } \alpha \in \mathbb{R},$$

aber es gibt keinen Grund, warum der Phasenfaktor von zwei aufeinanderfolgende Permutationen $e^{i2\pi\alpha}$ jetzt wieder eine Einheit ergeben sollte. Leinaas u. Myrheim (1977) haben als erste auf diesen Punkt hingewiesen und ein einfaches dynamisches Modell für 2 identische Teilchen auf einer Linie vorgeschlagen, aus dem sofort folgte, daß der Spin der Teilchen jeden Wert zwischen 0 für Bosonen und $\frac{1}{2}$ für Fermionen annehmen konnte. Später folgten von anderen Autoren viele weitere Arbeiten für identische Teilchen in 1-dim Räumen sowohl mit verschiedenen Potentialen und Randbedingungen, als auch in Hinblick auf den thermodynamischen Grenzfall.

Nun zum interessanteren 2-dim. Fall:

dieser wurde auch schon von Leinaas u. Myrheim (1977) behandelt, wurde aber richtig bekannt erst durch die Arbeit von Wilczek (1982), der auch den Namen Anyonen einführte: „Since interchange of two of these particles can give *any* phase, I will call them generically anyons.”

In 2-Raumdimensionen kann man sich nun auf die Gruppe $SO(2)$ stützen und für diese gilt (19.2.6):

$$\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}. \quad (7.3.4)$$

Dadurch ist $Spin(2)$ als die zweifache Überlagerung auch nicht mehr einfach zusammenhängend und also keine universelle Überlagerungsgruppe.

Dem entspricht, daß in 2 Dimensionen die Gruppe der Permutationen von zwei quantenmechanischen Teilchen nicht mehr die symmetrische Gruppe $S_2(\mathbb{R}^2)$ ist, sondern die größere Artin'sche Zopfgruppe (Braid-group) $B_2(\mathbb{R}^2)$. Physikalisch ausgedrückt bedeutet dies, daß wir mit zwei Permutationen, bzw. mit zwei 180° -Drehungen, nicht am Ausgangszustand ankommen, weil der Weg mit zwei Permutationen nicht homotop zu einem Null-Weg ist. Der Weg mit den zwei Permutationen ist jetzt zweifach zu einem Zopf verschlungen und kann nicht mit stetigen Wegdeformationen in einen Nullweg überführt werden.

Wie im 1-dimensionalen Fall können wir jetzt bei Elektronen und Quasiteilchen in 2-dimensionalen Festkörper-Strukturen Spin-Werte erwarten, die jeden Wert zwischen 0 für Bosonen und $\frac{1}{2}$ für Fermionen annehmen können.

Die Zopfgruppe $B_n(X)$ mit $X \in \{\mathbb{R}^2, \mathbb{C}\}$ wurde von Emil Artin im Jahr 1925 eingeführt (Artin (1925)). Wir folgen dieser ursprünglichen Arbeit und zusätzlich den neueren

Darstellungen von Artin (1947), Zeidler (2011), S. 290 ff., Kassel u. Turaev (2008) und Lechner (2021).

Artin beginnt zunächst mit einer Beschreibung seiner Zöpfe in 2-dimensionalen Räumen. Eine Zopf aus $B_n(X)$ besteht aus n vertikal angeordneten Strängen, die an der Ober- und Unterseite fixiert sind. Ferner werden keine Schleifen zugelassen.

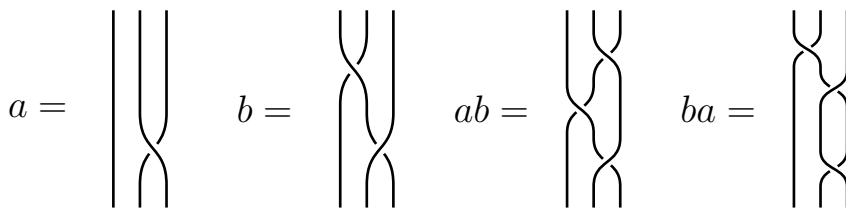
Für Physiker ist natürlich interessant, daß diese vertikalen Stränge 'ununterscheidbar' sind, d.h. physikalisch können wir mit diesen Strängen 'Weltlinien' ununterscheidbarer quantenmechanischer Teilchen modellieren.

Im nächsten Schritt identifiziert Artin die Generatoren dieser Zöpfe. So, wie man jede Permutation aus S_n aus einem Produkt von Transpositionen zusammensetzen kann, ebenso kann man jeden Zopf aus einer Abfolge von Überkreuzungen zweier benachbarter Stränge erzeugen. Diese Überkreuzungen können im 2-dimensionalen Raum jetzt nur so stattfinden, daß Strang i über dem Strang $i + 1$ liegt, diese Operation nennt Artin σ_i , oder darunter, was er als σ_i^{-1} bezeichnet. Zugleich werden stetige Deformationen der Stränge erlaubt. Der gesamte Zopf wird also als eine von oben her gelesene beliebige Abfolge dieser Generatoren $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$ betrachtet. Im folgenden werden wir dann sehen, daß diese Generatoren $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ tatsächlich aus 2 fundamentalen Generatoren zusammen mit 3 Relationen abgeleitet werden können.

Dies legt es nahe in B_n eine Gruppenstruktur zu definieren, indem man für zwei Elemente $a, b \in B_n$ die Multiplikation ab definiert als die Verklebung der Unterseite von a mit der Oberseite von b . So wie das Produkt $\sigma_i \sigma_i^{-1} = e \in B_2$, ergibt, nämlich zwei unverknüpfte parallele Stränge, so gibt es auch zu jedem $b \in B_n$ ein $b^{-1} \in B_n$ mit $bb^{-1} = e \in B_n$. Durch diese Gruppen-Multiplikation gibt es in B_n , im Gegensatz zu S_n , abzählbar unendlich viele Elemente.

Hier ein erstes kleines Beispiel:

$$a = \sigma_2, \quad b = \sigma_1 \sigma_2^{-1}, \quad ab = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1}, \quad ba = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \simeq \sigma_1. \quad (7.3.5)$$



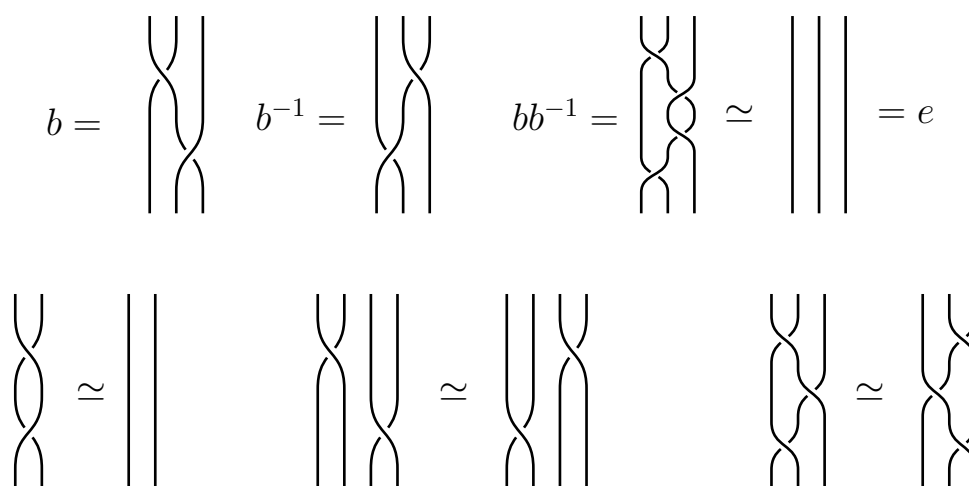
Man sieht sofort, daß diese Multiplikation zwar assoziativ, aber nicht kommutativ ist. Zu jedem Element gibt es ein inverses Element:

$$b = \sigma_1 \sigma_2^{-1}, \quad b^{-1} = \sigma_2 \sigma_1^{-1}, \quad bb^{-1} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} = e. \quad (7.3.6)$$

Die stetigen Deformationen der Stränge führen zu algebraischen Äquivalenzrelationen und damit zu Äquivalenzklassen von Zöpfen. Hier sehen wir 3 mögliche Formen stetiger Deformationen einzelner Stränge eines Zopfes:

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} \simeq e, \quad \sigma_i \sigma_k \simeq \sigma_k \sigma_i \text{ für } i \neq k \pm 1, \quad (7.3.7)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \simeq \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \quad (7.3.8)$$



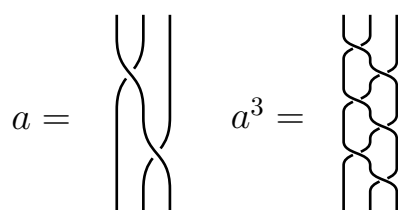
Diese stetigen Deformationen geschehen einfach durch ein Verschieben der Stränge, wobei in dem nichttrivialen letzten Beispiel der Strang von links oben nach rechts unten über die unterste Überkreuzung nach links hinweggeschoben wird, wodurch diese Überkreuzung nach rechts oben wandert. Diese elementaren stetigen Verschiebungen entsprechen den Relationen 7.3.7, 7.3.8 zwischen den $(n - 1)$ Generatoren σ_i und definieren die Algebra der Zopfgruppe B_n .

Andererseits kann von diesen $(n - 1)$ Generatoren σ_i mit den Relationen 7.3.7, 7.3.8 auch übergehen zu einem deutlich kleineren Satz von nur 2 Generatoren, um die ganze Zopfgruppe B_n zu erzeugen (Artin (1925), S. 52 ff.).

Definition 7.3.1

$$\sigma := \sigma_1 \quad \text{und} \quad a := \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} . \tag{7.3.9}$$

In diesem Bild sieht man anschaulich, daß der Zopf a^n durch eine volle Torsion aller Fäden erhalten wird und daß deshalb a^n mit jedem σ_i kommutiert, d.h. $\sigma_i a^n = a^n \sigma_i$.



Das folgenden Lemma zeigt, daß sich die ganze Zopfgruppe B_n aus den beiden Generatoren σ und a und zwei Relationen erzeugen läßt.

Lemma 7.3.2

$$\sigma_i = a^{i-1} \sigma a^{-(i-1)} , \tag{7.3.10}$$

$$a^n = (a\sigma)^{n-1} , \tag{7.3.11}$$

$$\sigma a^j \sigma a^{-j} = a^j \sigma a^{-j} \sigma \quad \text{für} \quad 2 \leq j \leq \frac{n}{2} . \tag{7.3.12}$$

Beweis: Mit 7.3.9, 7.3.7, 7.3.8 folgt:

$$\begin{aligned}
a\sigma_i &= \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \dots \sigma_{n-1}\sigma_i \\
&= \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+2} \dots \sigma_{n-1} \\
&= \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \dots \sigma_{n-1} \\
&= \sigma_{i+1}\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \dots \sigma_{n-1} \\
&= \sigma_{i+1}a .
\end{aligned}$$

$$\sigma_{i+1} = a\sigma_i a^{-1} = a^i \sigma_1 a^{-i} = a^i \sigma a^{-i} , \text{ bzw.}$$

$$\sigma_i = a^{(i-1)} \sigma a^{-(i-1)} .$$

Damit lassen sich alle σ_i durch σ und a ausdrücken. Im nächsten Schritt setzt man dieses Ergebnis in 7.3.9 ein und erhält:

$$\begin{aligned}
a &= \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1} = \sigma(a\sigma a^{-1})(a^2\sigma a^{-2}) \dots (a^{(n-3)}\sigma a^{-(n-3)})(a^{(n-2)}\sigma a^{-(n-2)}) \\
&= \sigma(a\sigma)^{(n-2)} a^{-(n-2)} = \sigma(a\sigma)^{-1} (a\sigma)^{(n-1)} a^{-(n-2)} \\
&= \sigma(\sigma^{-1} a^{-1})(a\sigma)^{(n-1)} a^{-(n-2)} = a^{-1} (a\sigma)^{(n-1)} a^{-(n-2)} \quad \Rightarrow \\
a^n &= (a\sigma)^{(n-1)} .
\end{aligned}$$

Deswegen kommutiert a^n mit allen σ_i , denn mit 7.3.10 und 7.3.11 folgt:

$$\begin{aligned}
a^n \sigma_i &= a^n a^{i-1} \sigma a^{-(i-1)} = a^n a^{i-2} (a\sigma) a^{-(i-1)} \\
&= a^{i-2} a^n (a\sigma) a^{-(i-1)} = a^{i-2} (a\sigma)^{n-1} (a\sigma) a^{-(i-1)} \\
&= a^{i-2} (a\sigma) (a\sigma)^{n-1} a^{-(i-1)} = a^{i-1} \sigma a^n a^{-(i-1)} \\
&= a^{i-1} \sigma a^{-(i-1)} a^n = \sigma_i a^n .
\end{aligned}$$

Ebenso folgt für 7.3.7 bei $3 \leq i \leq n-1$, bzw. $2 \leq j := i-1 \leq n-2$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \sigma_i &= \sigma_i \sigma_1 \quad \Rightarrow \\
\sigma a^{(i-1)} \sigma a^{-(i-1)} &= a^{(i-1)} \sigma a^{-(i-1)} \sigma \quad \Rightarrow \\
\sigma a^j \sigma a^{-j} &= a^j \sigma a^{-j} \sigma .
\end{aligned}$$

Andererseits können wir diese Gleichung auch mit a^{-j} multiplizieren und erhalten:

$$a^{-j} \sigma a^j \sigma a^{-j} = \sigma a^{-j} \sigma \quad \Rightarrow$$

$$a^{-j}\sigma a^j\sigma = \sigma a^{-j}\sigma a^j.$$

Und mit einer Multiplikation mit $\mathbb{1} = a^n a^{-n}$ folgt:

$$a^n a^{-n} a^{-j} \sigma a^j \sigma = a^n a^{-n} \sigma a^{-j} \sigma a^j \Rightarrow$$

$$a^n a^{-j} \sigma a^{-n} a^j \sigma = \sigma a^n a^{-j} \sigma a^{-n} a^j \Rightarrow$$

$$a^{n-j} \sigma a^{-(n-j)} \sigma = \sigma a^{n-j} \sigma a^{-(n-j)}.$$

Diese Gleichung zusammen mit der obigen Gleichung

$$a^j \sigma a^{-j} \sigma = \sigma a^j \sigma a^{-j} \quad \square$$

erlaubt es jetzt diese Relation nur für $2 \leq j := i - 1 \leq \frac{n}{2}$ zu fordern.

Also kann man die Zopfgruppe statt mit der Algebra 7.3.6, 7.3.7, 7.3.8 der Generatoren σ_i auch mit der Algebra 7.3.10, 7.3.11, 7.3.12 der Generatoren a und $\sigma = \sigma_1$ erzeugen.

Hieraus sieht man also, daß die Darstellung der erzeugenden Algebra der Zopfgruppe nicht eindeutig ist. In einem neueren, recht anspruchsvollen, mathematischen Übersichtsartikel über Zopfgruppen von Joan Birman und Tara Brendle (Birman u. Brendle (2005)) werden weitere alternative Definitionen, Zusammenhänge mit der Knotentheorie und mathematische Anwendungen der Zopfgruppe B_n und ihrer Darstellungen aufgezeigt und diskutiert.

Im nächsten Schritt hat Artin (Artin (1925), S. 55 ff.) 'geschlossene' Zöpfe konstruiert und mit diesen die Äquivalenz der Definition von B_n mittels Generatoren und ihren Relationen mit der folgenden Definition von Zöpfen über die Fundamentalgruppe gezeigt.

Definition 7.3.4 Sei X eine 2-dim. Mannigfaltigkeit. Artin hatte hier $X := \mathbb{R}^2$ genommen, wir verwenden $X := \mathbb{C}$. Sei weiter

$$X_*^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}\}$$

die Menge der ungeordneten n -Tupel mit verschiedenen Punkten $x_i \in X$. Im nächsten Schritt definiert man mittels der Permutationsgruppe S_n eine Äquivalenzrelation auf diesen n -Tupeln:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid \text{mit } \sigma \in S_n,$$

d.h. man geht von der Menge der ungeordneten n -Tupel mit verschiedenen Punkten zur entsprechenden symmetrisierten Menge über (dies entspricht in der Physik dem Übergang von unterscheidbaren zu ununterscheidbaren Teilchen):

$$X_{sym}^n := X_*^n / S_n.$$

Auf diesem Raum kann man jetzt geschlossene Pfade $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow X$ und $\gamma_i(0) = \gamma_{\sigma(i)}(1)$ definieren und bezüglich dieser n geschlossenen Pfade γ_i die Fundamentalgruppe definieren: dies ist nun per Definition die Zopfgruppe B_n :

$$B_n(X) := \pi_1(X_{sym}^n) = \pi_1(X_*^n / S_n). \quad (7.3.13)$$

Die reine Zopfgruppe $P_n(X) \subset B_n(X)$ ist die Identität von $B_n(X)$, die aus den Pfaden $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$ hervorgeht.

Aus dieser Definition folgt nun sofort, daß es einen Homomorphismus ϕ gibt mit

$$\phi : B_n(X) \rightarrow S_n \quad \text{mit} \quad \phi((\gamma_1, \dots, \gamma_n)) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n)) . \quad (7.3.14)$$

Dies kann man in der folgenden kurzen Sequenz zusammenfassen (siehe 21.3.2, bzw. das ganze Unterkapitel zu Exakten Sequenzen 21.3):

$$1 \rightarrow P_n \xrightarrow{i} B_n \xrightarrow{\phi} S_n \rightarrow 1 . \quad (7.3.15)$$

Das heißt: $\text{Im}(i) = \ker(\phi)$.

Zurück zur Physik.

In der Quantentheorie arbeiten wir aber im Allgemeinen nicht mit den Gruppen selbst, sondern mit entsprechenden Darstellungen dieser Gruppen. Daher wollen wir hier kurz 2 bekannte Darstellungen der Zopfgruppen betrachten.

Für den eingangs diskutierten Fall von 2 identischen nichtrelativistischen quantenmechanischen Teilchen in der Dimension 2 ist die Zopfgruppe $B_2(\mathbb{R}^2)$ die vorliegende Symmetriegruppe. Für die Zweiteilchenwellenfunktion suchen wir jetzt eine 1-dim. unitäre Darstellung von $B_2(\mathbb{R}^2)$. Wir wählen wie in 7.3.1 für eine rechtshändige Drehung:

$$\psi(r_1, r_2) = e^{i\pi\alpha} \psi(r_2, r_1) ,$$

allerdings mit einem unbestimmten $\alpha = 2n + x$ mit $x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1$, d.h. mit einem Spin $s := \frac{\alpha}{2} \bmod n$ zwischen $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$. Für die linkshändige Drehung wählen wir entsprechend

$$\psi(r_1, r_2) = e^{-i\pi\alpha} \psi(r_2, r_1) ,$$

wiederum mit positivem α .

Die Darstellung ist multiplikativ, unitär und erfüllt die Zopfbedingungen 7.3.7 und 7.3.8:

$$e^{i\pi\alpha_1} e^{i\pi\alpha_2} = e^{i\pi\alpha_2} e^{i\pi\alpha_1} ,$$

$$e^{i\pi\alpha_1} e^{i\pi\alpha_2} e^{i\pi\alpha_1} = e^{i\pi\alpha_2} e^{i\pi\alpha_1} e^{i\pi\alpha_2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi\alpha_1} = e^{i\pi\alpha_2} .$$

Die zweite Zeile, die Yang-Baxter-Bedingung, ist erfüllt, wenn für beide zu vertauschen identischen Teilchen $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, d.h. wenn wir für die beiden identischen Teilchen die gleiche Phase in der Wellenfunktion annehmen.

Es gibt mehrere bekannte höherdimensionale Darstellungen der Zopfgruppen. Wir folgen in der Präsentation der Burau-Darstellung dem Beginn des Kapitels 3 von Kassel u. Turaev (2008), S. 93 ff.. Mittels dieser Darstellung kann man dann zeigen, daß die bekannten Alexander-Polynome der Knotentheorie Knoteninvarianten sind. Und mittels der Lawrence–Krammer–Bigelow-Darstellung, die wir hier nicht vorführen, läßt sich die Linearität der Zopfgruppen beweisen.

Definition 7.3.5 Sei $n \geq 2$. Dann definiert man für alle $i = 1, \dots, n-1$ entsprechend den Generatoren $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ der Zopfgruppe $B_n(X)$ die folgenden $n \times n$ -Matrizen U_1, \dots, U_{n-1} :

$$U_i := \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix},$$

wobei I_k eine $k \times k$ -Einheitsmatrix ist, mit der zusätzlichen Definition, daß die Matrix I_0 links oben, bzw. rechts unten komplett verschwindet.

Lemma 7.3.6 Aus dieser Definition folgt, daß die $n \times n$ -Matrizen U_1, \dots, U_{n-1} eine n -dimensionale lineare Darstellung der Generatoren $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ der Zopfgruppe $B_n(X)$ bilden.

Es folgt sofort, daß ein U_i^{-1} existiert:

$$U_i^{-1} := \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 1-t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix}.$$

Ebenso folgt, daß die U_i die Vertauschungsrelationen 7.3.7 und 7.3.8 der σ_i erfüllen:

$$U_i U_i^{-1} \simeq I_n, \quad U_i U_k \simeq U_k U_i \quad \text{für } i \neq k \pm 1,$$

$$U_i U_{i+1} U_i \simeq U_{i+1} U_i U_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n-2.$$

Beweis: 1. $U_i U_i^{-1}$:

$$T T^{-1} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-1} & 1-t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U_i U_i^{-1} \simeq I_n.$$

2. $U_i U_k \simeq U_k U_i$ für $i \neq k \pm 1$, o.B.d.A. $i > k + 1$:

die Blockdiagonalform von U_i und U_k läßt sich ausführlicher schreiben als:

$$U_i U_k = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix}, \\
U_k U_i &= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{i-k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1-i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. $U_i U_{i+1} U_i \simeq U_{i+1} U_i U_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-2$:

hier genügt es, die folgenden drei Zeilen von U_i und U_{i+1} zu betrachten:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} T & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1-t & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (1-t)^2 + t(1-t) & t(1-t) & t^2 \\ & 1-t & t & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-t & t(1-t) & t^2 \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & t(1-t) & t^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-t & t(1-t) & t^2 \\ 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square
\end{aligned}$$

Zum Schluß ist aber noch unbedingt erwähnenswert, daß die Zopfgruppen-Relation 7.3.8

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \simeq \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

eine Erweiterung als eine Matrixgleichung in der Yang-Baxter Gleichung findet:

$$ABA = BAB, \quad A, B \in GL(X), \quad X \text{ ein linearer Raum über } \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

Diese Bedingung wurde zuerst von Yang bei Untersuchungen der S-Matrix von 1-dimensionalen Vielteilchen-Streuprozessen gefunden und später von Baxter bei Untersuchungen von exakt lösbaren Modellen in der statistischen Mechanik (Zeidler (2011), S 291 ff.).

7.4 Robert Laughlin (1950)



Abbildung 7.3: R. Laughlin,
Linda A. Cicero
(Stanford News Service, 1998),
CC BY 3.0.
[[https://en.wikipedia.org/wiki/
Robert_B._Laughlin](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_B._Laughlin)]

Laughlin wurde im Jahr 1950 in Visalia in Kalifornien geboren. Er beendete 1972 sein Mathematik-Studium an der University of California, Berkeley mit einem BA. Darauf folgte eine Promotion in theoretischer Physik bei John D. Joannopoulos am Massachusetts Institute of Technology (MIT), die er 1979 abschloß. Weitere beruflich Stationen waren u.a. das Lawrence Livermore National Laboratory der University of California, und schließlich eine Professur für Physik und Angewandte Physik an der Stanford University. Daneben wirkte er von 2004 bis 2006 als Präsident des 'Korea Advanced Institute of Science and Technology' (KAIST) in Daedeok Innopolis, Daejeon, Süd-Korea.

Nachdem Tsui, Störmer und Gossard bei den Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey (Tsui u. a. (1982)) im Jahr 1982 den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt an GaAs-GaAlAs Heterostrukturen entdeckt hatten, konnte Laughlin bereits im darauffolgenden Jahr eine theoretische Erklärung mittels einer Vielteilchen-Elektronen-Wellenfunktion, heute

als Laughlin-Wellenfunktion bekannt, veröffentlichen (Laughlin (1983)). Für diese Arbeit erhielten Robert Laughlin, Horst L. Störmer und Daniel C. Tsui den Physik-Nobelpreis des Jahres 1998.

[Quelle: en.wikipedia: Robert_B._Laughlin]

7.5 Laughlin Wellenfunktion

Dieses Unterkapitel enthält 3 Teile:

1. Landau-Quantisierung des 1-Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld,
2. die Verallgemeinerung vom 1-Teilchen harmonischen Oszillator auf einen 2-Teilchen harmonischen Oszillator in einem statischen Magnetfeld,
3. der Vorschlag von Laughlin für eine Grundzustands-Wellenfunktion eines n -Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld.

7.5.1 Landau-Quantisierung des 1-Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld

Wir führen hier die Überlegungen zu den Landau-Niveaus aus 6.11 fort und stützen uns dabei erneut auf die umfangreiche und schöne Darstellung von Tong (2016), S. 16 ff., S. 76 ff. und auf die Originalarbeit von Laughlin (1983).

Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die Besetzungszahlen-Darstellung des quantisierten harmonischen Einteilchen-Oszillators. Der Hamilton-Operator für dieses Problem sei erneut:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} + e\vec{A})^2 = \frac{1}{2m}\hat{\pi}\hat{\pi}, \quad \text{mit} \quad (7.5.1)$$

$$\hat{\pi} := \hat{p} + e\vec{A}. \quad (7.5.2)$$

Hierbei sei \vec{A} das Vektorpotential für ein Magnetfeld in z-Richtung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B)^T$. Das Vektorpotential \vec{A} ist als ein Eichpotential ja nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt, da die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet. Wir wählen im Gegensatz 6.11 jetzt die sog. symmetrische Eichung, da sie uns im Folgenden Vorteile bei einer Definition von Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren innerhalb der hochentarteten Landau-Niveaus (6.11.10) bietet.

$$\vec{A} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}yB \\ +\frac{1}{2}xB \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}. \quad (7.5.3)$$

Für $\hat{\pi}$ folgt:

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] &= [\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] 1 = [\hat{p}_x + eA_x, \hat{p}_y + eA_y] 1 \\ &= [-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y] 1 \\ &= -ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial x} + ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial y} = -ie\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= -ie\hbar B. \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Jetzt führt man die üblichen Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren des harmonischen Oszillators bei Anwesenheit eines statischen Magnetfeldes ein:

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y), \quad (7.5.5)$$

$$\hat{\pi}_x = \sqrt{2e\hbar B} \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{\pi}_y = \sqrt{2e\hbar B} \frac{1}{2i}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (7.5.6)$$

$$\begin{aligned}
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \frac{1}{2e\hbar B} (i\hat{\pi}_x\hat{\pi}_y - i\hat{\pi}_y\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_x\hat{\pi}_y - i\hat{\pi}_y\hat{\pi}_x) \\
&= \frac{1}{e\hbar B} (i\hat{\pi}_x\hat{\pi}_y - i\hat{\pi}_y\hat{\pi}_x) = 1.
\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m} \hat{\pi} \hat{\pi} = \frac{1}{2m} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) \\
&= \frac{2e\hbar B}{2m} \frac{1}{4} ((\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 - (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2) \\
&= \hbar\omega_B \frac{1}{4} (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger) = \hbar\omega_B \frac{1}{4} (4\hat{a}^\dagger\hat{a} + 2) \\
&= \hbar\omega_B (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}), \quad \text{mit } \omega_B := \frac{eB}{m}.
\end{aligned} \tag{7.5.8}$$

In 6.11.4 und 6.11.5 hatten wir als analytische Lösung der Hamilton-Eigenwert-Gleichung des harmonischen Oszillators mit einem Vektorpotential \vec{A} in Landau-Eichung gefunden:

$$\hat{H}\psi_{n,\vec{k}} = \hbar\omega_B(n + \frac{1}{2})\psi_{n,\vec{k}}, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0. \tag{7.5.9}$$

Ebenso kann man jetzt beim harmonischen Oszillator mit einem Vektorpotential \vec{A} in symmetrischer Eichung einen Besetzungszahlenoperator $\hat{N}_{\hat{a}} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ auf die herkömmliche Weise definieren, der die gewohnten Eigenschaften aufweist (siehe z.B. Rebhan (2005), S. 147 ff.):

$$\hat{N}_{\hat{a}} := \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad \text{mit } \hat{N}_{\hat{a}}|n\rangle = n|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad |n\rangle := \psi_n. \tag{7.5.10}$$

Lemma 7.5.1

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{7.5.11}$$

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{7.5.12}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
n \langle n | n \rangle &= \langle n | (\hat{N}_{\hat{a}} n) \rangle = \langle n | \hat{N}_{\hat{a}} n \rangle = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} n \rangle \\
&= \langle \hat{a} n | \hat{a} n \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (n) \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_{\hat{a}}|\hat{a}n\rangle &= \hat{N}_{\hat{a}}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a})|n\rangle = \hat{a}(\hat{N}_{\hat{a}} - 1)|n\rangle \\
&= \hat{a}(n-1)|n\rangle = (n-1)|\hat{a}n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\hat{a}n\rangle = c_{n-1}|n-1\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{N}_a|\hat{a}^\dagger n\rangle &= \hat{N}_a\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N}_a + 1)|n\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger(n+1)|n\rangle = (n+1)|\hat{a}^\dagger n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\hat{a}^\dagger n\rangle = d_{n+1}|n+1\rangle.\end{aligned}$$

Jede Anwendung von \hat{a} auf $|n\rangle$ erniedrigt die Besetzungszahl n um 1. Damit würde aber $\hat{N}_a\hat{a}^{n+1}|n\rangle$ einen negativen Wert ergeben, im Widerspruch zu $n \geq 0$. Also muß $\hat{a}^n|n\rangle = |0\rangle$ sein und $\hat{N}_a|0\rangle = 0$ und somit $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\langle 0|0\rangle = 1$ und bestimmen jetzt die Normierungskonstanten c_{n-1} und d_{n+1} :

$$\begin{aligned}\langle(\hat{a}^\dagger)^{n+1}0|(\hat{a}^\dagger)^{n+1}0\rangle &= \langle(\hat{a}^\dagger)^n0|\hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^n0\rangle = \langle(\hat{a}^\dagger)^n0|(\hat{N}_a + 1)(\hat{a}^\dagger)^n0\rangle \\ &= (n+1)\langle(\hat{a}^\dagger)^n0|(\hat{a}^\dagger)^n0\rangle = \dots\dots \\ &= (n+1)!\langle 0|0\rangle = (n+1)! \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle \quad \text{und}$$

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n+1}}|n\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

$$(n-1)|n-1\rangle = \hat{N}_a|n-1\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n-1\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)|n-1\rangle \quad \Rightarrow$$

$$n|n-1\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \hat{a}\sqrt{n}|n\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad \square$$

Wir hatten in 6.11 gesehen, daß die Landau-Niveaus des 2-dim. Elektronengases im senkrechten Magnetfeld B hochgradig entartet sind (6.11.10):

$$N_B := N_x N_y = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBL_x L_y}{2\pi\hbar}. \quad (7.5.13)$$

Jetzt kann man mit Hilfe der oben eingeführten symmetrischen Eichung des Vektorpotentials \vec{A} ein neues Paar von Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren \hat{b} und \hat{b}^\dagger einführen, die entartete Zustände in einem Landau-Niveau vernichten, bzw. erzeugen. Der Ausgangspunkt zu dieser Überlegung ist die Definition eines Operators $\hat{\sigma}$ analog zu $\hat{\pi}$ aus 7.5.2:

$$\hat{\sigma} := \hat{p} - e\vec{A}. \quad (7.5.14)$$

Für dieses $\hat{\sigma}$ folgt:

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] &= [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] 1 = [\hat{p}_x - eA_x, \hat{p}_y - eA_y] 1 \\
&= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eA_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - eA_y\right] 1 \\
&= ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial x} - ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial y} = ie\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= ie\hbar B .
\end{aligned} \tag{7.5.15}$$

Während $\hat{\pi}$ eichinvariant ist, gilt dies für $\hat{\sigma}$ nicht, was man unter anderem an den folgenden Kommutatoren sieht:

$$\begin{aligned}
[\pi_x, \sigma_x] &= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eA_x\right] = 2i\hbar e \frac{\partial A_x}{\partial x} , \\
[\pi_y, \sigma_y] &= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - eA_y\right] = 2i\hbar e \frac{\partial A_y}{\partial y} , \\
[\pi_x, \sigma_y] &= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - eA_y\right] = i\hbar e \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) , \\
[\pi_y, \sigma_x] &= \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eA_x\right] = i\hbar e \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) .
\end{aligned}$$

Aber mit der symmetrischen Eichung 7.5.3 werden alle diese Kommutatoren zu 0 und damit kommutiert $\hat{\sigma}$ auch mit dem Hamilton-Operator \hat{H} :

$$[\pi_i, \sigma_j] = 0 , \quad \text{und} \quad [H, \sigma_j] = 0 . \tag{7.5.16}$$

Also kann man mit \hat{b}^\dagger und \hat{b} ein zweites Paar von Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren einführen:

$$\hat{b} := \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y) , \quad \hat{b}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y) , \tag{7.5.17}$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{2e\hbar B} \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) , \quad \hat{\sigma}_y = \sqrt{2e\hbar B} \frac{1}{2i}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) . \tag{7.5.18}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] &= \frac{1}{2e\hbar B}(-i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x) \\
&= \frac{1}{e\hbar B}(-i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + i\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x) = 1 .
\end{aligned} \tag{7.5.19}$$

Damit können die Energie-Eigenwerte des Hamilton-Operators \hat{H} durch die Eigenwerte n und m der mit \hat{H} kommutierenden Operatoren $\hat{N}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ und $\hat{N}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ beschrieben werden: $|n, m\rangle$.

Jetzt interessieren wir uns auf den Spuren von Laughlin insbesondere für die Grundzustandswellenfunktionen $|0, m\rangle$. Wir können hier nicht das Ergebnis von 6.11.8 verwenden, da wir dies unter Verwendung der Landau-Eichung abgeleitet hatten. Ein Weg zur Grundzustandswellenfunktion führt über die Lösung der Gleichung

$$\hat{a} |0, 0\rangle := 0.$$

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - i\pi_y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + eA_x - i(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + eA_y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{e}{2}(-yB - ixB)).\end{aligned}\quad (7.5.20)$$

Die höheren Landau-Niveaus werden erreicht durch \hat{a}^\dagger :

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x + i\pi_y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + eA_x + i(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + eA_y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{e}{2}(-yB + ixB)).\end{aligned}\quad (7.5.21)$$

Entsprechend gilt für die Stufenoperatoren \hat{b} und \hat{b}^\dagger in einem Landau-Niveau:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\sigma_x + i\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - eA_x + i(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - eA_y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{e}{2}(-yB + ixB)).\end{aligned}\quad (7.5.22)$$

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\sigma_x - i\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - eA_x - i(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - eA_y)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(-i\hbar(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{e}{2}(-yB - ixB)).\end{aligned}\quad (7.5.23)$$

Definition 7.5.3 Es ist üblich geworden bei statischen Magnetfeldern eine charakteristische Länge l_B einzuführen:

$$l_B := \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (7.5.24)$$

Zunächst sieht man, daß l_B tatsächlich die Dimension einer Länge hat, denn mit J =Joule, s =Sekunde, A =Ampere, T = Tesla, m =Meter folgt

$$[l_B] = \sqrt{\frac{[\hbar]}{[e][B]}} = \sqrt{\frac{Js}{AsT}} = \sqrt{\frac{J}{AT}} = \sqrt{\frac{Nm}{A\frac{N}{Am}}} = \sqrt{m^2} = m.$$

Setzt man für $\hbar \approx 10^{-34} J \cdot s$ und für $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} A \cdot s$ ein, so erhält man $l_B \approx \frac{25nm}{\sqrt{B [Tesla]}}$.

Lemma 7.5.4 *Hinreichend für $\hat{a}|0,0\rangle := 0$ und $\hat{b}|0,0\rangle := 0$ ist*

$$\psi_{0,0}(x, y) := \langle x, y | 0, 0 \rangle = e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \quad \text{mit } l_B := \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (7.5.25)$$

Aus 7.5.13 folgt, daß jedes Landau-Niveau hochgradig entartet ist. Die weiteren Zustände in einem gegebenen Landau-Niveau, hier $n = 0$, erreicht man mit \hat{b}^\dagger . Sie werden mit der Quantenzahl $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(x, y) &:= \langle x, y | 0, 1 \rangle = \hat{b}^\dagger \langle x, y | 0, 0 \rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right) \langle x, y | 0, 0 \rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)}. \\ \psi_{0,m}(x, y) &:= \langle x, y | 0, m \rangle = \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right)^m \langle x, y | 0, 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right)^m e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)}. \end{aligned} \quad (7.5.26)$$

Mit $z := x+iy$ und $\bar{z} := x - iy$ und $r := |z| = |\bar{z}|$ wird dies häufig auch geschrieben als:

$$\psi_{0,m}(z) := \langle z | 0, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(\bar{z}) \right)^m e^{-|z|^2/(4l_B^2)}. \quad (7.5.27)$$

Die Funktion $f(x, y) = (x - iy)^m$ ist antiholomorph und für eine solche antiholomorphe Funktion gilt:

$$\hat{a} \langle z | 0, m \rangle = \hat{a} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} = 0. \quad (7.5.28)$$

Mit der Definition eines Drehimpulsoperators in z -Richtung

$$\hat{J}_z := (\hat{r} \times \hat{p})_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (7.5.29)$$

zeigt sich, daß sich die Grundzustands-Eigenzustände $\langle z | 0, m \rangle$ gerade durch ihren Drehimpuls unterscheiden:

$$\hat{J}_z \langle z | 0, m \rangle = -m\hbar \langle z | 0, m \rangle. \quad (7.5.30)$$

Gleichzeitig gilt für diese Grundzustands-Eigenzustände $\langle z | 0, m \rangle$

$$\hat{J}_z \langle z | 0, m \rangle = -\hbar \hat{b}^\dagger \hat{b} \langle z | 0, m \rangle . \quad (7.5.31)$$

Insgesamt bezeichnet man die Landau-Lösungen des zweidimensionalen Elektronengases als $|n, m\rangle$ mit einem Vakuum-Zustand $|0, 0\rangle$:

$$|n, m\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n (\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{n!m!}} |0, 0\rangle . \quad (7.5.32)$$

Beweis: Eine komplexe Funktion $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ heißt bekanntlich dann holomorph, wenn sie komplex differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = 0 . \quad (7.5.33)$$

Eine komplexe Funktion $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ heißt antiholomorph, wenn sie komplex differenzierbar ist und die komplex konjugierte Funktion $\overline{f(x, y)} = u(x, y) - iv(x, y)$ holomorph ist, d.h. wenn $\overline{f(x, y)}$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} , \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = 0 . \quad (7.5.34)$$

Sei $f(x, y)$ antiholomorph, d.h. $\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{a} f(x, y) \langle x, y | 0, 0 \rangle &= \hat{a} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{e}{2} (-yB - ixB) \right) \\ &\quad f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[\left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) f(x, y) \right] e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) \left[\left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (-yB - ixB) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) \left[\left(-i\hbar \left(\frac{-2x}{4l_B^2} + i \frac{2y}{4l_B^2} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (-yB - ixB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) \left[-i \left(\frac{-xeB}{2} + i \frac{yeB}{2} \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} f(x, y) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (-yB - ixB) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{b} \langle x, y | 0, 0 \rangle &= \hat{b} e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{e}{2} (-yB + ixB) \right] e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \frac{e}{2} (-yB + ixB) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{-2x}{4l_B^2} - i \frac{2y}{4l_B^2} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \frac{e}{2} (-yB + ixB) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i \left(\frac{-xeB}{2} - i \frac{yeB}{2} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \frac{e}{2} (-yB + ixB) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{b}^\dagger \langle x, y | 0, 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{e}{2} (-yB - ixB) \right] e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (-yB - ixB) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i\hbar \left(\frac{-2x}{4l_B^2} + i \frac{2y}{4l_B^2} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (-yB - ixB)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left(-i \left(\frac{-eBx}{2} + i \frac{eBy}{2} \right) \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \frac{e}{2} (yB + ixB) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} (ieB(x - iy)) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)}.
\end{aligned}$$

Jede weitere Anwendung von \hat{b}^\dagger liefert einen weiteren Faktor $\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) = \frac{i}{\sqrt{2}l_B}(x - iy)$, so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned}
\langle x, y | 0, m \rangle &:= \frac{(\hat{b}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right)^m e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)}.
\end{aligned}$$

Weil $(x - iy)^m$ eine antiholomorphe Funktion ist gilt für jeden Zustand $\langle x, y | 0, m \rangle$

$$\hat{a} \langle x, y | 0, m \rangle = 0.$$

Das heißt, alle entarteten Zustände $|0, m\rangle$ des Grundzustands $n = 0$ werden durch \hat{a} auf das Vakuum abgebildet.

Zugleich ist $|0, m\rangle$ ein Eigenzustand des Drehimpulsoperators in z -Richtung:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z \langle x, y | 0, 0 \rangle &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \\
&= -i\hbar \left(\frac{-2}{4l_B^2} \right) (xy - yx) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z \langle x, y | 0, m \rangle &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right)^m \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -i\hbar \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB \right)^m m (x - iy)^{m-1} (-ix - y) \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -m\hbar \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} ieB(x - iy) \right)^m \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -m\hbar \langle x, y | 0, m \rangle.
\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt:

$$-\hbar \hat{b}^\dagger \hat{b} \langle x, y | 0, m \rangle = -\hbar \hat{b}^\dagger \hat{b} (\hat{b}^\dagger)^m \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= -\hbar \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}^\dagger (\hat{b}^\dagger)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -\hbar \hat{b}^\dagger (1 + \hat{b}^\dagger \hat{b}) (\hat{b}^\dagger)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle = \dots \\
&= -\hbar \hat{b}^\dagger (\hat{b}^\dagger)^{m-1} (m + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -\hbar m (\hat{b}^\dagger)^m \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle x, y | 0, 0 \rangle \\
&= -m \hbar \langle x, y | 0, m \rangle \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\hat{J}_z \langle x, y | 0, m \rangle = -\hbar \hat{b}^\dagger \hat{b} \langle x, y | 0, m \rangle. \quad \square$$

Lemma 7.5.6 Die Ladungsdichte $\rho(r)$ des Grundzustands $\langle x, y | 0, m \rangle$ mit einem Drehimpuls m ist in der komplexen Ebene in einem Kreisring mit dem Radius r_0 und einer näherungsweise Breite l_B lokalisiert:

$$\rho(r) := |\psi_{0,m}(x, y)|^2 = \frac{1}{m!} \left(\frac{eB}{2\hbar} \right)^m r^{2m} e^{-2r^2/(4l_B^2)}. \quad (7.5.35)$$

$$r_0 = \sqrt{2m} l_B = \sqrt{\frac{2m\hbar}{eB}}. \quad (7.5.36)$$

Beweis: Mit $r^2 := (x^2 + y^2)$ folgt

$$\psi_{0,m}(x, y) = \langle x, y | 0, m \rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} i e B (x - iy) \right)^m e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)}.$$

$$\rho(r) := |\psi_{0,m}(x, y)|^2 = \frac{1}{m!} \left(\frac{eB}{2\hbar} \right)^m r^{2m} e^{-2r^2/(4l_B^2)}.$$

Für das Extremum von $\rho(r)$ findet man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \rho(r) &= \frac{1}{m!} \left(\frac{eB}{2\hbar} \right)^m [2m(r)^{2m-1} e^{-r^2/(2l_B^2)} + (r)^{2m} \left(\frac{-2r}{2l_B^2} \right) e^{-r^2/(2l_B^2)}] \\
&= \frac{1}{m!} \left(\frac{eB}{2\hbar} \right)^m (r)^{2m-1} e^{-r^2/(2l_B^2)} [2m - \frac{r^2}{l_B^2}] \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$r_0 = \sqrt{2m} l_B.$$

Bei r_0 liegt ein Maximum vor wegen:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rho(r) \begin{cases} > 0 & \text{für } r < r_0, \\ < 0 & \text{für } r > r_0. \end{cases}$$

Die Breite des Kreisrings der Ladungsdichte kann man grob abschätzen mit

$$e^{-(r \pm l_B)^2 / (2l_B^2)} \simeq e^{-r^2 / (2l_B^2)} e^{-l_B^2 / (2l_B^2)} = e^{-r^2 / (2l_B^2)} e^{-1/2},$$

d.h. in einem Abstand $\pm l_B$ vom Maximum bei r_0 ist $\rho(r)$ etwa auf den $e^{-1/2}$ -fachen Wert abgefallen. \square

Im Ausdruck für $\langle x, y | 0, m \rangle$ kommt jetzt der Faktor $(x - iy)^m$ vor. In der Literatur haben sich verschiedene Formen der Abkürzung etabliert. Wir definieren hier die holomorphe Variable $w := (x - iy)$:

Definition 7.5.8 Mit $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$

$$w := (x - iy), \quad \bar{w} := (x + iy), \quad \Rightarrow \quad (7.5.37)$$

$$\begin{aligned} \langle w | 0, m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} i e B w \right)^m e^{-|w|^2 / (4l_B^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{i w}{\sqrt{2} l_B} \right)^m e^{-|w|^2 / (4l_B^2)}. \end{aligned} \quad (7.5.38)$$

$$\partial_w := \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y), \quad \partial_{\bar{w}} := \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y) \quad \Rightarrow \quad (7.5.39)$$

$$\partial_w w = 1, \quad \partial_{\bar{w}} \bar{w} = 1, \quad \partial_w \bar{w} = 0, \quad \partial_{\bar{w}} w = 0. \quad (7.5.40)$$

Mit dieser Definition können wir 7.5.20, 7.5.21, 7.5.22 und 7.5.23 umschreiben:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} [-i\hbar(\partial_x - i\partial_y) + \frac{eB}{2}(-y - ix)] \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial_{\bar{w}} + \frac{w}{4l_B} \right), \end{aligned} \quad (7.5.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} [-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{eB}{2}(-y + ix)] \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial_w - \frac{\bar{w}}{4l_B} \right), \end{aligned} \quad (7.5.42)$$

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{eB}{2} (-y + ix) \right] \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial_w + \frac{\bar{w}}{4l_B} \right),\end{aligned}\quad (7.5.43)$$

$$\begin{aligned}\hat{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{eB}{2} (-y - ix) \right] \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_B \partial_{\bar{w}} - \frac{w}{4l_B} \right).\end{aligned}\quad (7.5.44)$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_z &= -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \\ &= -\hbar \left[\left(\frac{1}{2}x\partial_x + i\frac{1}{2}x\partial_y - i\frac{1}{2}y\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}x\partial_x - i\frac{1}{2}x\partial_y + i\frac{1}{2}y\partial_x + \frac{1}{2}y\partial_y \right) \right] \\ &= -\hbar \left[(x - iy) \left(\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \right) - (x + iy) \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \right] \\ &= -\hbar(w\partial_w - \bar{w}\partial_{\bar{w}}).\end{aligned}\quad (7.5.45)$$

7.5.2 Verallgemeinerung vom 1-Teilchen harmonischen Oszillator auf einen 2-Teilchen harmonischen Oszillator in einem statischen Magnetfeld

Das Zwei-Körper-Problem der klassischen Mechanik mit einem Wechselwirkungs-Potential $V(|r_2 - r_1|)$ ist durch Übergang zu einem Schwerpunkt-Koordinaten-System exakt lösbar. Die quantenmechanische Behandlung geschieht analog zur klassischen Behandlung. Wir folgen Rebhan (2005), S. 151 ff.

Das Schwerpunkt-System wird definiert durch:

Definition 7.5.9 Seien $m_1, m_2, r_1, r_2, p_1, p_2$ die Massen und Orts- und Impuls-Vektoren der beiden klassischen Teilchen. Dann definiert man M als Schwerpunktmasse, μ als reduzierte Masse, R als Schwerpunkt-Ortsvektor und r als Relativ-Ortsvektor:

$$M := m_1 + m_2, \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (7.5.46)$$

$$R := \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, \quad r := r_2 - r_1, \quad (7.5.47)$$

$$P := M\partial_t R = M\frac{\partial R}{\partial t}, \quad p := \mu\partial_t r = \mu\frac{\partial r}{\partial t}. \quad (7.5.48)$$

Bei zwei identischen Teilchen folgt:

$$M = 2m_1, \quad \mu = \frac{m_1}{2}, \quad (7.5.49)$$

$$R = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad r = r_2 - r_1. \quad (7.5.50)$$

Wir beginnen der Betrachtung der klassischen Hamilton-Funktion ohne Wechselwirkungspotential $V(|r_2 - r_1|)$.

Lemma 7.5.10 Die Hamilton-Funktion und die Drehimpuls-Funktion seien gegeben als:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \quad \text{und} \quad (7.5.51)$$

$$L = r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2. \quad (7.5.52)$$

$$H = H_R + H_r = \left(\frac{P^2}{2M}\right) + \left(\frac{p^2}{2\mu}\right) \quad \text{und} \quad (7.5.53)$$

$$L = L_R + L_r = (R \times P) + (r \times p). \quad (7.5.54)$$

Damit ist das klassische System zweier gekoppelter Teilchen zurückgeführt auf zwei komplett entkoppelte Systeme für je ein Teilchen, nämlich auf H_R und H_r . Das von R abhängige System heißt das Schwerpunkts-System, das von r abhängige System das relative System.

Da zunächst kein Potential $V(|r_2 - r_1|)$ angenommen wurde ist auch der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße und er ist die Summe der Drehimpulse der beiden Teilsysteme L_R und L_r .

Beweis:

$$\begin{aligned} H_R + H_r &= \left(\frac{P^2}{2M}\right) + \left(\frac{p^2}{2\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left[(m_1 + m_2) \frac{m_1\partial_t r_1 + m_2\partial_t r_2}{(m_1 + m_2)} \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}} \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (\partial_t r_2 - \partial_t r_1) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)} \left[(m_1\partial_t r_1)^2 + 2m_1 m_2 (\partial_t r_1)(\partial_t r_2) + (m_2\partial_t r_2)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(m_1 + m_2)} [m_1 m_2 ((\partial_t r_2)^2 - 2(\partial_t r_2)(\partial_t r_1) + (\partial_t r_1)^2)] \\
& = \frac{1}{2(m_1 + m_2)} [(m_1^2 (\partial_t r_1)^2 + m_1 m_2 (\partial_t r_1)^2 + m_2^2 (\partial_t r_2)^2 + m_1 m_2 (\partial_t r_2)^2] \\
& = \frac{1}{2m_1} (m_1 \partial_t r_1)^2 + \frac{1}{2m_2} (m_2 \partial_t r_2)^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} .
\end{aligned}$$

$$L_R + L_r = R \times P + r \times p$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{(m_1 + m_2)} \times (m_1 + m_2) \frac{m_1 \partial_t r_1 + m_2 \partial_t r_2}{m_1 + m_2} \\
& \quad + (r_2 - r_1) \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\partial_t r_2 - \partial_t r_1) \\
& = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1^2 r_1 \times \partial_t r_1 + m_1 m_2 r_1 \times \partial_t r_2 + m_1 m_2 r_2 \times \partial_t r_1 + m_2^2 r_2 \times \partial_t r_2 \\
& \quad + m_1 m_2 r_2 \times \partial_t r_2 - m_1 m_2 r_2 \times \partial_t r_1 - m_1 m_2 r_1 \times \partial_t r_2 + m_1 m_2 r_1 \times \partial_t r_1] \\
& = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 (m_1 + m_2) r_1 \times \partial_t r_1 + m_2 (m_1 + m_2) r_2 \times \partial_t r_2] \\
& = r_1 \times m_1 \partial_t r_1 + r_2 \times m_2 \partial_t r_2 = r_1 \times p_1 + r_2 \times p_2 . \quad \square
\end{aligned}$$

Auch wenn man jetzt ein Zentral-Potential $V(|r_2 - r_1|) = V(|r|)$ zur Hamilton-Funktion addiert, z.B. die Elektron-Elektron-Coulomb Wechselwirkung,

$$V(|r_2 - r_1|) := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |r_2 - r_1|} ,$$

bleibt der Drehimpuls wegen der Radialsymmetrie des Potentials eine Erhaltungsgröße und die Aufteilung $H = H_R + H_r$ besteht weiterhin, allerdings nun mit $H_r = \frac{p^2}{2\mu} + V(|r|)$. Die Verschiebung der Energieniveaus kann man für 'kleine' $V(|r_2 - r_1|)$ mittels der Störungstheorie ausrechnen.

Im nächsten Schritt kann man zu H_R und H_r ebenso wie im obigen Fall des Einteilchen-Oszillators das Vektorpotential \vec{A} für ein Magnetfeld in z -Richtung $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B)^T$ in der symmetrischen Eichung 7.5.3 hinzufügen und die Landau-Quantisierung durchführen.

Jetzt geht man von den reellen Koordinaten r_1, r_2, R und r in 7.5.50 zu den entsprechenden holomorphen Variablen z_1, z_2, Z und z wie in 7.5.37 über und erhält:

$$Z := \frac{1}{2}(z_1 + z_2) , \quad z := z_2 - z_1 . \quad (7.5.55)$$

Nun kann man die Ausdrücke bzgl. des Faktors $\frac{1}{2}$ noch etwas zu symmetrisieren:

$$l_R := \frac{l_B}{\sqrt{2}}, \quad l_r := \sqrt{2} l_B, \quad \text{mit } l_B := \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (7.5.56)$$

$$\hat{b}_Z^\dagger = -i\sqrt{2}(l_R \partial_{\bar{Z}} - \frac{Z}{4l_R}), \quad \hat{b}_z^\dagger = -i\sqrt{2}(l_r \partial_{\bar{z}} - \frac{z}{4l_r}). \quad (7.5.57)$$

Damit ergibt sich für das hoch-entartete tiefste Landau-Niveau $|0, 0, M, m\rangle$ mit den Drehimpuls-Eigenwerten M bzgl. L_R im Schwerpunkt-System und m bzgl. L_r im relativen System:

Lemma 7.5.12 \tilde{N}_M und \tilde{N}_m seien Normierungsfaktoren der Grundzustands-Funktion $|0, 0, M, m\rangle$, in der Literatur auch als LLL = 'Lowest Landau Level' bezeichnet.

$$\begin{aligned} \langle Z, z | 0, 0, M, m \rangle &:= \frac{(\hat{b}_Z^\dagger)^M (\hat{b}_z^\dagger)^m}{\sqrt{M!} \sqrt{m!}} \langle Z, z | 0, 0, 0, 0 \rangle \\ &= \frac{(\hat{b}_Z^\dagger)^M (\hat{b}_z^\dagger)^m}{\sqrt{M!} \sqrt{m!}} e^{-\frac{1}{4}(\frac{|Z|^2}{l_R^2} + \frac{|z|^2}{l_r^2})} \\ &= \tilde{N}_M \tilde{N}_m Z^M z^m e^{-\frac{1}{4}(\frac{|Z|^2}{l_R^2} + \frac{|z|^2}{l_r^2})} \\ &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}l_R}\right)^M \left(\frac{i}{\sqrt{2}l_r}\right)^m (z_2 + z_1)^M (z_2 - z_1)^m e^{-\frac{1}{4}(\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{l_B^2})}. \end{aligned} \quad (7.5.58)$$

Beweis: Zunächst betrachten wir das Argument der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{|Z|^2}{4l_R^2} + \frac{|z|^2}{4l_r^2}\right) &= -\left(\frac{\frac{2}{4}|z_2 + z_1|^2}{4l_B^2} + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2 \cdot 4l_B^2}\right) \\ &= -\frac{(z_2 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_1 + z_1 \bar{z}_1) + (z_2 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 z_1 + z_1 \bar{z}_1)}{8l_B^2} \\ &= -\frac{|z_2|^2 + |z_1|^2}{4l_B^2}. \end{aligned}$$

Und die Anwendung von $\hat{b}_Z^\dagger = -i\sqrt{2}(l_R \partial_{\bar{Z}} - \frac{Z}{4l_R})$ und $\hat{b}_z^\dagger = -i\sqrt{2}(l_r \partial_{\bar{z}} - \frac{z}{4l_r})$ auf $\langle Z, z | 0, 0, 0, 0 \rangle$ liefert:

$$\begin{aligned} \hat{b}_Z^\dagger \langle Z, z | 0, 0, 0, 0 \rangle &= -i\sqrt{2} \left(l_R \partial_{\bar{Z}} - \frac{Z}{4l_R} \right) e^{-\frac{1}{4}(\frac{|Z|^2}{l_R^2} + \frac{|z|^2}{l_r^2})} \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_R \left(-\frac{1}{4} \right) \frac{Z}{l_R^2} - \frac{Z}{4l_R} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{Z}{l_R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_z^\dagger \langle Z, z \mid 0, 0, 0, 0 \rangle &= -i\sqrt{2} \left(l_r \partial_{\bar{z}} - \frac{z}{4l_r} \right) e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{|Z|^2}{l_r^2} + \frac{|z|^2}{l_r^2} \right)} \\ &= -i\sqrt{2} \left(l_r \left(-\frac{1}{4} \right) \frac{z}{l_r^2} - \frac{z}{4l_r} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{z}{l_r}. \quad \square \end{aligned}$$

7.5.3 Vorschlag von Laughlin für die Grundzustands-Wellenfunktion eines n -Teilchen harmonischen Oszillators in einem statischen Magnetfeld

Wir folgen wieder Tong (2016), S. 76 ff., S. 85 ff., S. 92 ff. und der Originalarbeit von Laughlin (1983).

In einem 2-dim. Quanten-Hall System von n wechselwirkenden Elektronen in einem 'starken' Magnetfeld setzt man zunächst einmal voraus, daß die Energie der Landau-Niveaus deutlich größer als die Coulomb-Wechselwirkung ist, und diese wiederum größer als etwaige Störstellen-Potentiale:

$$\hbar\omega_B \gg E_{Coulomb} \gg V_{Störstellen}. \quad (7.5.59)$$

Leider kann man aber jetzt den obigen Fall zweier Elektronen nicht auf einen n -Elektronen Fall verallgemeinern. Zwar führt die Elektron-Elektron-Coulomb Wechselwirkung als Zentralpotential wieder dazu, daß der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße bleibt, aber eine Störungstheorie mit 10^{11} Teilchen ist natürlich nicht möglich.

Hier hat jetzt Laughlin (Laughlin (1983)) für den niedrigsten Landau-Zustand (LLL) einen Vorschlag für eine n -Teilchen Wellenfunktion gemacht, die tatsächlich den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt von teilweise gefüllten niedrigsten Landau-Niveaus näherungsweise beschreibt, wobei Laughlin von einem 'Füllungsfaktor' $\nu = \frac{1}{m}$, $m \in 2, 3, \dots$ ausgeht. Seien $\vec{z} := (z_1, \dots, z_n)$ und $\vec{\bar{z}} := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. Dann postuliert Laughlin für die Wellenfunktion ψ_m :

$$\psi_m(\vec{z}, \vec{\bar{z}}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^m e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}. \quad (7.5.60)$$

Zunächst sieht man, daß diese Wellenfunktion für ungerades m antisymmetrisch ist, also tatsächlich einen Quanten-Hall-Effekt von Elektronen oder Löchern beschreiben könnte. Bei geradem m könnte dies eine Wellenfunktion für einen Quanten-Hall Effekt von Bosonen sein.

Lemma 7.5.14 *Laughlins Behauptung ist nun, daß die Wellenfunktion $\psi_m(\vec{z}, \vec{\bar{z}})$ für ungerades m den gewünschten 'Füllungsfaktor' $\nu = \frac{1}{m}$, $m \in 3, 5, \dots$ habe. Der Beweis ist heuristischer Natur :-)*

Beweis: Gegeben seien in einem 2-dim. System n Fermionen. Welche Fläche benötigt ein einzelnes Teilchen? Der Vorfaktor von $\psi_m(\vec{z}, \vec{z})$ für das einzelne Teilchen an der Position z_1 ist proportional zu

$$\prod_{1 < j \leq n} |z_1 - z_j|^m = \prod_{2 \leq j \leq n} |z_1 - z_j|^m .$$

Also ist die höchste Potenz von z_1 , und damit der maximale Drehimpuls, gerade $(n - 1)m$, was für große Werte von n identisch mit nm ist. Aus 7.5.36 folgen also für die Dichte ein Radius r_0 und ein näherungsweise Flächenbedarf A von

$$r_0 = \sqrt{2\pi n m} l_B , \quad A = 2\pi n m l_B^2 .$$

Aus der Landau-Theorie wissen wir (6.11.10, 6.11.11), daß für die Anzahl der Zustände eines voll besetzten Landau-Niveaus einer Probe mit den Abmessungen L_x und L_y gilt:

$$\frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} .$$

Setzen wir für die Probengröße hier unseren Wert A der Fläche eines Fermions mit maximalem Drehimpuls ein, so erhalten wir für die maximale Anzahl an Zuständen

$$\frac{2\pi n m l_B^2}{2\pi l_B^2} = nm .$$

Wir haben also n Teilchen in nm Zuständen, also ist das Landau-Niveau nur gefüllt bis zu einem Füllungsfaktor ν :

$$\nu nm \stackrel{!}{=} n \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{m} \quad \square$$

Wenn man jetzt eine näherungsweise Darstellung einer n -Teilchen Wellenfunktion in einem statischen Magnetfeld im niedrigsten Landau-Zustand (LLL) hat, kann man sich die Frage nach Anregungen in Form von Quasi-Loch-, bzw. Quasi-Teilchen-Zuständen stellen. Wir behandeln hier nur die leichter zugänglichen Quasi-Loch-Zustände.

Sei ein Quasi-Loch an der (komplexen) Position $\eta_1 \in \mathbb{C}$, dann kann man in Erweiterung der Laughlin-Grundzustands-Wellenfunktion (7.5.60) den Ansatz machen:

$$\psi_{m,Loch}(\vec{z}, \vec{z}, \eta_1) := \prod_{i=1}^n |z_i - \eta_1| \prod_{1 \leq k < l \leq n} |z_k - z_l|^m e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}} . \quad (7.5.61)$$

An der Stelle $\eta_1 \in \mathbb{C}$ verschwindet die Elektronenwellenfunktion, wir haben also ein 'Quasi-Loch' erzeugt. Die Verallgemeinerung auf M Quasi-Löcher an den Positionen $\vec{\eta} := (\eta_1, \dots, \eta_M)$ ist dann:

$$\psi_{m,M-Löcher}(\vec{z}, \vec{z}, \vec{\eta}) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^M |z_i - \eta_j| \prod_{1 \leq k < l \leq n} |z_k - z_l|^m e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}} . \quad (7.5.62)$$

Es ist ja ganz nett, solche Wellenfunktionen hinzuschreiben, nur rechnen kann man damit nicht, denn dann müßte man für Erwartungswerte von Operatoren ja sofort Integrale der Form $\int dz_1 \dots \int dz_n$ mit einer makroskopischen Anzahl n berechnen ($n \approx 10^{11}$ bei GaAs-GaAlAs Heterostrukturen).

Es liegt also nahe, sich bei diesem Problem von Modellbildungen in der statistischen Physik inspirieren zu lassen.

Der erste Schritt ist die Definition einer Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\vec{z})$. Hier möchte man eigentlich $|\psi_m|^2$ mit der Laughlin-Wellenfunktion $|\psi_m\rangle$ aus 7.5.60 nehmen, aber da die Laughlin-Wellenfunktion nicht normiert ist, dividieren wir noch durch einen Faktor l_B^m , um die Wellenfunktion frei von Längeneinheiten zu machen:

$$\tilde{\psi}_m(\vec{z}, \vec{z}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|z_i - z_j|^m}{l_B^m} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}. \quad (7.5.63)$$

Dann kann man eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\vec{z})$ definieren:

$$P(\vec{z}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|z_i - z_j|^{2m}}{l_B^{2m}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{2l_B^2}}. \quad (7.5.64)$$

$$Z := \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i P(\vec{z}). \quad (7.5.65)$$

Für eine quantenmechanische Observable in z -Darstellung $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n)$ wäre dann der Erwartungswert

$$\langle \tilde{\psi}_m | \mathcal{F}(\vec{z}) \tilde{\psi}_m \rangle = \frac{\int \prod_{i=1}^n d^2 z_i (\mathcal{F}(\vec{z}) P(\vec{z}))}{Z}. \quad (7.5.66)$$

Natürlich können wir die Integrale jetzt genausowenig lösen, wie zuvor :-). Aber wir können diese eben eingeführte Größe Z als eine Zustandsfunktion wie in der statistischen Mechanik interpretieren und dann für $P(z_1, \dots, z_n)$ etwas Vergleichbares wie eine Boltzmann-Verteilung mit einer freien Energie $U(z_1, \dots, z_n)$ einführen:

$$P(\vec{z}) =: e^{-\beta U(\vec{z})} \quad \Rightarrow \quad (7.5.67)$$

$$-\beta U(\vec{z}) = 2m \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) - \frac{1}{2l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$$

$$U(\vec{z}) = -\frac{2m}{\beta} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) + \frac{1}{2\beta l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2. \quad (7.5.68)$$

Die Bedeutung von β bleibt in diesem Vielteilchen-Kontext zunächst einmal offen, ist also nicht auf den Wert $\frac{1}{kT}$ der statistischen Mechanik festgelegt.

Wir untersuchen jetzt die beiden Terme von $U(\vec{z})$:

$$U_1(\vec{z}) := -\frac{2m}{\beta} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right),$$

$$U_2(\vec{z}) := \frac{1}{2\beta l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2.$$

Lemma 7.5.16 (Plasma-Modell) *Mit $\beta = \frac{2}{m}$, wobei m der Drehimpuls des Grundzustands (LLL) ist, können wir den ersten Term von U , nämlich $U_1(\vec{z})$, als eine Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen z_i und z_j mit einer Teilchen-Quasi-Ladung m , dem Drehimpuls, ansehen:*

$$U_1(\vec{z}) = -m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right). \quad (7.5.69)$$

und den zweiten Term von U , nämlich $U_2(\vec{z})$, als ein Analog zu einem elektrischen Hintergrundfeld mit der konstanten Teilchen-Dichte $\rho_0 = -\frac{1}{2\pi l_B^2}$

$$U_2(\vec{z}) = \frac{m}{4l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = m\rho_0 = -\frac{m}{2\pi l_B^2}. \quad (7.5.70)$$

Jedes einzelne Elektron mit der Quasi-Ladung m spürt also das Potential $U_2(\vec{z}) = m\rho_0$ eines elektrischen Hintergrundfeldes mit einer konstanten Teilchen-Dichte ρ_0 .

Beweis: Wenn man sich jetzt $U_1(\vec{z})$ anschaut, dann fällt eine Ähnlichkeit mit dem elektrostatischen Potential in 2 Dimensionen auf, genauer gesagt mit der Greenschen Funktion des Laplace-Operators in \mathbb{R}^2 .

Zunächst eine Erinnerung an die Methode der Greenschen Funktionen zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen (LDGL) - siehe z.B. Wikipedia-Green's_Function (2022). Sei $L(r)$ ein linearer Differentialoperator auf \mathbb{R}^n , Gesucht werde eine Lösung $u(r)$ der LDGL $Lu(r) = f(r)$. Die bei Physikern gebräuchliche Definition der L entsprechenden Green's Funktion $G(r, a)$ ist

$$LG(r, a) = \delta(r - a).$$

Die Mathematiker verwenden hier zumeist $\delta(a - r)$ statt $\delta(r - a)$. Wenn L translationsinvariant ist, so gilt $G(r, a) = G(r - a)$. Unter Vernachlässigung mathematischer Feinheiten folgt aus einer Kenntnis der Greenschen Funktion $G(r, a)$ sofort die Lösung der LDGL $Lu(r) = f(r)$:

$$L(r) \int G(r, a)f(a)da = \int (L(r)G(r, a))f(a)da = \int \delta(r - a)f(a)da = f(r) \quad \Rightarrow$$

$$L(r)u(r) = f(r) \quad \text{mit} \quad u(r) := \int G(r, a)f(a)da .$$

Die Greensche Funktion $G(r - a)$ des Laplace-Operators $\nabla^2 = (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2$ mit $r^2 = x^2 + y^2$ in \mathbb{R}^2 ist

$$\nabla^2 G(r - a) = \delta(r - a) \quad \Rightarrow \quad G(r - a) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{r - a}{l_B}\right) \quad \Rightarrow$$

$$-\nabla^2\left[-\log\left(\frac{r - a}{l_B}\right)\right] = -2\pi\delta(r - a) \quad \Leftrightarrow \quad -\nabla^2\left[-m \log\left(\frac{r}{l_B}\right)\right] = -2\pi m\delta(r) .$$

Aus der Sicht der Elektrostatik ist also $-2\pi mG(r) = -m \log(\frac{r}{l_B})$ als Lösung des 2-dimensionalen Laplace-Operators so etwas wie ein elektrostatisches Potential zwischen 2 Ladungen q im Abstand r , jedoch mit einer Quasi-Ladung $q = m$ mit dem Drehimpuls m . Wenn man jetzt im ersten Term von $U(\vec{z})$ den Faktor β , statt wie aus der statistischen Mechanik gewohnt $\beta = \frac{1}{kT}$, zu $\beta = \frac{2}{m}$ wählt wird die Analogie ganz deutlich:

$$-\frac{2m}{\beta} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) = -m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) .$$

Auch den zweiten Term $U_2(z_1, \dots, z_n)$ kann man auf ein Bild der Elektrostatik zurückführen. Mit $r_i := |z_i|$ und dem Laplace-Operator in 2 Dimensionen folgt:

$$\begin{aligned} -\nabla_i^2\left(\frac{m}{4l_B^2}|z_i|^2\right) &= -\left(\frac{m}{4l_B^2}\right) \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(r_i \frac{\partial}{\partial r_i} r_i^2\right) \\ &= -\left(\frac{m}{4l_B^2}\right) \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} (2r_i^2) = -\frac{m}{l_B^2} . \end{aligned}$$

Das Potential $U = q\Phi$ eines konstanten elektrostatischen Feldes Φ , hier wieder mit $q = m$, mit der Elektronendichte ρ_0 erfüllt die Poisson-Gleichung

$$-\nabla^2\Phi = 2\pi\rho_0 ,$$

durch Vergleich mit der darüberstehenden Zeile können wir also folgern:

$$\rho_0 = -\frac{1}{2\pi l_B^2} \quad \text{und} \quad U_2(\vec{z}) = m\rho_0 . \quad \square$$

Man sollte sich allerdings klarmachen, daß bis jetzt tatsächlich noch nichts passiert ist :-), weder physikalisch noch mathematisch - wir haben nur ein paar neue Bezeichnungen eingeführt und unsere Vielteilchen-Variablen ein wenig umgeschrieben.

Die entscheidende Näherung kommt jetzt! Wir interpretieren die freie Energie $U(\vec{z})$ tatsächlich als ein Elektronenplasma mit Elektronen, die mit U_1 über eine Coulomb-Wechselwirkung mit Quasi-Ladungen $q = m$ und mit U_2 mit einer neutralisierenden

homogenen Elektronendichte ρ_0 wechselwirken, und zwar so, daß die freie Gesamtenergie $U(\vec{z})$ minimiert wird. Unter dieser Voraussetzung können wir dann sagen, daß mit $\nu =$ Füllungsfaktor, $n_0 = \frac{1}{2\pi l_B^2} =$ Zustandsdichte eines Elektrons, $q = m =$ Quasi-Ladung, gelten muß:

$$\nu n_0 m \stackrel{!}{=} \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \nu n_0 = \frac{1}{2\pi l_B^2 m} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{m}. \quad (7.5.71)$$

Das Plasma-Modell liefert also schon einmal einen Füllungsfaktor $\nu = \frac{1}{m}$, ist also zumindest mit dem Ausgangspunkt der Laughlin-Wellenfunktion kompatibel. Ob die Elektronen der Laughlin-Wellenfunktion zusammen mit dieser Plasma-Modell-Näherung jetzt tatsächlich so beweglich sind, ist eine Frage numerischer Rechnungen, bzw. letztlich eine Frage des Experiments. Tong (2016) spricht auf S. 82 davon, daß das Plasma-Modell für Drehimpulse $m < 70$ anwendbar ist.

Wesentlich interessanter wird es, wenn wir versuchen dieses Plasma-Modell jetzt auf die Quasi-Löcher Anregungen 7.5.62 anzuwenden.

Wir wollen mithilfe dieses Plasma-Modells zeigen, daß aufgrund der Vielteilchen-Wechselwirkung in einem 2-dim. Quanten-Hall System die elektrischen Ladungen einen effektiven Wert $e^* = e/m$ annehmen und auch die Statistik der Elektronen effektive Werte zwischen 0 und 1/2, also sog. Anyonen, aufzeigt. Der Beweis stützt sich auf die Untersuchung einer spezielle Berry-Phase (5.3.4).

In 7.5.67 und 7.5.68 erhalten wir jetzt einen Zusatzterm U_3 , der die Wechselwirkung der Quasi-Löcher an den Stellen η_j mit den Elektronen des Plasmas an den Stellen z_i beschreibt (erneut $\beta = 2/m$):

$$Z = \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i e^{-\beta U(\vec{z}, \vec{\eta})}, \quad (7.5.72)$$

$$\begin{aligned} U(\vec{z}, \vec{\eta}) &= U_1(\vec{z}) + U_2(\vec{z}) + U_3(\vec{z}, \vec{\eta}) \\ &= -\frac{2m}{\beta} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) + \frac{1}{2\beta l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M \log\left(\frac{|z_i - \eta_j|}{l_B}\right) \\ &= -m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) + \frac{m}{4l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 - m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M \log\left(\frac{|z_i - \eta_j|}{l_B}\right). \end{aligned} \quad (7.5.73)$$

Im folgenden werden wir im Zusammenhang mit der Berry-Phase die Ableitungen $\frac{\partial Z}{\partial \eta_i}$ benötigen. Da wir Z aber wegen der makroskopischen Integrale $\prod_{i=1}^n d^2 z_i$ nicht direkt berechnen können, behilft man sich mit den folgenden zwei physikalisch-heuristischen Annahmen. Aufgrund unserer physikalischen Interpretation von U als der freien Energie eines Elektronen-Plasmas mit Quasi-Löchern, die wir wie Störstellen behandeln,

erweitern wir jetzt U um zwei weitere Terme zu einem $U_{ges} = U + U_4 + U_5$:
 - um die Wechselwirkung $U_4(\vec{\eta})$ zwischen den Quasi-Löchern, wie in 7.5.69, nur mit der Ladung $m = -1$, (Vorzeichen wegen der Löcher anstatt von Elektronen),
 - um die Wechselwirkung $U_5(\vec{\eta})$ zwischen den Quasi-Löchern und dem Plasma-Hintergrund, wie in 7.5.70, nur mit der Ladung $m = -1$:

$$U_4(\vec{\eta}) = \sum_{i < j=1}^M \log\left(\frac{|\eta_i - \eta_j|}{l_B}\right),$$

$$U_5(\vec{\eta}) = -\frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^M |\eta_i|^2.$$

$$U_{ges.}(\vec{z}, \vec{\eta}) = U_4(\vec{\eta}) + U_5(\vec{\eta}) \\ + U(\vec{z}, \vec{\eta}),$$

$$Z_{ges}(\vec{\eta}) = \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i e^{-\beta U_{ges}(\vec{z}, \vec{\eta})} \\ = e^{-\beta(U_4(\vec{\eta}) + U_5(\vec{\eta}))} \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i e^{-\beta U(\vec{z}, \vec{\eta})} \\ = e^{-\beta(U_4(\vec{\eta}) + U_5(\vec{\eta}))} Z.$$

Jetzt interpretieren wir unsere Quasi-Löcher als Störstellen im Plasma und dadurch ordnen sich die beweglichen Elektronen so um diese Störstellen an, daß sie die Ladung der Störstellen maximal abschirmen. Dieser Prozeß ist in Plasmen und Elektrolyten als Debye Abschirmung bekannt. Das Störstellenpotential fällt dann exponentiell mit e^{-r/λ_D} ab. Wir nehmen in unserer Näherung λ_D als entsprechend klein an, d.h. $\lambda_D \ll |\eta_i - \eta_j|$, woraus folgt, daß $Z_{ges}(\vec{\eta})$ nicht mehr wesentlich von den Positionen der Störstellen $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ abhängt. Also können wir $Z_{ges}(\vec{\eta}) = C = \text{const.}$ setzen.

$$Z_{ges}(\vec{\eta}) = \begin{cases} C \in \mathbb{R}, \\ e^{-\beta(U_4(\vec{\eta}) + U_5(\vec{\eta}))} Z. \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z = C e^{\beta(U_4(\vec{\eta}) + U_5(\vec{\eta}))} \\ = C \exp\left(\frac{2}{m} \left(\sum_{i < j=1}^M \log\left(\frac{|\eta_i - \eta_j|}{l_B}\right) - \frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^M |\eta_i|^2\right)\right) \\ = C \exp\left(\frac{1}{m} \sum_{i < j=1}^M \log\left(\frac{|\eta_i - \eta_j|^2}{l_B^2}\right) - \frac{1}{2ml_B^2} \sum_{i=1}^M |\eta_i|^2\right) \quad (7.5.74)$$

Das Plasma-Modell mit der Debye-Abschirmung der Quasi-Löcher an den Positionen η_i liefert uns nun einen analytischen Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte Z der Laughlin-Wellenfunktion mit Quasi-Loch-Anregungen und η_i . Jetzt kann man mit einem einzelnen η_i , wir nehmen hier o.B.d.A. η_1 , einen geschlossenen Weg ausführen und unter den Voraussetzungen des quantenmechanischen Adiabaten-Theorems (5.3.3) die Berry-Phase (5.3.4) berechnen.

Berry hat die die folgende 1-Form $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ (5.3.20) eingeführt, die sich wie eine lokale Zusammenhangsform transformiert, oder in der Sprache der Physiker, wie ein Eichpotential. Diese Zusammenhangsform führt zu der reellen Berry-Phase $\gamma_n(t)$ und dem entsprechenden Phasenfaktor $e^{i\gamma_n(T)}$ der Wellenfunktion:

$$\mathcal{A}(n, \vec{R}(t)) := \mathcal{A}_\mu dR^\mu := \langle n, \vec{R}(t) | d | n, \vec{R}(t) \rangle = \langle n, \vec{R}(t) | \frac{\partial}{\partial R^\mu} | n, \vec{R}(t) \rangle dR^\mu ,$$

$$\gamma_n(T) = i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(T)} \mathcal{A}(n, \vec{R}(t)) .$$

$\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ ist antihermitesch, also rein imaginär, und deshalb ist $\gamma_n(T)$ reell, denn:

$$\begin{aligned} 0 &= d \langle n, \vec{R}(t) | n, \vec{R}(t) \rangle = (d \langle n, \vec{R}(t) |) | n, \vec{R}(t) \rangle + \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) \\ &= \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle)^* + \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) \quad \Rightarrow \\ &\langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle)^* = - \langle n, \vec{R}(t) | (d | n, \vec{R}(t) \rangle) . \end{aligned}$$

Gelegentlich definieren Physiker, wie z.B. Tong (2016), S. 30 ff., $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ auch reell :-)

Diese Berry-Zusammenhangsform kann man jetzt für unseren Fall und für holomorphe Koordinaten verallgemeinern. Dabei gilt dann auch die Antihermitizität in einer verallgemeinerten Form.

Definition 7.5.18 Seien $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ und entsprechend $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_M)$. Sei weiter die Laughlin-Wellenfunktion mit Quasi-Loch-Anregungen an den Positionen η_i (7.5.62) gegeben, die wir mit der Normierung $Z \in \mathbb{R}$ (siehe 7.5.72, 7.5.73) auf die folgende Weise schreiben können:

$$Z = \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i \exp \left(m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B} \right) - \frac{m}{4l_B^2} \sum_{i=1}^n |z_i|^2 + m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M \log \left(\frac{|z_i - \eta_j|}{l_B} \right) \right)$$

und zugleich (7.5.74):

$$Z = C \exp \left(\frac{1}{m} \sum_{i < j=1}^M \log \left(\frac{|\eta_i - \eta_j|^2}{l_B^2} \right) - \frac{1}{2ml_B^2} \sum_{i=1}^M |\eta_i|^2 \right)$$

$$= C \exp \left(\frac{1}{m} \sum_{i < j=1}^M \log \left(\frac{(\eta_i - \eta_j)(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j)}{l_B^2} \right) - \frac{1}{2ml_B^2} \sum_{i=1}^M \eta_i \bar{\eta}_i \right). \quad (7.5.75)$$

Da dieses Z nur von den Variablen η_i und $\bar{\eta}_i$ abhängt verwenden wir es als Normierungsfaktor der Laughlin-Wellenfunktion mit Quasi-Loch-Anregungen an den Positionen η_i (7.5.62):

$$\begin{aligned} \psi_{m,M-\text{Löcher}}(\vec{z}, \vec{\bar{z}}, \vec{\eta}) &= \frac{1}{\sqrt{Z}} \langle \vec{z}, \vec{\bar{z}} | \vec{\eta} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z}} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^M |z_i - \eta_j| \prod_{1 \leq k < l \leq n} |z_k - z_l|^m e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|^2}{4l_B^2}}, \\ 1 &\stackrel{!}{=} \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i \psi_{m,M-\text{Löcher}}^*(\vec{z}, \vec{\bar{z}}, \vec{\eta}) \cdot \psi_{m,M-\text{Löcher}}(\vec{z}, \vec{\bar{z}}, \vec{\eta}) \\ &= \frac{1}{Z} \int \prod_{i=1}^n d^2 z_i \langle \vec{\eta} | \vec{z}, \vec{\bar{z}} \rangle \langle \vec{z}, \vec{\bar{z}} | \vec{\eta} \rangle = \frac{1}{Z} \langle \vec{\eta} | \vec{\eta} \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.76)$$

Damit können wir die folgende verkürzte Schreibweise einführen:

$$|\psi_{m,M-\text{Löcher}}\rangle := \frac{1}{\sqrt{Z}} | \vec{\eta} \rangle. \quad (7.5.77)$$

Für diese Laughlin-Wellenfunktion mit Quasi-Loch-Anregungen an den Positionen η_i kann man jetzt eine holomorphe Berry-Zusammenhangsform definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\eta(\eta, \bar{\eta}) &:= \mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) d\eta_i := \langle \psi_{m,M-\text{Löcher}} | d_{\eta_i} | \psi_{m,M-\text{Löcher}} \rangle \\ &= \langle \psi_{m,M-\text{Löcher}} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \psi_{m,M-\text{Löcher}} \rangle d\eta_i, \\ \mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) &= \langle \psi_{m,M-\text{Löcher}} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \psi_{m,M-\text{Löcher}} \rangle. \end{aligned} \quad (7.5.78)$$

Der entsprechende antiholomorphe Zusammenhang wird dann definiert als:

$$\mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta}) = \langle \psi_{m,M-\text{Löcher}} | \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_i} | \psi_{m,M-\text{Löcher}} \rangle. \quad (7.5.79)$$

Für die Antihermizität ergibt sich jetzt Folgendes:

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle \\ &= (d\langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} |) | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle + \langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} | (d | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle) \\ &= \langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} | (d | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle)^* + \langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} | (d | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle) . \end{aligned}$$

Jetzt ist aber im holomorphen Fall

$$d | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle d\eta_i + \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_i} | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle d\bar{\eta}_i$$

und damit folgt, daß nicht wie im reellen Fall $\mathcal{A}(n, \vec{R}(t))$ antihermitesch ist, sondern der Ausdruck

$$\mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta})d\eta_i + \mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta})d\bar{\eta}_i$$

ist antihermitesch und der Phasenfaktor γ ist wieder reell:

$$\gamma := i \left(\oint \mathcal{A}_{\eta_1}(\eta, \bar{\eta})d\eta_1 + \oint \mathcal{A}_{\bar{\eta}_1}(\eta, \bar{\eta})d\bar{\eta}_1 \right) .$$

Lemma 7.5.19 (Berry-Phase der Laughlin Wellenfunktion) Für die holomorphe Berry-Zusammenhangsform gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \eta_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \eta_i} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \left(\frac{1}{\eta_i - \eta_j} \right) - \frac{1}{4ml_B^2} \bar{\eta}_i . \end{aligned} \quad (7.5.80)$$

Mit $Z \in \mathbb{R}$ folgt für die antiholomorphe Berry-Zusammenhangsform $\mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta})$, daß diese gerade das konjugiert komplexe der holomorphen Berry-Zusammenhangsform $\mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta})$ ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \bar{\eta}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \bar{\eta}_i} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j} \right) - \frac{1}{4ml_B^2} \eta_i . \end{aligned} \quad (7.5.81)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) &= \langle \psi_{m,M\text{-Löcher}} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \psi_{m,M\text{-Löcher}} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{Z}} \vec{\eta} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \frac{1}{\sqrt{Z}} \vec{\eta} \rangle \\ &= \frac{1}{Z^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{Z^{3/2}} \frac{\partial Z}{\partial \eta_i} \langle \vec{\eta} | \vec{\eta} \rangle + \frac{1}{Z} \langle \vec{\eta} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \vec{\eta} \rangle = \frac{-1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \eta_i} + \frac{1}{Z} \langle \vec{\eta} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \vec{\eta} \rangle . \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial Z}{\partial \eta_i} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \langle \vec{\eta} | \vec{\eta} \rangle = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \int \prod_{j=1}^M d^2 \eta_j \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} = \int \prod_{j=1}^M d^2 \eta_j \vec{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_i} \vec{\eta} = \langle \vec{\eta} | \frac{\partial}{\partial \eta_i} | \vec{\eta} \rangle \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial \eta_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \eta_i}.$$

Mit Z aus 7.5.75 folgt:

$$\mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \frac{\frac{(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j)}{l_B^2}}{\frac{(\eta_i - \eta_j)(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j)}{l_B^2}} - \frac{1}{4ml_B^2} \bar{\eta}_i = \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \left(\frac{1}{\eta_i - \eta_j} \right) - \frac{1}{4ml_B^2} \bar{\eta}_i.$$

Für die antiholomorphe Berry-Zusammenhangsform folgt entsprechend:

$$\mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta}) = \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \frac{\frac{(\eta_i - \eta_j)}{l_B^2}}{\frac{(\eta_i - \eta_j)(\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j)}{l_B^2}} - \frac{1}{4ml_B^2} \eta_i = \frac{1}{2m} \sum_{i < j=1}^M \left(\frac{1}{\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j} \right) - \frac{1}{4ml_B^2} \eta_i. \quad \square$$

Jetzt kann man mit $\mathcal{A}_{\eta_i}(\eta, \bar{\eta})$ und $\mathcal{A}_{\bar{\eta}_i}(\eta, \bar{\eta})$ einen geschlossenen Weg D_η , bzw. $D_{\bar{\eta}}$, in der η -Ebene, bzw. $\bar{\eta}$ -Ebene, durchlaufen und nachschauen, was für eine Berry-Phase man erhält. Zunächst wählen wir für das Quasi-Loch an der Position η_1 , bzw. $\bar{\eta}_1$, einen Weg, der keine anderen Quasi-Löcher enthält. Infolgedessen hat der erste Term von $\mathcal{A}_{\eta_1}(\eta, \bar{\eta})$, bzw. von $\mathcal{A}_{\bar{\eta}_1}(\eta, \bar{\eta})$, keinen Pol und das geschlossene Wegintegral verschwindet. Als Integrationsweg wählen wir einen geschlossenen Kreis $\eta = re^{i\varphi}$, bzw. $\bar{\eta} = re^{-i\varphi}$, in der komplexen Ebene mit Radius r und einer umschlossenen Fläche $F = \pi r^2$. Die dadurch entstehende Größe $\Phi = BF$ ist gerade der magnetische Fluß durch die Fläche F . Wir erhalten also für den zweiten Term eine Phasenverschiebung γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &:= i \left(\oint_{D_\eta} \mathcal{A}_{\eta_1}(\eta, \bar{\eta}) d\eta_1 + \oint_{D_{\bar{\eta}}} \mathcal{A}_{\bar{\eta}_1}(\eta, \bar{\eta}) d\bar{\eta}_1 \right) \\ &= -\frac{1}{4m} i \left(\oint_{D_\eta} \frac{\bar{\eta}_1}{l_B^2} d\eta_1 + \oint_{D_{\bar{\eta}}} \frac{\eta_1}{l_B^2} d\bar{\eta}_1 \right) = -\frac{eB}{4m\hbar} i \left(\oint_{D_\eta} \bar{\eta}_1 d\eta_1 + \oint_{D_{\bar{\eta}}} \eta_1 d\bar{\eta}_1 \right) \\ &= -\frac{eB}{4m\hbar} i \left(\int_0^{2\pi} re^{-i\varphi} ire^{i\varphi} d\varphi + \int_{2\pi}^0 re^{i\varphi} (-i) re^{-i\varphi} d\varphi \right) = \frac{eB}{4m\hbar} 4\pi r^2 = \frac{eBF}{m\hbar} = \frac{e\Phi}{m\hbar}. \end{aligned} \quad (7.5.82)$$

Dies ist nun gerade die Aharonov-Bohm Phasenverschiebung (5.2.12) $\gamma = \frac{e}{\hbar} \Phi$, allerdings mit einer effektiven Ladung

$$e^* = \frac{e}{m}. \quad (7.5.83)$$

In einem nächsten Schritt wählen wir für das Quasi-Loch an der Position η_1 , bzw. $\bar{\eta}_1$, einen Weg, der ein zweites Quasi-Loch an der Position η_2 umrundet. Diesmal müssen beide Terme von 7.5.80 und 7.5.81 berücksichtigt werden. Der zweite Term gibt wieder die Aharonov-Bohm Phase γ_2 . Und für den ersten Term von $\mathcal{A}_{\eta_1}(\eta, \bar{\eta})$, bzw. von $\mathcal{A}_{\bar{\eta}_1}(\eta, \bar{\eta})$, können wir den Residuensatz der Funktionentheorie anwenden und erhalten

$$\gamma_1 := \frac{1}{2m} i \left(\oint_{D_{\eta_1}} \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} d\eta_1 + \frac{1}{2m} \oint_{D_{\bar{\eta}_1}} \frac{1}{\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2} d\bar{\eta}_1 \right) = \frac{1}{2m} i (2\pi i + 2\pi i) = -\frac{2\pi}{m}. \quad (7.5.84)$$

Für eine 360° Umrundung des Quasi-Lochs an der Position η_1 um das Quasi-Loch an der Position η_2 erhalten wir eine Phasenänderung der Wellenfunktion von $\frac{2\pi}{m}$, für eine halbe Umrundung, d.h. 180° , erhalten wir also eine Phasenänderung der Wellenfunktion von $\frac{\pi}{m}$. Eine halbe Umrundung entspricht aber zugleich einem Tausch der Quasi-Teilchen an den Positionen η_1 und η_2 . Wenn diese beiden Quasi-Teilchen Fermionen wären, dann würde für die 2-Teilchen-Wellenfunktion gelten:

$$\psi(r_1, r_2) = -\psi(r_2, r_1) = e^{i\pi} \psi(r_2, r_1).$$

Stattdessen haben wir aber

$$\psi(\eta_1, \eta_2) = e^{i\frac{\pi}{m}} \psi(\eta_2, \eta_1). \quad (7.5.85)$$

Wenn das tiefste Landau-Niveau komplett gefüllt ist, dann ist $m = 1$ und unsere Quasi-Löcher verhalten sich wie richtige Fermionen. Beim fraktionalen Quanten-Hall-Effekt mit nur teilweiser Füllung des tiefsten Landau-Niveaus und daraus folgend Drehimpuls-Werten $m > 1$ taucht eine fraktionale Statistik auf, es liegen also Anyonen vor. Deshalb transformieren sich die Wellenfunktionen im 2-Dimensionalen also nach Darstellungen der Zopfgruppe 7.3.

7.6 Topologische Entartung des Grundzustands

Gegeben sei wieder ein 2-dimensionaler Nichtleiter-Kristalls mit periodischen Randbedingungen. Ein Rechteck mit periodischen Randbedingungen ist topologisch einem 2-dim. Torus äquivalent. Nichtleiter bedeutet hier, daß es eine Bandlücke zwischen den vollständig besetzten Valenzbändern und den leeren Leitungsbändern geben möge und daß die Fermienergie E_F in dieser Bandlücke liege. Eine bemerkenswerte Eigenschaft des fraktionalen Quanten-Hall-Effektes ist es nun, daß auf kompakten 2-dim. Mannigfaltigkeiten der Grundzustand von der Topologie der Mannigfaltigkeit abhängt.

Die Entartung des Grundzustandes beim fraktionalen Quanten-Hall-Effekt als Funktion der Topologie der Mannigfaltigkeit kann man verstehen, wenn man die folgende Operator-Algebra an einem einfachen 2-dim. Torus untersucht. Am 2-Torus gibt es zwei topologisch verschiedene Zyklen. Diese Zyklen mögen die unitären Darstellungen T_1 und T_2 haben, welche den Hamilton-Operator unverändert lassen. Jetzt konstruiert man den folgenden Prozeß:

- Erzeugung eines Anyon-Antianyon-Paares im Grundzustand, Verschiebung des Anyons entlang des Zyklus-1 um 360° , beschrieben durch T_1 , danach Vernichtung des Anyon-Antianyon-Paares,
- Erzeugung eines neuen Anyon-Antianyon-Paares im Grundzustand, Verschiebung des Anyons entlang des Zyklus-2 um 360° , beschrieben durch T_2 , danach Vernichtung des Anyon-Antianyon-Paares,
- Erzeugung eines neuen Anyon-Antianyon-Paares im Grundzustand, Verschiebung des Anyons entlang des Zyklus-1 um -360° , beschrieben durch T_1^{-1} , danach Vernichtung des Anyon-Antianyon-Paares,
- Erzeugung eines neuen Anyon-Antianyon-Paares im Grundzustand, Verschiebung des Anyons entlang des Zyklus-2 um -360° , beschrieben durch T_2^{-1} , danach Vernichtung des Anyon-Antianyon-Paares.

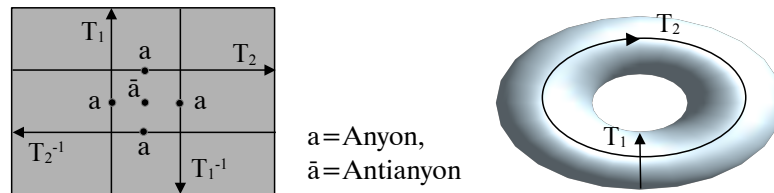


Abbildung 7.4: Anyon-Antianyon-Operatoralgebra auf einem 2-dim. Torus

Dieser Prozeß bedeutet, daß ein Anyon einmal um 360° um ein Antianyon gekreist ist. Hierbei ist das Antianyon natürlich auch ein 'Anyon' und wir gehen davon aus, daß Anyon und Antianyon physikalisch jeweils durch ein Quasi-Loch realisiert seien. Dann erhalten wir für die Umkreisung eines Quasi-Lochs durch ein anderes Quasi-Loch im Uhrzeigersinn mit 7.5.84 den Phasenfaktor $e^{2\pi i/m}$, mit $\nu = \frac{1}{m}$ dem Füllungsfaktor des Grundzustands, d.h. des tiefsten Landau-Niveaus.

$$T_1 T_2 T_1^{-1} T_2^{-1} = e^{2\pi i/m} \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad T_1 T_2 = T_2 T_1 e^{2\pi i/m} . \quad (7.6.1)$$

Eine solche Operator-Algebra kann auf einem eindimensionalen, d.h. nicht entarteten, Grundzustand nicht realisiert werden, denn:

$$T_1 \text{ unitär} \quad \Rightarrow \quad \text{Eigenwerte von } T_1 \text{ sind } e^{i\alpha}, \quad \alpha \in [0, 2\pi[.$$

Sei nun $|\alpha\rangle$ ein Eigenvektor von T_1 zum Eigenwert $e^{i\alpha}$, dann folgt $T_1|\alpha\rangle = e^{i\alpha}|\alpha\rangle$, und daraus folgt

$$T_1 T_2 |\alpha\rangle = e^{2\pi i/m} T_2 T_1 |\alpha\rangle = e^{2\pi i/m} e^{i\alpha} T_2 |\alpha\rangle ,$$

$$T_1 T_2 T_2 |\alpha\rangle = e^{2\pi i/m} T_2 T_1 T_2 |\alpha\rangle = e^{2\pi i/m} T_2 e^{2\pi i/m} e^{i\alpha} T_2 |\alpha\rangle = e^{2\pi i \frac{2}{m}} e^{i\alpha} T_2 T_2 |\alpha\rangle . \quad (7.6.2)$$

Daraus folgt, daß T_1 mindestens die n verschiedenen Eigenwerte $e^{2\pi i \frac{n}{m}} e^{i\alpha}$ mit $n \in [0, 1, \dots, m-1]$ hat. Da T_1 und T_2 mit dem Hamilton-Operator kommutieren führt

ihre Anwendung auf den Grundzustand des Hamilton-Operators nicht aus dem Grundzustand heraus. Also ist das tiefste Landau-Niveau mindestens m -fach entartet.

Interessant in diesem Zusammenhang ist, daß wir bei der theoretischen Beschreibung des integralen Quanten-Hall-Effektes mittels der TKNN-Konstruktion von vollständig besetzten Valenzbändern ausgegangen sind, d.h. in jenem Fall lag also immer $m = 1$ mit $n = 0$ vor, und der Grundzustand war eindimensional.

Und natürlich kann man dieses Ergebnis sofort auf 2-dim. kompakte Oberflächen mit dem Geschlecht g , d.h. der Anzahl der 'Löcher' (siehe 13.0.6), verallgemeinern. Für jedes 'Loch' kann man Operatoren analog zu T_1 und T_2 einführen und erhält so als Entartung des Grundzustands m^g .

7.7 Verallgemeinerte Anyonen-Modelle

7.7.1 Formalismus verallgemeinerter Anyonen-Modelle

Wie wir in den vorangegangenen Kapiteln gelernt haben, sind Anyonen Quasiteilchen aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung in 2-dimensionalen Systemen. Sie unterscheiden sich von anderen Teilchen und Quasiteilchen der Festkörperphysik durch ihre fraktionale Statistik und ihre topologisch fixierten Quasiladungen. Diese Quasiladungen sind delokalisiert, da die Anyonen ja das Resultat eines Vielteilcheneffektes sind.

Die topologische Stabilisierung der Quasiteilchen-Zustände wirkt der der quantenmechanischen Dekohärenz entgegen und ermöglicht dadurch den Aufbau von Quantencomputern.

Anstatt jetzt die vielfältigen aktuellen experimentellen physikalischen Ansätze zu diskutieren wollen wir hier ein mathematisches verallgemeinertes Anyonen-Modell vorstellen. Dabei folgen wir Tong (2016), S. 131 ff. (4.3 The Theory of Non-Abelian Anyons) und Preskill (1998), Kap. 9, S. 40 ff. (9.12 Anyon models generalized).

Dieses verallgemeinerte Anyonen-Modell setzt voraus, daß der betrachtete 2-dimensionale Festkörper eine Bandlücke hat und daß es keine langreichweitigen Wechselwirkungen, vermittelt durch masselosen Teilchen gibt, welche die topologische Erhaltung der Quasiladungen der Anyonen stören könnten.

Das Modell wird definiert durch die folgenden 3 Eigenschaften:

- es gibt eine endliche Anzahl verschiedener Anyonen-Typen mit unterschiedlichen Quasiladungen,
- es gibt Regeln zur Fusion und zur Spaltung von Anyonen,
- es gibt Zopfgregeln, die festlegen, was bei einer Vertauschung von Anyonen geschieht.

Wir bezeichnen die verschiedenen Anyonen-Typen des Modell mit den lateinischen Buchstaben $A := \{a, b, c, \dots\}$. Zusätzlich gebe es noch ein 'neutrales' Element, das mit 1 bezeichnet werde und einen Zustand ohne jedes Anyon beschreibe.

Je zwei Anyonen mit ihren entsprechenden Quasiladungen, hier als a und b bezeichnet, können miteinander zu einem anderen Anyon, hier c genannt, fusionieren. Dies wird ausgedrückt durch die folgende Schreibweise, die allerdings noch erklärungsbedürftig ist:

$$a \star b := \sum_c N_{ab}^c c, \quad \text{mit } N_{ab}^c \in \mathbb{N}. \quad (7.7.1)$$

$$a \star b = b \star a \quad \Rightarrow \quad N_{ab}^c = N_{ba}^c. \quad (7.7.2)$$

Der Ausdruck $a \star b$ bezeichne die Fusion von a und b in ein Objekt c mit dessen entsprechender Quasiladung. Und der Ausdruck $\sum_c N_{ab}^c c$ ist keine direkte Summe, sondern bezeichnet die Möglichkeiten, ob und wie das Anyon c aus der Fusion von a und b entstehen kann. Dabei läuft c über die ganze Menge der Anyon-Typen A . Kurz gesagt, wird jedem Tripel $(a, b; c)$ ein N_{ab}^c zugeordnet.

$$N_{ab}^c := \begin{cases} 0 & c \text{ kann nicht aus } a \star b \text{ entstehen,} \\ 1 & c \text{ kann auf eindeutige Weise aus } a \star b \text{ entstehen,} \\ \geq 2 & c \text{ kann auf } N_{ab}^c \text{ verschiedene Weisen aus } a \star b \text{ entstehen.} \end{cases} \quad (7.7.3)$$

Aus diesen $N_{ab}^c \in \mathbb{N}$ können wir jetzt einen endlichen Hilbert-Raums V_{ab}^c konstruieren, den sog. Fusions-Raum, indem wir als Basisvektoren die folgenden Elemente wählen:

$$V_{ab}^c = \text{lineare Hülle}\{|ab; c, \mu\rangle, \quad \mu = 1, 2, \dots, N_{ab}^c\}. \quad (7.7.4)$$

Der duale Hilbert-Raum V_c^{ab} wird entsprechend definiert als

$$V_c^{ab} = \text{lineare Hülle}\{\langle ab; c, \mu|, \quad \mu = 1, 2, \dots, N_c^{ab}\}. \quad (7.7.5)$$

Auf diese Weise ist gerade $\dim(V_{ab}^c) = N_{ab}^c$. Wenn $\dim(\oplus_c V_{ab}^c) = \sum_c N_{ab}^c \geq 2$ ist spricht man von einem nichtabelschen Anyonen-Modell.

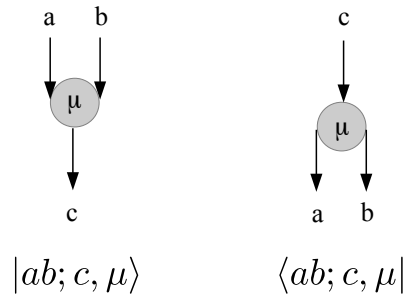


Abbildung 7.5: Fusions-Raum Basiszustände

Da die Fusionsräume V_{ab}^c und der duale Raum V_c^{ab} als Hilbert-Räume konstruiert sind gilt für die Basiszustände:

$$\langle ab; c\mu | ab, c'\mu' \rangle = \delta_c^{c'} \delta_\mu^{\mu'} , \quad \sum_{c,\mu} | ab, c\mu \rangle \langle ab; c\mu | = \mathbb{1}_{ab} , \quad (7.7.6)$$

wobei $\mathbb{1}_{ab}$ der Projektor auf den Raum \mathcal{H}_{ab}

$$\mathcal{H}_{ab} := \oplus_c V_{ab}^c , \quad (7.7.7)$$

den vollständigen Hilbert-Raum des Anyonen-Paares ab ist. Damit ist die Dimension dieses vollständigen Hilbert-Raums

$$\dim(\mathcal{H}_{ab}) = \sum_c N_{ab}^c . \quad (7.7.8)$$

Wenn man nun n Anyonen a_1, \dots, a_n nacheinander miteinander fusioniert, so ergibt sich als Dimension

$$\dim(\mathcal{H}_{a_1 \dots a_n}) = \sum_{b_1 \dots b_{n-2}} N_{a_1 a_2}^{b_1} N_{b_1 a_3}^{b_2} \dots N_{b_{n-2} a_n}^{b_{n-1}} . \quad (7.7.9)$$

Wenn nun n gleiche Anyonen des Typs a miteinander fusioniert werden, so schreibt man

$$\dim(\mathcal{H}_a^{(n)}) := \dim(\mathcal{H}_{a \dots a}) = \sum_{b_1 \dots b_{n-2}} N_{aa}^{b_1} N_{ab_1}^{b_2} \dots N_{ab_{n-2}}^{b_{n-1}} . \quad (7.7.10)$$

Wenn man jetzt N_{ab}^c als die (c, b) -Komponenten einer Matrix N_a betrachtet, dann ist obige Ausdruck gerade die n -te Potenz der Matrix N_a . Dies kann man folgendermaßen schreiben:

$$\dim(\mathcal{H}_a^{(n)}) = \sum_b [N_a]_{ab}^n . \quad (7.7.11)$$

Da alle Elemente von N_a entweder 0 oder größer gleich 1 sind folgt, daß im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ das Matrizenprodukt vom größten Eigenwert der Matrix N_a dominiert wird. Diesen Eigenwert nennen wir die Quantendimension d_a und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dim(\mathcal{H}_a^{(n)}) = \sum_b \lim_{n \rightarrow \infty} [N_a]_{ab}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_a^n \stackrel{\text{def}}{=} d_a . \quad (7.7.12)$$

Die Quantendimension des Vakuum-Anyons $a = 1$ ist 1, aber die Quantendimension anderer Anyonen ist typischerweise keine natürliche Zahl. Dies spiegelt die Tatsache wider, daß die Freiheitsgrade eines Anyonen-Ensembles nichtlokalisierete kollektive Freiheitsgrade sind.

Der zu diesem größten Eigenwert d_a von N_a zugehörige Eigenvektor sei \vec{e} und damit gilt:

$$N_a \vec{e} = d_a \vec{e} \quad \text{bzw.} \quad \sum_c [N_a]_b^c (\vec{e})_c = d_a (\vec{e})_b . \quad (7.7.13)$$

Wegen der Symmetrie $N_{ab}^c = N_{ba}^c$ muß also gelten $(\vec{e})_b = d_b$ und daraus folgt für die Quantendimensionen:

$$\sum_c [N_a]_b^c d_c = d_a d_b . \quad (7.7.14)$$

Es gibt nun einige natürliche Isomorphismen zwischen den Fusions-Räumen. Wenn man eine Ladungskonjugation C einführt mit $C : a \rightarrow \bar{a}$ und $C^2 = \mathbb{1}$, dann kann man das Heben und Senken der Indizes von V_{ab}^c folgendermaßen definieren:

$$V_{ab}^c \simeq V_{a\bar{c}}^{\bar{b}} \simeq V_{ab\bar{c}}^1 \simeq V_a^{\bar{b}c} \simeq V_{\bar{c}}^{\bar{a}b} \simeq \dots . \quad (7.7.15)$$

In der graphischen Darstellung dreht man beim Übergang von a zu \bar{a} die Richtung des Pfeils um.

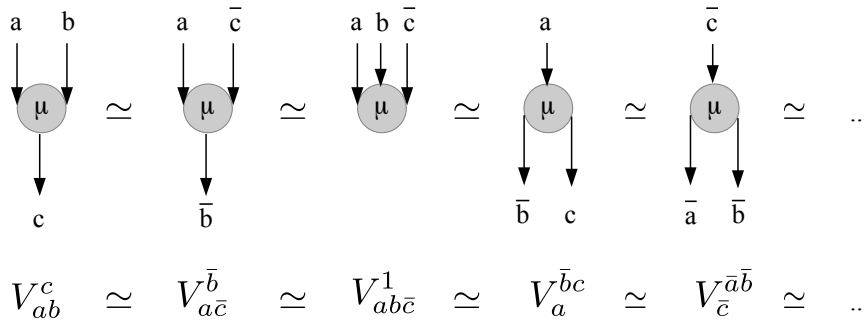


Abbildung 7.6: Fusions-Raum Isomorphismen

Für das 'neutrales' Element 1 mit $a \star 1 = a$ folgt daraus

$$V_{a1}^a \simeq V_1^{a\bar{a}} , \quad (7.7.16)$$

und das bedeutet, daß wenn aus dem Vakuum heraus Anyonen entstehen, diese nur als Anyonen-Paare mit konjugierten Ladungen auftreten können.

Wenn die beiden Anyonen a und b mittels einer halben Drehung ihre Position vertauschen, dann ändert sich die Quasiladung des Fusion-Anyons c nicht. Zwar ist $N_{ab}^c = N_{ba}^c$ und daraus folgt, daß die Räume V_{ab}^c und V_{ba}^c isomorph sein müssen, aber da wir mit dem Formalismus auch Zopf-Verdrehungen beschreiben wollen, konstruieren wir als natürlichen Isomorphismus der a mit b vertauscht ein Element einer linearen Darstellung der Zopfgruppe B_3 . Die beiden Generatoren von B_3 seien σ_1 und σ_2 . Der Generator σ_1

operiert auf Strang 1 und Strang 2 des 3-Strang-Zopfes, der Generator σ_2 auf Strang 2 und Strang 3. Die entsprechenden unitären Darstellungen dieser Generatoren seien $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$.

$$R : V_{ab}^c \rightarrow V_{ba}^c . \tag{7.7.17}$$

Wir wählen für R eine unitäre N_{ab}^c -dimensionale Darstellung der Zopfgruppe B_3 :

$$R : | ab; c\mu \rangle \rightarrow | ba; c\mu \rangle = \sum_{\mu'} (R_{ba}^c)_{\mu}^{\mu'} | ab; c\mu' \rangle . \tag{7.7.18}$$

Die Reihenfolge der unteren Indizes von $(R_{ba}^c)_{\mu}^{\mu'}$, hier also ba , zeigt die Reihenfolge der Anyonen in der Zielstruktur.

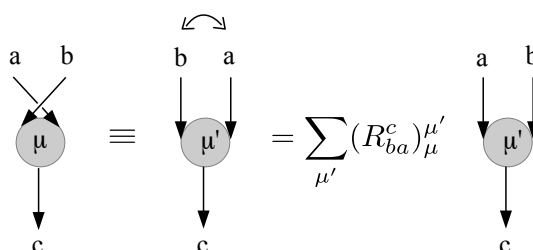


Abbildung 7.7: Zopf-Operation an einem Anyon

Die hier eingeführten Fusionsregeln sollen nun aus physikalischen Gründen auch assoziativ sein, denn die Quasiladungen hängen ja nicht davon ab, ob wir erst a mit b und das Ergebnis mit c fusionieren, oder eine andere Reihenfolge wählen. Diese Assoziativität erlaubt nun wichtige Umformungen der Produkte von Fusionsräumen, die durch unitäre Matrizen F_{abc}^d realisiert werden.

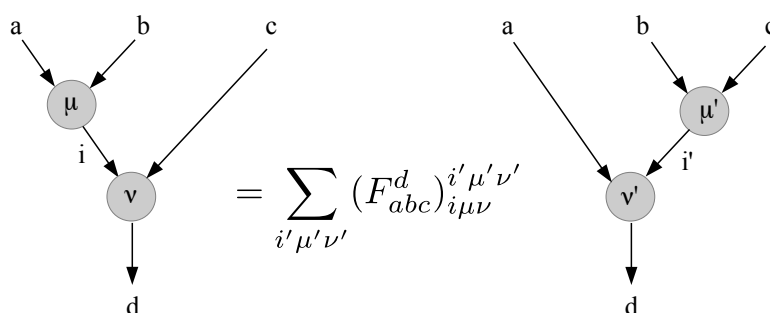


Abbildung 7.8: Assoziativität der Fusionen: F-Matrix

Die Reihenfolge der unteren Indizes von $(F_{abc}^d)_{i\mu\nu}^{i'\mu'\nu'}$, hier also abc , zeigt die Reihenfolge der assoziativen Anyonen-Fusionen bei dieser Transformation, d.h. $(a \star b) \star c \rightarrow a \star (b \star c)$.

Neben der unitären Darstellung R ist auch die unitäre Darstellung $B := F R F^{-1} = F R F^\dagger$ wichtig. Wir sehen aus der folgenden Abbildung, daß wir $\bar{\sigma}_1 = R$ und $\bar{\sigma}_2 = B$ wählen können, denn R vertauscht Strang 1 mit Strang 2 eines 3-Strang-Zopfes und B Strang 2 mit Strang 3.

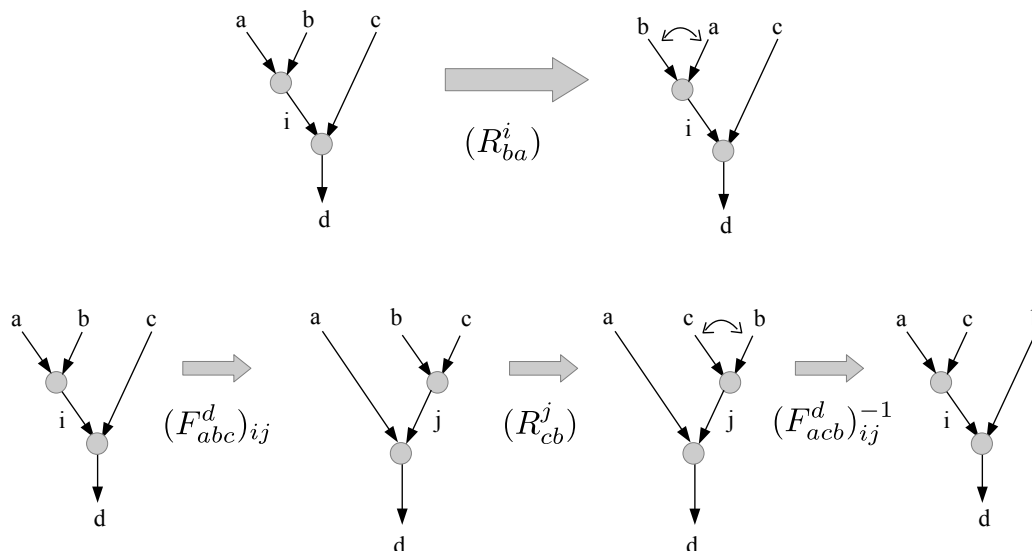


Abbildung 7.9: R und B als Darstellungen von σ_1 und σ_2 der Zopfgruppe B_3

Jetzt stellt sich die nicht triviale Frage, ob alle unitären Matrizen F^d_{abc} und R^c_{ba} untereinander und miteinander kompatibel sind. Genauer formuliert bedeutet diese Kompatibilitätsfrage:

seien zwei beliebige n -Anyonenbasen für einen Anfangs- und einen Endzustand gegeben und zwischen diesen Zuständen verschiedene Wege von Transformationen mit F - und R -Matrizen, sind dann alle diese Wege isomorph?

Moore und Seiberg (Moore u. Seiberg (1989)) haben im Rahmen von Untersuchungen von $(1+1)$ -dimensionalen konformen Feldtheorien gezeigt, daß diese Kompatibilität genau dann besteht, wenn die beiden folgenden Diagramme erfüllt sind, das Pentagon-Diagramm der F -Matrizen und das Hexagon-Diagramm der F - und R -Matrizen.

Wenn man sich diese Matrix-Diagramme als Gleichungen der entsprechenden Matrixelemente hinschreibt, dann resultieren daraus Polynomgleichungen, die alle gleichzeitig erfüllt sein müssen. Dies sind die sog. Moore-Seiberg-Polynom-Gleichungen.

Man kann also bei der Konstruktion eines neuen Anyonen-Modells so vorgehen, daß man zunächst eine endliche Anzahl verschiedener Anyonen-Typen mit unterschiedlichen Quasiladungen definiert, dann eine Fusionregel definiert und dann versucht die Polynomgleichungen der F - und R -Matrizen zu lösen. Wenn diese Polynomgleichungen keine Lösung haben, dann muß die angenommene Fusionsregel verworfen werden. Im Falle von einer oder mehrerer Lösungen ergibt jede Lösung eine gültige Fusionsregel.

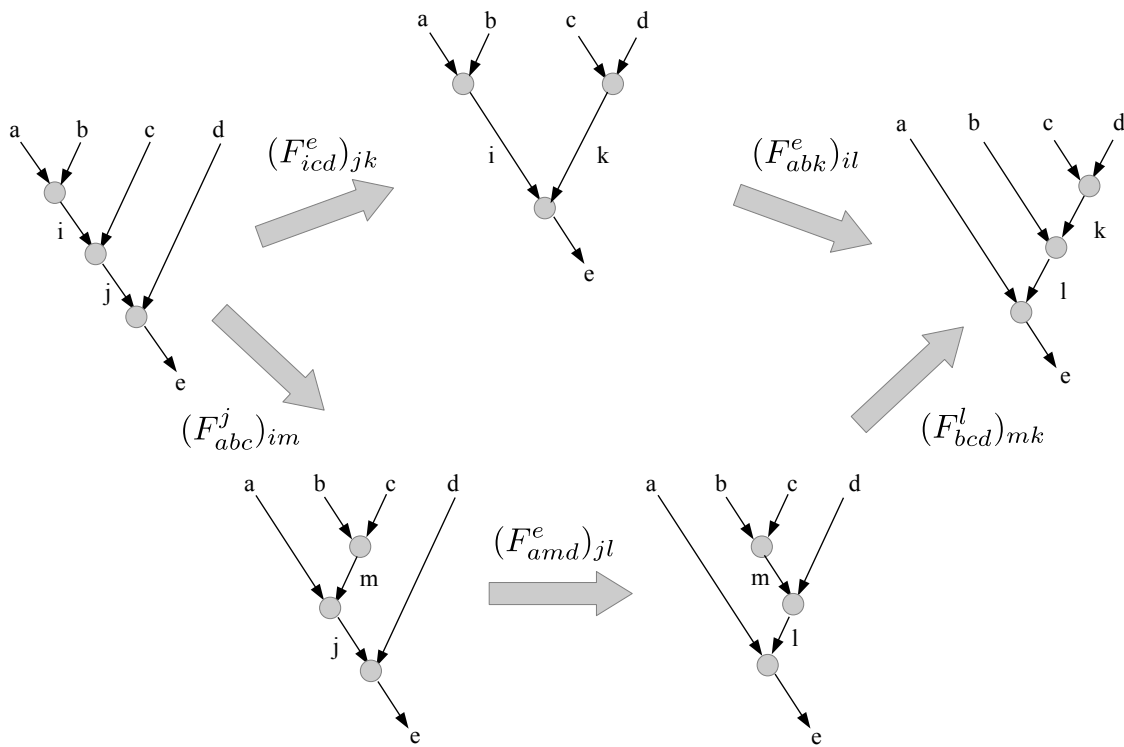


Abbildung 7.10: Pentagon-Diagramm der F-Matrizen

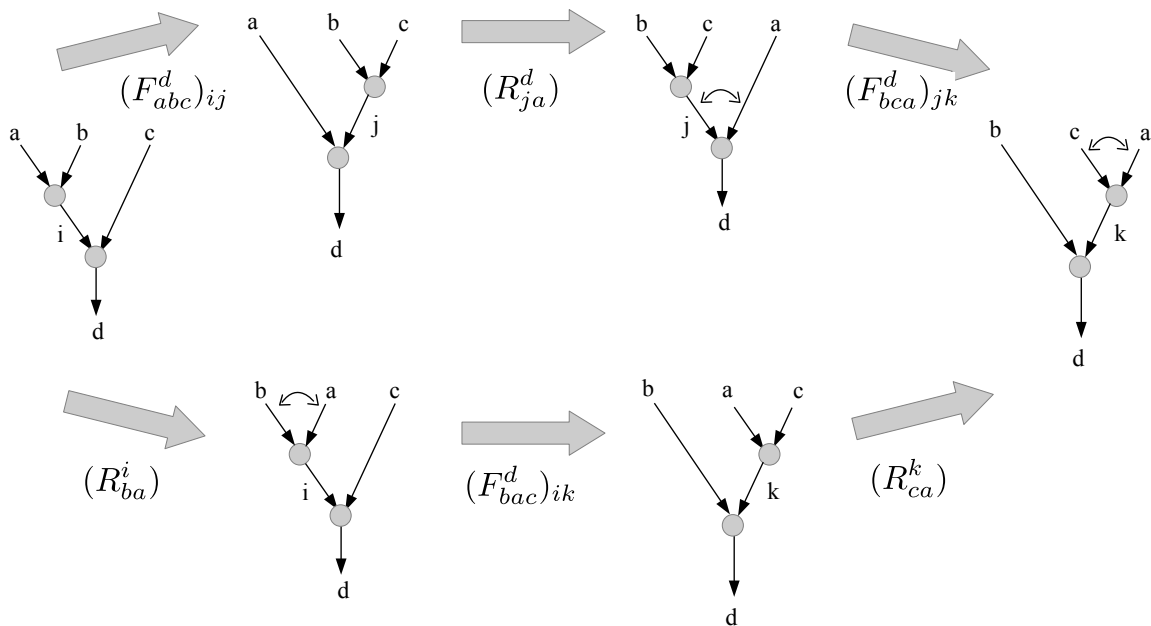


Abbildung 7.11: Hexagon-Diagramm der F- und R-Matrizen

Die Bedingungen des Pentagon-Diagramms kann man auch formelmäßig ausdrücken:

$$(F_{abk}^e)_{il}(F_{icd}^e)_{jk} = \sum_m (F_{bcd}^l)_{mk}(F_{amd}^e)_{jl}(F_{abc}^j)_{im} . \quad (7.7.19)$$

Und entsprechend gilt für das Hexagon-Diagramm:

$$R_{ca}^k(F_{bac}^d)_{ik}R_{ba}^i = \sum_j (F_{bca}^d)_{jk}R_{ja}^d(F_{abc}^d)_{ij} . \quad (7.7.20)$$

Allerdings benötigt ein Quantencomputer jetzt nicht ein oder zwei Anyonen für seine Rechnungen, sondern **sehr** viele Anyonen. Wir stellen uns jetzt n Anyonen mit einer Gesamt-Quasiladung c vor, die sequentiell auf einer Linie angeordnet seien.

Definition 7.7.1 Den topologischen Hilbertraum von n Anyonen kann man jetzt direkte Summe über die Produkte der topologischen Hilberträume der einzelnen Anyonen mit einer Gesamtladung c konstruieren:

$$V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c := \bigoplus_{b_1, b_2, \dots, b_{n-2}} V_{a_1 a_2}^{b_1} \otimes V_{b_1 a_3}^{b_2} \otimes V_{b_2 a_4}^{b_3} \otimes \dots \otimes V_{b_{n-2} a_n}^c .$$

$V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$ ist eine direkte Summe über die $(n-1)$ Produkte von Anyonen-Einzelräumen $V_{b_i a_{i+2}}^{b_{i+1}}$ und damit nicht darstellbar als direktes Produkt lokalisierbarer Anyon-Zustände. Dies drückt die quantenmechanische Delokalisation der n Anyonen aus.

Die Dimension von des Fusions-Raums $V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$ ist also

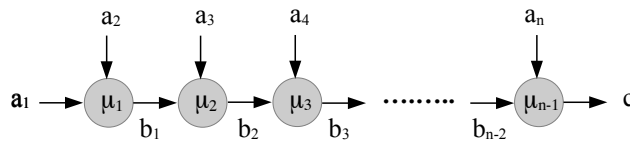
$$\dim(V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c) = \sum_{b_1 b_2 \dots b_{n-2}} N_{a_1 a_2}^{b_1} N_{b_1 a_3}^{b_2} \dots N_{b_{n-2} a_n}^c$$

und sie wächst exponentiell mit n - was ja für die Anwendung in Quantencomputern sehr erwünscht ist.

Basiszustände in $V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$ kann man z.B. konstruieren als:

$$\{ |a_1 a_2; b_1, \mu_1\rangle |b_1 a_3; b_2, \mu_2\rangle \dots |b_{n-3} a_{n-1}; b_{n-2}, \mu_{n-2}\rangle |b_{n-2} a_n; c, \mu_{n-1}\rangle \} ,$$

oder graphisch:



$$V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c \simeq \bigoplus_{b_1 b_2 \dots b_{n-2}} V_{a_1 a_2}^{b_1} \otimes V_{b_1 a_3}^{b_2} \otimes \dots \otimes V_{b_{n-2} a_n}^c$$

Abbildung 7.12: Basis im Hilbert-Raum $V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$ von n fusionierten Anyonen

Bislang hatten wir nur die unitäre Darstellung der Zopfgruppe $(R_{ab}^c)_\mu^{\mu'}$ auf einem Raum V_{ab}^c untersucht. Jetzt suchen wir eine unitäre Darstellung der Zopfgruppe, die auf $V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$ operiert. Dazu wenden wir also $\bar{\sigma}_1 = R$ auf die Stränge a_i und a_{i+1} und $\bar{\sigma}_2 = B$ auf die Stränge a_{i+1} und a_{i+2} an.

R operiert also auf dem topologischen Raum

$$V_{b_{i-2}, a_i, a_{i+1}}^{b_i} := \bigoplus_{b_{i-1}} V_{b_{i-2}, a_i}^{b_{i-1}} \otimes V_{b_{i-1}, a_{i+1}}^{b_i} .$$

Und B operiert auf dem topologischen Raum

$$V_{b_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}}^{b_{i+1}} := \bigoplus_{b_i} V_{b_{i-1}, a_{i+1}}^{b_i} \otimes V_{b_i, a_{i+2}}^{b_{i+1}} .$$

In der folgenden Grafik seien: $a := b_{i-1}$, $b := a_{i+1}$, $e := b_i$, $c := a_{i+2}$, $d := b_{i+1}$.

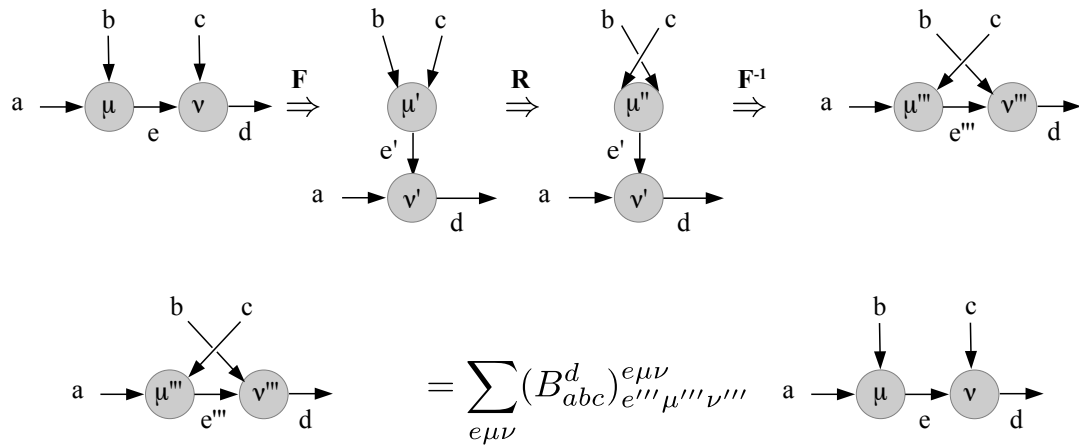


Abbildung 7.13: Darstellung von $\bar{\sigma}_2 = B$ auf dem Fusions-Raum $V_{b_{i-1}, a_{i+1}, a_{i+2}}^{b_{i+1}} \subset V_{a_1 a_2 \dots a_n}^c$

7.7.2 Beispiel: Fibonacci-Anyonen

Das Fibonacci-Anyonen Modell ist das einfachste allgemeine Anyonen-Modell und eignet sich daher aus didaktischen Gründen sehr schön zur Veranschaulichung des allgemeinen Formalismus. Wir folgen wieder Tong (2016), S. 134 ff. und der ausführlicheren Arbeit von Trebst u. a. (2008).

Das Fibonacci-Anyonen Modell enthält nur den Vakuum-Zustand 1 und einen einzigen Anyonen-Zustand τ , zusammen mit diesen Fusions-Regeln:

$$\begin{aligned} 1 \star \tau &= \tau \star 1 = \tau , \\ \tau \star \tau &= 1 \oplus \tau . \end{aligned} \tag{7.7.21}$$

Lemma 7.7.2 Für die Dimensionen der topologischen Hilberträume $\mathcal{H}_\tau^{(n)} = \mathcal{H}_{\tau\dots\tau}$ gilt:

$$\dim(\mathcal{H}_\tau^{(1)}) = 1, \dim(\mathcal{H}_\tau^{(2)}) = 2, \quad \text{aufgrund der Definition.} \quad (7.7.22)$$

$$\dim(\mathcal{H}_\tau^{(n+1)}) = \dim(\mathcal{H}_\tau^{(n)}) + \dim(\mathcal{H}_\tau^{(n-1)}) . \quad (7.7.23)$$

Dies ist gerade die Definition der Folge der Fibonacci-Zahlen f_n , die folgendermaßen beginnen $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, siehe Wikipedia-Fibonacci (2022).

Beweis: Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau^{(1)} &= \tau, \quad \mathcal{H}_\tau^{(2)} = 1 \oplus \tau \quad \Rightarrow \\ \mathcal{H}_\tau^{(3)} &= \tau[1 \oplus \tau] = \tau \oplus (1 \oplus \tau) = 1 \oplus \tau \oplus \tau \quad \Rightarrow \\ \mathcal{H}_\tau^{(3)} &= \mathcal{H}_\tau^{(2)} + \mathcal{H}_\tau^{(1)}. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: die Behauptung gelte für $\mathcal{H}_\tau^{(n)}$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\tau^{(n)} &= \mathcal{H}_\tau^{(n-1)} \oplus \mathcal{H}_\tau^{(n-2)} = \tau\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} \oplus \mathcal{H}_\tau^{(n-2)} = (1 \oplus \tau)\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} \quad \Rightarrow \\ \mathcal{H}_\tau^{(n+1)} &= \tau(1 \oplus \tau)\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} = (\tau \oplus (1 \oplus \tau))\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} \\ &= \tau\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} \oplus (1 \oplus \tau)\mathcal{H}_\tau^{(n-2)} = \mathcal{H}_\tau^{(n-1)} \oplus \mathcal{H}_\tau^{(n)}. \quad \square \end{aligned}$$

Sei $\vec{e} = (1, \tau)^T$ ein Basisvektor im Raum V_{ab}^c , dann ergibt sich für die Matrix N_τ aus den Fusionsregeln:

$$N_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.7.24)$$

Die Quantendimension d_τ ist dann der größte Eigenwert von N_τ und dieser ergibt sich zu

$$\begin{aligned} -d_\tau(1 - d_\tau) - 1 &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad d_\tau^2 - d_\tau - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \\ d_{\tau\pm} &= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \quad \Rightarrow \quad d_\tau = d_{\tau+} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618034. \quad (7.7.25) \end{aligned}$$

Diese Zahl $d_\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618034$ ist gerade der sog. *Goldene Schnitt*. Diese Zahl wurde schon in der Antike definiert und ist wirklich in vielerlei Beziehungen außerordentlich interessant, siehe Wikipedia-Goldener_Schnitt (2022), Wikipedia-Golden_ratio (2022).

Die Definition des *Goldene Schnitt* in der Antike war ein spezielles Teilungsverhältnis einer Strecke:

sei eine Strecke der Länge $a + b$ gegeben, dann soll das Verhältnis der Gesamtstrecke $a + b$ zur Strecke a gleich dem Verhältnis von a zu b sein, d.h.

$$\frac{a+b}{a} \stackrel{!}{=} \frac{a}{b} \Rightarrow \quad (7.7.26)$$

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0, \quad \text{mit } x := \frac{a}{b} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (7.7.27)$$

Definition 7.7.4 Der Goldenen Schnitt wird international mit dem Buchstaben φ bezeichnet und wir schließen uns dieser Konvention an.

Wir definieren also den Goldenen Schnitt $\varphi \in \mathbb{R}$ als

$$\varphi := \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1,618034. \quad (7.7.28)$$

Daraus folgt der Inverse Goldene Schnitt $\varphi^{-1} \in \mathbb{R}$ als

$$\varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618034. \quad (7.7.29)$$

Der *Goldene Schnitt* kann auch mittels trigonometrischer Funktionen dargestellt werden.

Lemma 7.7.5

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5}, \quad (7.7.30)$$

$$\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = (e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5}), \quad (7.7.31)$$

$$-\varphi = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5}, \quad (7.7.32)$$

$$-\varphi^{-1} = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = e^{3i\pi/5} + e^{-3i\pi/5}. \quad (7.7.33)$$

Beweis: Hier benützt man die trigonometrische Beziehung $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$.

Einerseits gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right), \Rightarrow$$

$$2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0 .$$

Andererseits ist

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 .$$

Dies setzen wir in die obere Zeile ein und erhalten:

$$2(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$8 \cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 .$$

Damit ist $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ eine Nullstelle des Polynoms:

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0 .$$

Man sieht sofort, daß eine Nullstelle $x_1 = -1$ und eine andere Nullstelle $x_2 = \frac{1}{2}$ ist. Diese beiden Nullstellen faktorisieren wir heraus.

$$\begin{aligned} (8x^2 - 4x - 2)(x - x_1)(x - x_2) &= (8x^2 - 4x - 2)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= (8x^2 - 4x - 2)\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x^3 - 2x^2 - x - 4x^2 + 2x + 1 \\ &= 8x^4 - 8x^2 + x + 1 . \end{aligned}$$

Also bleibt übrig das Polynom

$$8x^2 - 4x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} .$$

Jetzt ist $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} > 0$, und daher kommt für uns nur die Lösung x_3 in Frage

$$x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} .$$

Damit folgt auch sofort

$$\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5} .$$

Zur Bestimmung von φ^{-1} berechnen wir $\cos(\frac{2\pi}{5})$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{8}(5 + 2\sqrt{5} + 1) - 1 = \frac{1}{8}(-2 + 2\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\varphi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = (e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5}).$$

Mit

$$e^{\pm i\pi} = \cos(\pi) \pm i\sin(\pi) = -1$$

folgt sofort

$$\begin{aligned}-\varphi &= -(e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5}) = e^{-5i\pi/5}e^{i\pi/5} + e^{5i\pi/5}e^{-i\pi/5} = e^{-4i\pi/5} + e^{4i\pi/5}, \\ -\varphi^{-1} &= -(e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5}) = e^{-5i\pi/5}e^{2i\pi/5} + e^{5i\pi/5}e^{-2i\pi/5} = e^{-3i\pi/5} + e^{3i\pi/5}. \quad \square\end{aligned}$$

Und der *Goldene Schnitt* hat auch eine enge Verbindung zur Fibonacci-Folge. Es gilt nämlich die Formel von Moivre-Binet (Moivre 1718, Binet 1843).

Lemma 7.7.7 (Moivre-Binet) Seien $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ und $\varphi^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \varphi - 1$, dann gilt für die Fibonacci-Zahlen f_n :

$$f_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\varphi - (-\varphi^{-1})} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{2\varphi - 1} = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}. \quad (7.7.34)$$

Beweis: Der Beweis erfolgt wieder per vollständiger Induktion (Wikipedia-Fibonacci (2022)).

Induktionsanfang:

$$\frac{\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}}{\varphi - (-\varphi)} = 1 = f_1.$$

Induktionsvoraussetzung: die Behauptung gelte für alle Werte bis f_n .

$$\begin{aligned}f_n + f_{n-1} &= \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n} + \varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-(n-1)}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n-1}(\varphi + 1) - (-\varphi)^{-(n-1)}((-\varphi)^{-1} + 1)}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Nun gehorchen φ und $-\varphi^{-1}$ der charakteristischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, also können wir für $x + 1$ in der obigen Gleichung x^2 einsetzen und erhalten:

$$f_n + f_{n-1} = \frac{\varphi^{n-1}(\varphi^2) - (-\varphi)^{-(n-1)}(-\varphi)^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)}}{\sqrt{5}} = f_{n+1}. \quad \square$$

Im nächsten Schritt möchte man die Fusions-Matrix F und die Zopfgruppen-Matrix R für die Fibonacci-Anyonen bestimmen.

Lemma 7.7.9 *Wenn man unitäre Darstellungen von F und R sucht, so findet man:*

$$F_{1bc}^d = F_{a1c}^d = F_{ab1}^d = F_{abc}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.7.35)$$

$$F := F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \quad (7.7.36)$$

$$\text{mit } \varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618034.$$

$$R = \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix}. \quad (7.7.37)$$

Die komplex konjugierte Matrix R^* ist ebenfalls eine Lösung, beschreibt aber letztlich das gleiche Modell, jedoch mit vertauschtem Drehsinn.

Beweis: Zunächst betrachtet man den Fall, bei welchem in F_{abc}^d entweder a oder b oder c gleich 1 und alle anderen Indizes gleich τ sind. Aus dem Pentagon-Diagramm der F -Matrizen ergibt sich:

1. Aus $(F_{icd}^e)_{jk}$ ergibt sich mit $i = 1$ und $c = d = e = \tau$: $(F_{1\tau\tau}^\tau)_{jk}$ und daraus folgt auf der linken Seite $e = j \star d = c \star d = \tau \star \tau$ und auf der rechten Seite $e = k = c \star d = \tau \star \tau$, und daraus folgt $F_{1\tau\tau}^\tau = \mathbb{1}$.
2. Aus $(F_{abk}^e)_{il}$ ergibt sich mit $k = 1$ und $a = b = e = \tau$: $(F_{\tau\tau 1}^\tau)_{il}$ und daraus folgt auf der linken Seite $e = i = a \star b = \tau \star \tau$ und auf der rechten Seite $e = a \star l = a \star b = \tau \star \tau$, und daraus folgt $F_{\tau\tau 1}^\tau = \mathbb{1}$.
3. Aus $(F_{amd}^e)_{jl}$ ergibt sich mit $m = 1$ und $a = d = e = \tau$: $(F_{\tau 1\tau}^\tau)_{jl}$ und daraus folgt auf der linken Seite: $e = j \star d = a \star d = \tau \star \tau$ und auf der rechten Seite $e = a \star l = a \star d = \tau \star \tau$, und daraus folgt $F_{\tau 1\tau}^\tau = \mathbb{1}$.
4. Aus $(F_{abc}^j)_{im}$ ergibt sich mit $j = 1$ und $a = b = c = \tau$: $(F_{\tau\tau\tau}^1)_{im}$ und daraus folgt auf der linken Seite $e = j \star d = 1 \star d = d = \tau$ und auf der rechten Seite $e = j \star d = 1 \star d = d = \tau$, und daraus folgt $F_{\tau\tau\tau}^1 = \mathbb{1}$.

Um die Matrix $F_{\tau\tau\tau}^\tau$ zu bestimmen betrachtet man die Pentagon-Gleichung mit $a = b = c = d = e = \tau$:

$$(F_{\tau\tau k}^\tau)_{il}(F_{i\tau\tau}^\tau)_{jk} = \sum_m (F_{\tau\tau\tau}^l)_{mk}(F_{\tau m\tau}^\tau)_{jl}(F_{\tau\tau\tau}^j)_{im}.$$

Mit $j = k = \tau$ und $i = l = 1$ folgt daraus:

$$(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{11}(F_{1\tau\tau}^\tau)_{\tau\tau} = \sum_m (F_{\tau\tau\tau}^1)_{m\tau}(F_{\tau m\tau}^\tau)_{\tau 1}(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{1m} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{11} &= (F_{\tau\tau\tau}^1)_{1\tau}(F_{\tau 1\tau}^\tau)(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{11} + (F_{\tau\tau\tau}^1)_{\tau\tau}(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1}(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{1\tau} \\ &= (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1}(F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{1\tau}, \end{aligned}$$

da $(F_{1\tau\tau}^\tau)_{\tau\tau} = 1$ und $(F_{\tau\tau\tau}^1)_{\tau\tau} = 1$ und $(F_{\tau\tau\tau}^1)_{1\tau} = 0$ ist.

Weiter sei $F := F_{\tau\tau\tau}^\tau$ unitär und das bedeutet bei reellen Matrixelementen $F = F^\dagger = F^T$. Deshalb ist $F_{\tau 1} = F_{1\tau}$. Also können wir für F den Ansatz machen:

$$F = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & b \end{pmatrix}$$

und aus

$$FF^T = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a & a^{3/2} + a^{1/2}b \\ a^{3/2} + a^{1/2}b & a + b^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a^{3/2} + a^{1/2}b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a \quad \text{und}$$

$$a^2 + a = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Wir wählen $a := a_+ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi^{-1} = \varphi - 1 \approx 0,618034$ und erhalten

$$F = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi^{-1} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Jetzt zur Zopfgruppen-Matrix R . Eine Zopfdrehung um das Vakuum-Element 1 liefert für R nur die Einheitsmatrix, d.h. $R_{1\tau}^\tau = R_{\tau 1}^\tau = 1$.

Wir betrachten das Hexagon-Diagramm mit den F - und R -Matrizen mit $a = b = c = d = \tau$, denn wenn aus $\{a, b, c, d\}$ ein Element gleich 1 ist, reduziert sich das Hexagon-Diagramm zu einer Beziehung von Einheitsmatrizen. Also gibt sich:

$$R_{\tau\tau}^k (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{ik} R_{\tau\tau}^i = \sum_j (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{jk} R_{j\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{ij}.$$

1. $i = \tau, k = \tau$:

$$R_{\tau\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau\tau} R_{\tau\tau}^\tau = \sum_j (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{j\tau} R_{j\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau j} \quad \Rightarrow$$

$$(R_{\tau\tau}^\tau)^2 (-\varphi^{-1}) = (\varphi^{-1/2})(\varphi^{-1/2}) + R_{\tau\tau}^\tau (-\varphi^{-1})^2 \quad \Rightarrow$$

$$(R_{\tau\tau}^\tau)^2 + \varphi^{-1} R_{\tau\tau}^\tau + 1 = 0.$$

Nun ist $\varphi^{-1} = 2 \cos(\frac{2\pi}{5})$ und damit folgt:

$$\begin{aligned} (R_{\tau\tau}^\tau)^2 + 2 \cos(\frac{2\pi}{5}) R_{\tau\tau}^\tau + 1 = 0 &\Rightarrow \\ (R_{\tau\tau}^\tau)_\pm &= \frac{-2 \cos(\frac{2\pi}{5}) \pm \sqrt{4 \cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 4}}{2} = -\cos(\frac{2\pi}{5}) \pm \sqrt{-\sin^2(\frac{2\pi}{5})} \\ &= -\cos(\frac{2\pi}{5}) \pm i \sin(\frac{2\pi}{5}). \end{aligned}$$

Wir wählen für $R_{\tau\tau}^\tau$ den Wert von $(R_{\tau\tau}^\tau)_-$:

$$R_{\tau\tau}^\tau := (R_{\tau\tau}^\tau)_- = -(\cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5})) = -e^{2\pi i/5}.$$

2. $i = 1, k = 1$:

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau}^1 (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{11} R_{\tau\tau}^1 &= \sum_j (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{j1} R_{j\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{1j} \Rightarrow \\ (R_{\tau\tau}^1)^2 (\varphi^{-1}) &= (\varphi^{-1})^2 + (\varphi^{-1}) R_{\tau\tau}^\tau \Rightarrow \\ (R_{\tau\tau}^1)^2 &= (2 \cos(\frac{2\pi}{5})) - e^{2\pi i/5} = (e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}) - e^{2\pi i/5} \\ &= e^{-2\pi i/5} \Rightarrow \\ (R_{\tau\tau}^1)_\pm &= \pm e^{-\pi i/5}. \end{aligned}$$

Wir wählen für $R_{\tau\tau}^1$ den Wert von $(R_{\tau\tau}^1)_-$:

$$R_{\tau\tau}^1 := (R_{\tau\tau}^1)_- = -e^{-\pi i/5} = e^{5\pi i/5} e^{-\pi i/5} = e^{4\pi i/5}.$$

3. $i = \tau, k = 1$: Zuletzt bleibt noch die Frage, ob mit $R_{\tau\tau}^\tau$ und $R_{\tau\tau}^1$ auch die folgende Konsistenz-Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} R_{\tau\tau}^1 (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1} R_{\tau\tau}^\tau &= \sum_j (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{j1} R_{j\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau j} \Rightarrow \\ (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1} R_{\tau\tau}^1 R_{\tau\tau}^\tau &= (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{11} (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1} + (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau 1} R_{\tau\tau}^\tau (F_{\tau\tau\tau}^\tau)_{\tau\tau} \Rightarrow \\ e^{4\pi i/5} (-e^{2\pi i/5}) &= \varphi^{-1} + (-\varphi^{-1}) (-e^{2\pi i/5}) \Rightarrow \\ e^{\pi i/5} = \varphi^{-1} (1 + e^{2\pi i/5}) &\Rightarrow 1 = \varphi^{-1} (e^{-i\pi/5} + e^{\pi i/5}) \Rightarrow \\ 1 &= \varphi^{-1} \varphi, \end{aligned}$$

da ja $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 \cos(\frac{\pi}{5}) = e^{i\pi/5} + e^{-i\pi/5}$ ist. Damit ist auch diese Konsistenzbedingung unserer Lösung für F und R erfüllt. \square

Da wir bei der Bestimmung der Matrixelemente von R die Wahl zwischen \pm hatten, sind komplex konjugierte Matrixelemente ebenfalls erlaubte Lösungen .

Hiermit wurde gezeigt, daß das Fibonacci-Anyonen Modell ein gültiges allgemeines Anyonen-Modell ist. Man ahnt aber sofort, daß für Modelle mit mehr als zwei Anyonen-Typen der Nachweis der Gültigkeit der Pentagon- und der Hexagon-Konsistenzgleichungen sehr anspruchsvoll werden kann.

Häufig kommt die unitäre Matrix R auch im Zusammenhang mit $F^{-1}RF$ vor. Wir nennen diese Matrix B , was an die Braid-group, die Zopfgruppe erinnern soll. Wegen $B = F^{-1}RF = F^\dagger RF = F^T RF = FRF$ ist auch B unitär.

Lemma 7.7.11

$$B := F^{-1} \circ R \circ F : V_{acb}^d \rightarrow V_{abc}^d, \quad (7.7.38)$$

$$(B_{abc}^d)_{e\mu\nu}^{e'''\mu'''\nu'''} := \sum_{e'\mu'\nu'\mu''\nu''} ((F^{-1})_{abc}^d)_{e'\mu''\nu''}^{e'''\mu'''\nu'''} (R_{bc}^{e'})_{\mu'\nu'}^{\mu''\nu''} (F_{acb}^d)_{e\mu\nu}^{e'\mu'\nu'}. \quad (7.7.39)$$

$$\begin{aligned} B &= F^{-1}RF = F^\dagger RF = F^T RF = FRF \\ &= \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.7.40)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} B &= F^{-1}RF = F^\dagger RF = F^T RF = FRF \\ &= \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ e^{4\pi i/5}\varphi^{-1/2} & e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^{4\pi i/5}\varphi^{-2} - e^{2\pi i/5}\varphi^{-1}) & (e^{4\pi i/5}\varphi^{-3/2} + e^{2\pi i/5}\varphi^{-3/2}) \\ (e^{4\pi i/5}\varphi^{-3/2} + e^{2\pi i/5}\varphi^{-3/2}) & (e^{4\pi i/5}\varphi^{-1} - e^{2\pi i/5}\varphi^{-2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man mit Hilfe von 7.7.30 und 7.7.31 die Matrixelemente von B noch etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned} B_{11} &= e^{4\pi i/5}\varphi^{-2} - e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} = e^{4\pi i/5}\varphi^{-1}(\varphi^{-1} - e^{-2\pi i/5}) \\ &= e^{4\pi i/5}\varphi^{-1}(e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5} - e^{-2\pi i/5}) = e^{6\pi i/5}\varphi^{-1} \\ &= e^{6\pi i/5} \cdot 1^{-1}\varphi^{-1} = e^{6\pi i/5}e^{-10\pi i/5}\varphi^{-1} = e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{22} &= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} - e^{2\pi i/5} \varphi^{-2} = e^{2\pi i/5} \varphi^{-1} (e^{2\pi i/5} - \varphi^{-1}) \\ &= e^{2\pi i/5} \varphi^{-1} (e^{2\pi i/5} - e^{2\pi i/5} - e^{-2\pi i/5}) = -\varphi^{-1} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= B_{21} = e^{4\pi i/5} \varphi^{-3/2} + e^{2\pi i/5} \varphi^{-3/2} \\ &= e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} (e^{6\pi i/5} \varphi^{-1} + e^{4\pi i/5} \varphi^{-1}) \\ &= e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} (-e^{\pi i/5} - e^{-\pi i/5}) \varphi^{-1} \\ &= e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} (-\varphi) \varphi^{-1} = -e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} . \end{aligned}$$

Damit kann man B jetzt schreiben als:

$$B = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} \varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} . \quad \square$$

In einem Quantencomputer auf der Grundlage von Anyonen geschehen die Zustands-
transformationen an den einzelnen Quantengattern durch Zopfverdrehungen. Als uni-
täre Zopf-Transformationen im Zusammenhang mit Fibonacci-Anyonen kann man zwei-
dimensionale unitäre Darstellungen der Zopfgruppe B_3 wählen.

Die Matrix R vertauscht die Stränge 1 und 2, die Matrix B die Stränge 2 und 3 eines
Zopfes mit 3 Strängen.

Lemma 7.7.13 (Yang-Baxter) *Die Gruppe B_3 wird von den 2 Generatoren σ_1 und σ_2 erzeugt. Als deren zweidimensionale unitäre Darstellungen definieren wir die oben eingeführten Matrizen R und B :*

$$\bar{\sigma}_1 := R , \quad (7.7.41)$$

$$\bar{\sigma}_2 := B = F^{-1} R F = F^\dagger R F = F^T R F = F R F . \quad (7.7.42)$$

Es gilt für die Darstellungen $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ der B_3 -Generatoren $\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \neq \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1$. Deshalb spricht man von nichtabelschen Anyonen. Zugleich erfüllen diese Generatoren die Yang-Baxter Gleichung

$$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \quad \Leftrightarrow \quad R B R = B R B , \quad (7.7.43)$$

und damit also die notwendige und hinreichende Bedingung für eine unitäre 2-dimensionale Darstellung der Zopfgruppe B_3 .

Beweis:

$$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = R B$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & -e^{2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 = BR$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ -e^{2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 \neq \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1$ und für den Kommutator folgt:

$$[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2] = [R, B] = \begin{pmatrix} 0 & -(e^{2\pi i/5} + 1)\varphi^{-1/2} \\ (e^{2\pi i/5} + 1)\varphi^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun zur Yang-Baxter Gleichung.

$$\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 = RBR$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & -e^{2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi^{-1}e^{4\pi i/5} & e^{4\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ e^{4\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1}e^{4\pi i/5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = BRB$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & -e^{2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & e^{2\pi i/5}\varphi^{-1} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-2} - e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-3/2} - \varphi^{-3/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-3/2} - \varphi^{-3/2} & \varphi^{-1} - e^{2\pi i/5}\varphi^{-2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir versuchen BRB wieder Hilfe von 7.7.30 und 7.7.31 umzuformen:

$$\begin{aligned}
(BRB)_{11} &= e^{-4\pi i/5}\varphi^{-2} - e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1} = e^{4\pi i/5}\varphi^{-1}(e^{-8\pi i/5}\varphi^{-1} - e^{-6\pi i/5}) \\
&= e^{4\pi i/5}\varphi^{-1}(-e^{-3\pi i/5}(e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}) + e^{-1\pi i/5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} (-e^{-1\pi i/5} - e^{-5\pi i/5} + e^{-1\pi i/5}) = e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} (-e^{-5\pi i/5}) \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} = (RBR)_{11} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(BRB)_{22} &= \varphi^{-1} - e^{2\pi i/5} \varphi^{-2} = e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} (e^{-4\pi i/5} - e^{-2\pi i/5} \varphi^{-1}) \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} (e^{-4\pi i/5} - e^{-2\pi i/5} (e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5})) \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} (e^{-4\pi i/5} - 1 - e^{-4\pi i/5}) = -e^{4\pi i/5} \varphi^{-1} = (RBR)_{22} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(BRB)_{12} &= -e^{-2\pi i/5} \varphi^{-3/2} - \varphi^{-3/2} \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1/2} (-e^{-6\pi i/5} \varphi^{-1} - e^{-4\pi i/5} \varphi^{-1}) \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1/2} (e^{-1\pi i/5} + e^{+1\pi i/5}) \varphi^{-1} = e^{4\pi i/5} \varphi^{-1/2} (\varphi^{+1}) \varphi^{-1} \\
&= e^{4\pi i/5} \varphi^{-1/2} = (RBR)_{12} ,
\end{aligned}$$

$$(BRB)_{21} = (BRB)_{12} = (RBR)_{12} = (RBR)_{21} ,$$

das heißt

$$\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 = RBR = BRB = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 .$$

□

7.7.3 Quantencomputer mit Fibonacci-Anyonen

Quantencomputer werden üblicherweise auf Zweizustands-Quantensystemen definiert und realisiert. Ein *Qubit* ist das einfachste nichttriviale Zweizustands-Quantensystem mit zwei orthogonalen Basiszuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Der dazugehörige Hilbertraum ist $\mathcal{H}_2 := \{a|0\rangle + b|1\rangle \mid a, b \in \mathbb{C}\}$. Die Operation eines Quantencomputers besteht zunächst aus der Initialisierung seiner n Qubits, dann aus der Anwendung von *Quantengattern*, d.h. unitären Transformationen, auf den Initialzustand, und dann aus dem Auslesen des Ergebnisses, d.h. einer Projektion auf einen Vektor in \mathcal{H}_{2n} . Natürlich ist das Ergebnis eines Quantencomputers im Gegensatz zum Ergebnis eines gewöhnlichen Digitalcomputers immer ein quantenmechanischer Erwartungswert, d.h. ein Wahrscheinlichkeitswert.

Ein Qubit kann man sich als einen einfachen Spin- $\frac{1}{2}$ Zustand vorstellen. Gruppentheoretisch beschreibt man die Wellenfunktion eines solchen Spin- $\frac{1}{2}$ -Quantensystems als eine Darstellung der $SU(2)$ -Gruppe.

Von den vielen technologischen Problemen bei der Realisierung eines Quantencomputer ist ein großes Problem die Dekohärenz der überlagerten Multi-Qubit-Wellenfunktion. Hier bieten nun die Anyonen mit ihrer topologisch geschützten Multi-Anyonen-Wellenfunktion eine interessante Alternative gegenüber anderen Realisierungsansätzen, allerdings verlangt der Anyonen-Ansatz sehr tiefe Temperaturen und starke Magnetfelder.

Um aber mit einem Multi-Anyonen-System ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Quantensystem simulieren zu können, muß zunächst einmal gezeigt werden, daß die Zopf-Gruppe B_3 , mit der Quantengatter in einem Anyonen-System realisiert werden, dicht in $SU(2)$ liegt. Einen möglichen Beweis zeigt das folgende Lemma.

Lemma 7.7.15 *Die 2-dim. unitären Darstellungen R und B der Zopf-Gruppe B_3 liegen dicht im Vektorraum der 2-dim. Pauli-Matrizen, welche 2-dim. Darstellungen der Gruppe $SU(2)$ sind.*

Beweis: Gegeben seien die Darstellungsmatrizen R und B der Zopf-Gruppe B_3 und die Pauli-Darstellungs-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der Gruppe $SU(2)$:

$$R = \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5}\varphi^{-1} & -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} \\ -e^{-2\pi i/5}\varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{R} := e^{-3\pi i/5}R = \begin{pmatrix} e^{\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi i/5} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Jetzt kann man ein Folge von Matrizen definieren, die beginnend mit \tilde{R} gegen σ_3 konvergieren:

$$S_n := \begin{pmatrix} y_n & 0 \\ 0 & -y_n^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } y_n := 1 + \frac{x-1}{n}, \quad \Rightarrow$$

$$S_1 = \tilde{R} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma_3.$$

Im nächsten Schritt gehen wir von B zur Matrix F über:

$$B = FRF^{-1} = FRF^\dagger = FRF \quad \text{mit} \quad F = F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix},$$

$$F - \varphi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi^{1/2}(F - \varphi^{-1}\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1.$$

Und im letzten Schritt multipliziert man $\varphi^{1/2}(F - \varphi^{-1}\sigma_3) = \sigma_1$ mit $i\sigma_3$ und erhält

$$\varphi^{1/2}(F - \varphi^{-1}\sigma_3)(i\sigma_3) = \sigma_1(i\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2. \quad \square$$

Damit lassen sich alle Pauli-Matrizen durch 2-dim. Darstellungs-Matrizen der Zopfgruppe B_3 approximieren.

Zwei in der Literatur vorgeschlagene Abbildungen von 3- oder 4-strängigen Fibonacci-Zöpfen auf die $SU(2)$ -Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zeigt die folgende Abbildung (siehe z.B. Hormozi u. a. (2007), Nayak u. a. (2008)).

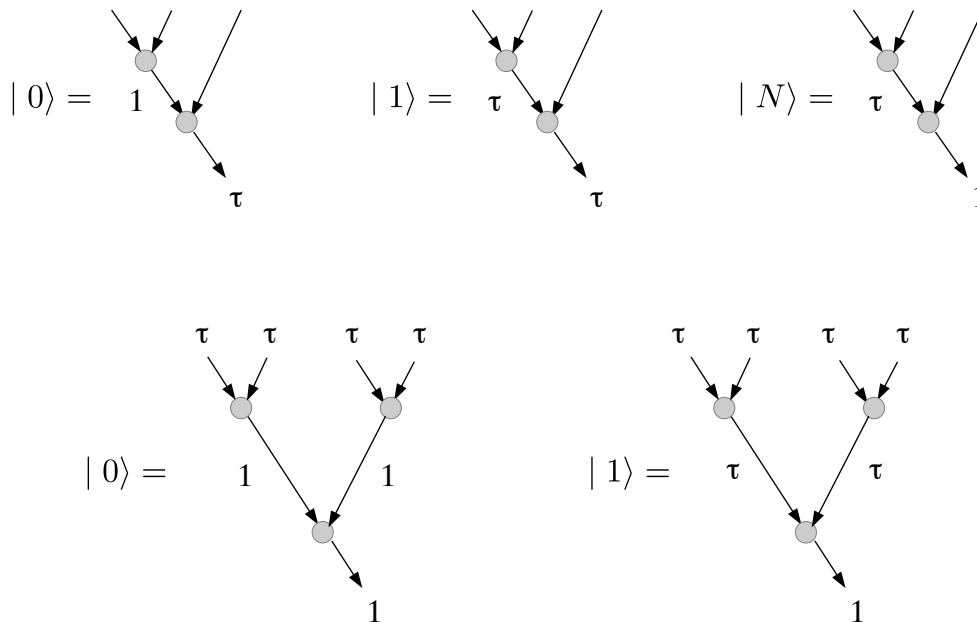


Abbildung 7.14: Abbildung 3- und 4-strängiger Fibonacci-Anyonen nach $SU(2)$

Im Fall von 3 Fibonacci-Anyonen wird der dritte Zustand als $|N\rangle$, als 'noncomputational' bezeichnet. Da $|N\rangle$ im Gegensatz zu $|0\rangle$ und $|1\rangle$ eine andere Gesamt-Quasiladung hat, kann der Zustand $|N\rangle$ nicht durch Zopfverdrehungen erreicht werden. Oder anders ausgedrückt: wenn die Zustände von $|N\rangle$ am Anfang und Ende der Berechnung nicht übereinstimmen, so ist bei der Berechnung ein Fehler aufgetreten. Hier kommen dann ausgeklügelte Fehlerkompensations-Algorithmen zum Zuge - siehe insb. Preskill (1998).

Hiermit kommt dieses Kapitel über den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt zu seinem vorläufigen Ende. Zur Ergänzung und Vertiefung sei nochmals auf zwei sehr schöne und lesenwerte Online-Bücher hingewiesen:

- David Tong „The Quantum Hall Effect” (Tong (2016)). Tong beschreibt gegen Ende seines Online-Buches auch die entsprechenden Chern-Simons-Theorien in Bezug auf den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt.
- John Preskill „Quantum Information and Computation” (Preskill (1998)). Preskill beschreibt sehr viele Aspekte der Quanten-Informationsverarbeitung auf eine sehr verständliche und umfassende Art und Weise.

Teil II

Mathematische Anhänge

Diese Arbeit wendete sich an Studenten und Studentinnen der Physik und an Physiker und Physikerinnen, die sich für eine Einführung in Geometrie und Topologie im Zusammenhang mit moderner Festkörper-Physik interessieren. Dabei wurde in der Darstellung keine moderne, höchstmögliche Abstraktion etwa im Sinne von Grothendieck angestrebt, sondern ein leicht verständlicher Zugang zur historischen Entwicklung einiger grundlegender Fragen der Geometrie und Differentialtopologie. Vorausgesetzt wurden daher nur einfache Kenntnisse der Analysis, linearen Algebra, differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und der Differentialformen von Élie Cartan. Bei Physikern beliebte Einführungen zu diesen Themen sind: Flanders (1989), Schutz (1980) und insbesondere die schönen Darstellungen von Nakahara (2003) und Frankel (2004).

Diese mathematischen Anhänge wurden zur Erleichterung der Leser und Leserinnen zum größten Teil aus Schiekkel (2019) hier hereinkopiert, da dies durch die vielen Links die Arbeit mit dem Physik-Teil des Manuskript deutlich erleichtert und so ein in sich abgeschlossenes Buch entstanden ist. Dabei wurden neben zahlreichen kleinen Fehlerkorrekturen und Ergänzungen (Kapitelnummern in diesem Manuskript: 14.5, 15.3 neu, 15.4 neu, 15.14, 15.15, 19.2, 34.1) auch das Unter-Kapitel „Die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit“ 29.7 deutlich erweitert und das Kapitel „Morse Theorie“ 22 neu verfaßt und integriert.

Kommentare und Fehlerhinweise sind willkommen unter: mb.schiekel@arcor.de .

Möge diese Arbeit hilfreich sein. Viel Freude bei der Lektüre!

8 Euklid und Archimedes

8.1 Euklid von Alexandria (Εὐκλείδης, ca. 365-290 v. Chr.)

Über das Leben von Euklid ist kaum etwas verlässliches bekannt. Eine Quelle (Proklos) sagt, daß er etwa um 365 v. Chr. in Athen geboren worden sein soll und dann die Akademie von Platon besuchte. Es heißt, über dem Eingang zu Platons Akademie in Athen habe der Spruch gestanden:

Ἄγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω. Ageōmetrētos mēdeis eisitō.
Für Geometrie-Unkundige kein Eintritt.

Und auch wenn dieser Satz möglicherweise erst eine Erfindung späterer Jahrhunderte sein sollte, so hatte Platon doch eine große Wertschätzung für die Geometrie und gab diese auch an seine Schüler weiter.

Schließlich wirkte Euklid in Alexandria, wo er Zugang zu der weltberühmten Bibliothek hatte.

Das bekannteste und meistgeschätzte Werk von Euklid war seine systematische Zusammenstellung der kompletten antiken Mathematik in 13 Bänden, die *Elemente* (Στοιχεῖα, Stoicheia, 'Anfangsgründe', 'Prinzipien', 'Elemente'). Aber daneben schrieb er auch noch über Musiktheorie, Optik und Astronomie.

Euklids *Elemente* zeigen eine strenge Gliederung in Definitionen, Axiome, Sätze und Beweise und sind dadurch logisch so klar, daß Teile dieses Werkes in der westlichen Welt bis zum Beginn des 20. Jh. die Grundlage für den allgemeinen Mathematikunterricht darstellten. Hier eine kurze Übersicht über die Inhalte der einzelnen Bände:

1. Definitionen und Satz des Pythagoras,
2. Geometrische Algebra,
3. Kreise,
4. Polyeder,
5. Irrationale Größen,
6. Proportionen,
7. Teilbarkeit und Primzahlen,
8. Quadratzahlen, Kubikzahlen, geometrische Reihen,
9. Gerade und ungerade Zahlen,

10. Geometrie inkommensurabler Größen,
11. Einführung in die Raumgeometrie,
12. Exhaustionsmethode,
13. Die fünf 'platonischen' Körper.

Obwohl es in Byzanz eine griechische Abschrift der *Elemente* aus dem 9. Jh. und im Vatikan eine griechische Abschrift aus dem 10. Jh. gab, verbreitete sich in Europa die Kenntnis von Euklid und seinen Werken erst mit den lateinischen Übersetzungen des 12. Jh. aus dem Arabischen.

Über Euklid sind einige Anekdoten überliefert, die vielleicht erst in späteren Jahrhunderten entstanden, die aber auch etwas über das Hineinwirken Euklids in die europäische Kultur aussagen.

- Der Pharao Ptolemaios soll einmal Euklid gefragt haben, ob es nicht einen einfacheren Weg zur Erlernung der Geometrie gebe, als das Studium seiner *Elemente*. Dieser antwortete jedoch: „Oh Pharao, in der normalen Welt existieren immer zwei Wege, einen auf dem das Volk reist und einen der dem König zum Reisen vorbehalten ist. Zur Erlernung der Mathematik gibt es aber keinen Königsweg.“
- Ein Schüler Euklids fragte ihn nach dem Lernen des ersten Satzes der *Elemente*: „Aber wozu soll das alles gut sein und was kann ich damit verdienen?“ Euklid rief nach seinem Sklaven und sagte ihm: „Gib ihm 3 Obolus, denn er muss mit dem was er lernt, etwas verdienen.“

[Quellen: de.wikipedia: Euklid, Scriba u. Schreiber (2010)].

8.2 Euklid: Winkel in der Ebene

Der vielleicht einzige mathematische Satz, den viele Menschen aus ihrer Schulzeit in Erinnerung behalten, ist der Satz: „die Winkelsumme in Dreieck beträgt 180° “. Wir werden im Folgenden für einen Winkel anstelle des Gradmaßes α° das Bogenmaß α verwenden:

$$\alpha := 2\pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}. \quad (8.2.1)$$

Der Satz über die Winkelsumme im Dreieck war möglicherweise schon Thales von Milet (ca. 624 - 547 v. Chr.) oder seinen Schülern bekannt. Insbesondere dürfte dies für den Spezialfall der rechtwinkligen Dreiecke gelten. Schriften von Thales liegen uns heute jedoch nicht mehr vor.

Das obige Rechteck enthält vier rechte Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$, also eine Winkelsumme w_4 von 2π , und damit ist die Winkelsumme w_3 im rechtwinkligen Dreieck gerade π :

$$w_4 := 2\gamma + 2(\alpha + \beta) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad w_3 = \alpha + \beta + \gamma = \pi. \quad (8.2.2)$$

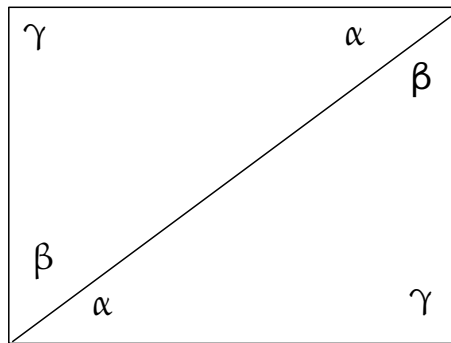


Abbildung 8.1: Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck

Üblicherweise zitieren Mathematiker für die Grundlagen der antiken Geometrie das berühmte 13-bändige Werk von Euklid von Alexandria (ca. 360 - 280 v. Chr.): *Die Elemente*. Die einheitliche Darstellung und strenge Beweisführung in dieser ersten großen Zusammenfassung der Mathematik war jahrhundertlang für die nachfolgenden Mathematiker der islamischen Kulturen und des europäischen Mittelalters das bedeutendste Grundlagenwerk (Scriba u. Schreiber, 2010).

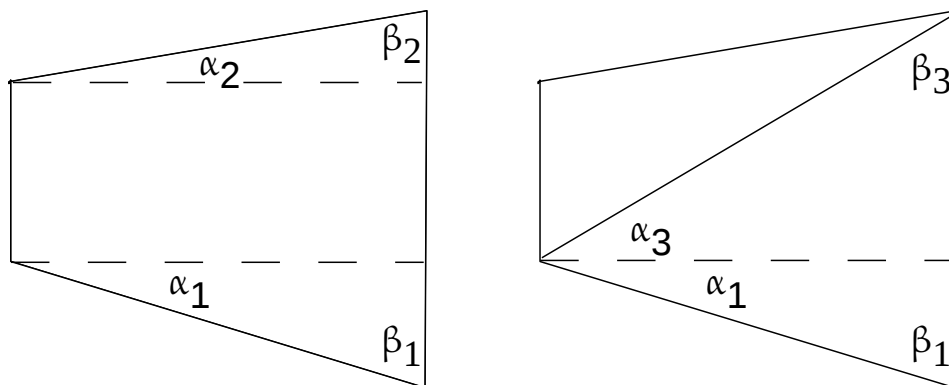


Abbildung 8.2: Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck

Aus dem linken Bild können wir entnehmen, daß die Winkelsumme des dargestellten Vierecks $w_4 = 2\pi$ ist, denn:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2 + \beta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad w_4 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + 2\frac{\pi}{2} = 2\pi. \quad (8.2.3)$$

Aus dem rechten Bild entnehmen wir, daß die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks $w_3 = \pi$ ist, denn:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_3 + \beta_3 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad w_3 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_3 + \beta_3 = \pi. \quad (8.2.4)$$

Wenn man die Winkelsumme w_n in einem n-Eck bestimmen möchte, so ist es sinnvoll nicht nur die Innenwinkel α_i zu betrachten, sondern auch die Außenwinkel β_i . Wenn wir

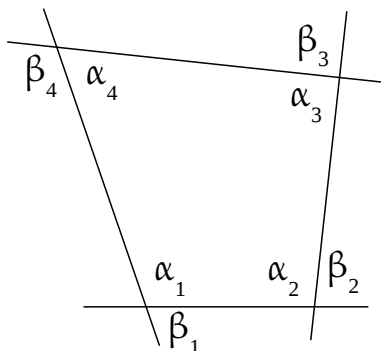


Abbildung 8.3: Winkelsumme in einem n-Eck

das n-Eck einmal im Gegenuhreigersinn umrunden, so summieren sich die Außenwinkel gerade zu einer vollen Umdrehung:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 2\pi ; \quad \alpha_i = \pi - \beta_i ; \quad (8.2.5)$$

$$w_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n (\pi - \beta_i) = n\pi - 2\pi = (n - 2)\pi . \quad (8.2.6)$$

Während die Winkelsumme w_n der Innenwinkel α_i für $n \rightarrow \infty$ unbegrenzt wächst, bleibt die Summe der Außenwinkel β_i unverändert 2π . Daher stützt man sich zur Definition der Krümmung auf diese Außenwinkel.

8.3 Archimedes von Syrakus (Ἀρχιμήδης, 287 - 212 v. Chr.)

Die Beiträge von Archimedes von Syrakus auf Sizilien (287 - 212 v. Chr.) zu Mathematik, Physik und Ingenieurwesen sind überaus zahlreich und kreativ. Aus mathematischer Sicht besonders bemerkenswert sind die Flächen- und Volumenberechnungen von Archimedes, die einen ersten Schritt hin zu einer Integralrechnung darstellten. Das feste Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, das wir heute π nennen, war schon im alten Babylonien und Ägypten bekannt. Archimedes fand zunächst, daß diese Zahl π auch die Kreisfläche bestimmt. Nebenbei entwickelte er ein Zahlensystem zur Basis 10^8 , um die Anzahl aller Sandkörner an allen Stränden der Erde abschätzen zu können. Im Bereich der Physik sind seine Entdeckung der Hebelgesetze und des archimedischen Prinzips (Entdeckung und Anwendung des spezifischen Gewichts) besonders bekannt geworden. Bevor er mit dem mathematischen Beweis einer Flächenberechnung begann, versuchte er zwei als flächengleich oder volumengleich vermutete geometrische Formen physikalisch durch eine Wägung zu bestimmen.

Auf seine zahlreichen höchst kreativen technischen Erfindungen, u.a. auch militärtechnischer Art, wollen wir hier nicht näher eingehen - siehe dazu den Wikipedia-Artikel.

[Quellen: de.wikipedia: Archimedes, Scriba u. Schreiber (2010)].

8.4 Archimedes: Kugelflächen

Die Beiträge von Archimedes von Syrakus auf Sizilien (ca. 287 - 212 v. Chr.) zu Mathematik, Physik und Ingenieurwesen sind überaus zahlreich und kreativ. Aus mathematischer Sicht besonders bemerkenswert sind die Flächen- und Volumenberechnungen von Archimedes, die einen ersten Schritt hin zu einer Integralrechnung darstellten. Das feste Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, das wir heute π nennen, war schon im alten Babylonien und Ägypten bekannt. Archimedes fand zunächst, daß diese Zahl π auch die Kreisfläche bestimmt.

Die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks ist $A = \frac{1}{2}b \cdot h$. Jetzt konstruiert Archimedes n gleichschenklige Dreiecke im Innern eines Kreises und n gleichschenklige Dreiecke um einen Kreis herum (im obigen Bild ist $n = 4$). Die Fläche eines dieser einbeschriebenen Dreiecke ist $\frac{1}{2}h \cdot b_1$ und die Fläche eines der umbeschriebenen Dreiecke ist $\frac{1}{2}r \cdot b_2$. Je mehr Dreiecke man verwendet, umso mehr nähern sich $n \cdot b_1$ und $n \cdot b_2$ dem Kreisumfang an, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot b_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot b_2 = 2\pi r \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h = r ,$$

$$n \cdot \frac{1}{2}h \cdot b_1 < A_{Kreis} < n \cdot \frac{1}{2}r \cdot b_2 ,$$

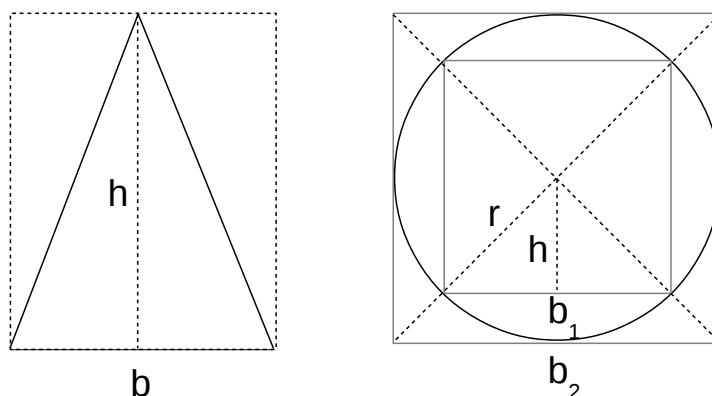


Abbildung 8.4: Flächenberechnung eines Kreises

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} h \cdot b_1 = \pi r^2 \leq A_{Kreis} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} r \cdot b_2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$A_{Kreis} = \pi r^2 . \quad (8.4.1)$$

Dieses Ergebnis benützt Archimedes nun, um die Fläche eines Kugelsektors zu berechnen, der von einer horizontalen Ebene E aus einer Kugel ausgeschnitten wird.

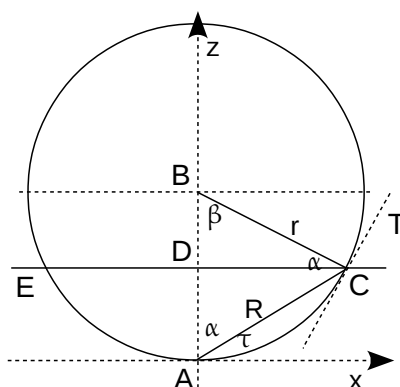


Abbildung 8.5: Berechnung eines Kugeloberflächensegments

Beim Dreieck ABC handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis R . Die Entdeckung von Archimedes war nun, daß die Fläche des Kugelsektors unterhalb der Ebene E gerade gleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius R ist. Archimedes hatte noch keine trigonometrischen Funktionen und keine Differentiation zur Verfügung. Um für uns den Beweis zu vereinfachen, werden wir diese Hilfsmittel verwenden - dabei folgen wir im Wesentlichen Brown (2012).

Für die Winkel gilt $\tau := \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \tau) = 2\tau$. Mit dem Satz von Pythagoras für das Dreieck BDC folgt:

$$(R \cos \tau)^2 + (r - R \sin \tau)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 - 2rR \sin \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 2r \sin \tau .$$

Wenn wir den Winkel τ um $d\tau$ vergrößern, so vergrößert sich R um dR und die Kreisfläche $A_1 := \pi R^2$ um dA_1 :

$$dR = 2r \cos \tau \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad dA_1 = 2\pi R \cdot dR = 4\pi r R \cos \tau \cdot d\tau . \quad (8.4.2)$$

Wie ändert sich die Fläche A_2 des Kugelsektors unterhalb der Ebene E bei einer Zunahme des Winkel τ um $d\tau$? Der horizontale Kugelumfang beim Punkt C in der Ebene E ist $2\pi R \cos \tau$. Bei einer Vergrößerung von τ um $d\tau$ kommt zu A_2 ein Flächenstreifen dA_2 hinzu:

$$r \cdot d\beta = r \cdot 2 \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad dA_2 = (2\pi R \cos \tau) \cdot (r \cdot d\beta) = 4\pi r R \cos \tau \cdot d\tau . \quad (8.4.3)$$

Wenn die Ebene E in der $x - y$ -Ebene liegt, so ist $\tau = 0$ und $R = 0$ und $A_1 = A_2 = 0$. Da nun auch $dA_1 = dA_2$ ist, so folgt die Behauptung von Archimedes, daß $A_1 = A_2$.

Wenn der Radius $R = 2r$ ist, so ist die Fläche des Kreises $A_1 = \pi R^2 = 4\pi r^2$ und dies ist also auch die Oberfläche der Kugel mit dem Radius r .

9 Harriot und Girard: sphärische Dreiecke

Thomas Harriot (1560 - 1621) fand wohl im Jahr 1603 als erster die Gleichung für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, aber da er all seine Forschungsergebnisse nicht publizierte, trägt dieser Satz jetzt den Namen 'Satz von Girard' nach dem französischen Mathematiker Albert Girard (1595 - 1632), der seinen Beweis 1629 veröffentlichte.

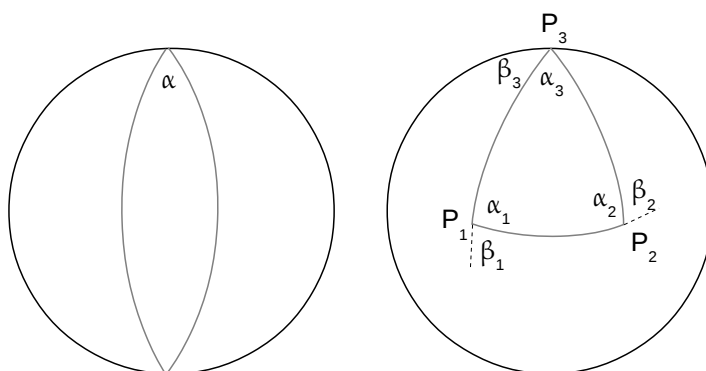


Abbildung 9.1: Sphärische Zwei- und Dreiecke

Alle im Folgenden betrachteten Linien auf der Kugeloberfläche seien Geodäten, also Großkreise. Die Fläche $A(\alpha)$ eines sphärischen Zweiecks ist proportional zu α und $A(2\pi) = A_{Kugel} = 4\pi r^2$, also gilt:

$$A := 4\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha r^2 . \quad (9.0.1)$$

Die Fläche $A_{P_1P_2P_3}$ des sphärischen Dreiecks $P_1P_2P_3$ können wir nun aus den drei sphärischen Zweiecken mit den jeweiligen Winkeln α_i berechnen. Sei $A(\alpha_1)$ die Fläche des sphärischen Zweiecks, das aus der Verlängerung der Linien $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$ gebildet wird und sei $A_1 := A(\alpha_1) - A_{P_1P_2P_3}$ der nicht in der Dreiecksfläche $A_{P_1P_2P_3}$ liegende Teil des Zweiecks $A(\alpha_1)$. Entsprechendes gelte für $A(\alpha_2)$ und A_2 und $A(\alpha_3)$ und A_3 der beiden anderen Zweiecke:

$$A(\alpha_1) = A_{P_1P_2P_3} + A_1 = 2\alpha_1 r^2 ,$$

$$A(\alpha_2) = A_{P_1P_2P_3} + A_2 = 2\alpha_2 r^2 ,$$

$$A(\alpha_3) = A_{P_1P_2P_3} + A_3 = 2\alpha_3 r^2 ,$$

$$3A_{P_1P_2P_3} + A_1 + A_2 + A_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)r^2 .$$

Jetzt ist aber $2[A(\alpha_1) + A(\alpha_2) + A(\alpha_3)]$ gleich der ganzen Kugeloberfläche, also:

$$2A_{P_1P_2P_3} + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$2A_{P_1P_2P_3} = 2r^2 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} A_{P_1P_2P_3} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi . \quad (9.0.2)$$

Wenn wir schließlich noch zu den Außenwinkeln $\beta_i := \pi - \alpha_i$ übergehen, so folgt:

$$\frac{1}{r^2} A_{P_1P_2P_3} + \sum_{i=1}^3 \beta_i = 2\pi . \quad (9.0.3)$$

Diese Formel erinnert nun doch schon sehr an die Gauß-Bonnet-Formel.

10 Krümmung von Kurven

10.1 Die Krümmung von Kurven von Newton bis Frenet-Serret

Der Begriff der Krümmung einer beliebigen Kurve in der Ebene als Kehrwert des Radius eines Krümmungskreises findet sich zuerst bei Newton (1643–1727) und Jacob I. Bernoulli (1654–1705) (Scriba u. Schreiber, 2010, S. 341).

Wir orientieren uns in diesem Abschnitt weitgehend an der schönen Einführung in die Differentialgeometrie von Eschenburg u. Jost (2007), S. 19 ff.

Heute führt man den Begriff der Krümmung einer stetig differenzierbaren Kurve üblicherweise folgendermaßen ein:

sei \mathbb{E}^n der n -dimensionale euklidische Raum \mathbb{R}^n mit der Metrik $g_{ik}^0 := \delta_{ik}$ und dem Skalarprodukt

$$\langle x | y \rangle := \sum_{ik=1}^n g_{ik}^0 x^i y^k =: x^i y_i \quad \text{für } x, y \in \mathbb{E}^n. \quad (10.1.1)$$

Dann ist die Länge des Vektors $x \in \mathbb{E}^n$: $|x| := \|x\| := \langle x | x \rangle^{1/2}$.

Eine *reguläre* Kurve ist eine stetig differenzierbare Abbildung eines offenen Parameterintervalls $(a, b) \in \mathbb{R}$ in \mathbb{E}^n :

$$c : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n \quad \text{mit } \dot{c}(t) := \frac{d}{dt}c(t) \neq 0 \quad \text{für } t \in (a, b). \quad (10.1.2)$$

Die Forderung nichtverschwindender Tangenten $\dot{c}(t) \neq 0$, mit anderen Worten, die Forderung, daß c eine Immersion ist, soll die Existenz der Umkehrfunktion sicherstellen, die z.B. für eine Parametrisierung der Kurve nach der Bogenlänge benötigt wird. Ein Beispiel für eine an einem Punkt $t_0 \in (a, b)$ nichtreguläre Kurve ist etwa:

$$c(t) := c(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{c}(t)|_{t_0} \cdot (t - t_0)^2. \quad (10.1.3)$$

Die Kurve $c(t)$ hat bei t_0 einen Umkehrpunkt mit verschwindender Tangente $\dot{c}(t)|_{t_0} = 0$.

Die Bogenlänge $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert als

$$s(t) := \int_a^t |\dot{c}(t')| dt'. \quad (10.1.4)$$

$s(t)$ ist differenzierbar und $\dot{s}(t) = |\dot{c}(t)| > 0$, also existiert auf $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (s(a), s(b))$ die Umkehrfunktion $s^{-1} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow (a, b)$. Die Funktion $c_B(s) := c \circ s^{-1}$, also $c_B(s) = c(t)$, heißt nun eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und für die Tangente $T(s)$ gilt:

$$|T(s)| := |c'_B(s)| = \left| \frac{d}{ds} c_B(s) \right| = \left| \frac{d}{dt} c(t) \frac{dt}{ds} \right| = 1. \quad (10.1.5)$$

Da viele Formeln der Differentialgeometrie bei nach Bogenlänge parametrisierten Kurven eine einfachere Darstellung haben werden wir künftig häufig diese Kurvendarstellung verwenden.

Definition 10.1.1 Sei $c_B : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann werden im Punkt s definiert:

$\kappa(s)$ als die Krümmung von c_B , und $N(s)$ als der Normalenvektor in Richtung von c''_B :

$$\kappa(s) := |c''_B(s)|, \quad c''_B(s) := \kappa(s)N(s) := \kappa(s) \frac{c''_B(s)}{|c''_B(s)|}. \quad (10.1.6)$$

Weil für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c_B(s)$ der Tangentenvektor $T(s) = c'_B(s)$ ein Einheitsvektor ist, steht der Normalenvektor $N(s) := c''_B(s)/|c''_B(s)|$ senkrecht auf dem Tangentenvektor $c'_B(s)$, denn

$$|c'_B(s)| = 1 \Rightarrow \langle c'_B(s) | c'_B(s) \rangle' = 2\langle c''_B(s) | c'_B(s) \rangle = 0. \quad (10.1.7)$$

Bei Kurven in \mathbb{E}^2 ergänzt man diese Definition noch, indem man Krümmungen im mathematisch positiven Sinn (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn) mit einem positiven Vorzeichen versieht, bei der entgegengesetzten Orientierung mit einem Minuszeichen. Mit der Matrix J für eine Linksdrehung kann man daher schreiben

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N(s) = Jc'_B(s). \quad (10.1.8)$$

$$N'(s) = Jc''_B(s) = \kappa(s)JN(s) = -\kappa(s)c'_B(s). \quad (10.1.9)$$

Die beiden Gleichungen

$$c''_B(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{und} \quad N'(s) = -\kappa(s)c'_B(s), \quad (10.1.10)$$

bzw.

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \text{und} \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s). \quad (10.1.11)$$

heißen Frenet-Gleichungen der ebenen Kurve $c_B(s)$.

Den Krümmungsvektor einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c_B(s)$ kann man auch folgendermaßen explizit darstellen. $c'_B(s)$ mit $|c'_B(s)| = 1$ und $c''_B(s)$ stehen ja orthogonal aufeinander. Seien jetzt $c'_B(s) = (c'_{B1}(s), c'_{B2}(s))^T$ und $c''_B(s) = (c''_{B1}(s), c''_{B2}(s))^T$

die Komponentendarstellungen von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ in der von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ aufgespannten zweidimensionalen Ebene, dann können wir $\kappa(s)$ auch als die Fläche des von $c'_B(s)$ und $c''_B(s)$ gebildeten Rechtecks ansehen, also

$$\kappa(s) = \det |c'_B(s), c''_B(s)| = \det \begin{vmatrix} c'_{B1}(s) & c''_{B1}(s) \\ c'_{B2}(s) & c''_{B2}(s) \end{vmatrix} = c'_{B1}(s)c''_{B2}(s) - c'_{B2}(s)c''_{B1}(s). \quad (10.1.12)$$

Beispiel: Kreis um den Ursprung mit Radius r :

$$c_B(s) := \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad c'_B(s) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{s}{r} \\ \cos \frac{s}{r} \end{pmatrix}, \quad c''_B(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \\ -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{r}. \quad (10.1.13) \quad \square$$

Gelegentlich ist es auch vorteilhaft, diese Formel für nicht nach Bogenlänge parametrisierte Kurven $c(t)$ zur Verfügung zu haben. Sei also $c_B(s) := c \circ s^{-1}$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und $c(t) := c_B \circ s$ die gleiche nach einem beliebigen Parameter t parametrisierte Kurve, dann gilt:

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = |\dot{c}(t)| = (\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{1/2}, \quad (10.1.14)$$

$$\dot{c}(t) := \frac{dc(t)}{dt} = c'_B(s) \frac{ds(t)}{dt}, \quad \ddot{c}(t) = c''_B(s) \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 + c'_B(s) \frac{d^2s(t)}{dt^2} \Rightarrow$$

$$c'_B(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\dot{s}(t)}, \quad c''_B(s) = [\ddot{c}(t) - \frac{\dot{c}(t)}{\dot{s}(t)} \ddot{s}(t)] / \dot{s}(t)^2 = \frac{\ddot{c}(t) - \dot{c}(t) \frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}}{\dot{s}(t)^2}.$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) := \kappa(s(t)) &= \det |c'_B(s), c''_B(s)| = \frac{1}{\dot{s}(t)^3} \det |\dot{c}(t), \ddot{c}(t) - \dot{c}(t) \frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}| \\ &= \frac{1}{\dot{s}(t)^3} \det |\dot{c}(t), \ddot{c}(t)| = \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (10.1.15)$$

Im \mathbb{E}^n hat eine Kurve aber natürlich mehr Freiheitsgrade als im \mathbb{E}^2 , also benötigt man zur Beschreibung einer Kurve $c_B : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n$ entsprechend mehr Bestimmungsgrößen. Eine Kurve, bei welcher die Ableitungen $c_B^{(i)}(s)$ für $i \in 1 \dots n-1$ existieren, stetig und linear unabhängig sind, heißt Frenet-Kurve. Man kann nun diese $n-1$ Vektoren nach dem üblichen Verfahren von Gram-Schmidt orthogonalisieren und anschließend noch normieren:

$$d_i := c_B^{(i)} - \sum_{k=1}^{i-1} \langle c_B^{(i)} | e_k \rangle e_k \quad \text{mit} \quad e_k := \frac{d_k}{|d_k|} \quad \text{für } i \in 1 \dots (n-1). \quad (10.1.16)$$

Diese Basis vervollständigt man noch um einen normierten Vektor e_n , der auf allen anderen e_i senkrecht steht. Dann ergibt sich:

$$\langle e_i | e_k \rangle = \delta_{ik} \quad \Rightarrow \quad \langle e_i | e_k \rangle' = \langle e_i' | e_k \rangle + \langle e_i | e_k' \rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle e_i' | e_k \rangle = -\langle e_i | e_k' \rangle.$$

Also ist die Matrix der $\langle e_i' | e_k \rangle$ schiefssymmetrisch. Weiter sind die meisten Elemente dieser Matrix gleich 0, denn e_i ist eine Linearkombination der $c_B^{(k)}$, $k = 1 \dots i$, und damit ist e_i' eine Linearkombination der $c_B^{(k)}$, $k = 2 \dots i + 1$, also folgt $\langle e_i' | e_k \rangle = 0$ für $k > i + 1$. Mit $\kappa_i := \langle e_i' | e_{i+1} \rangle$ für $i = 1 \dots n - 1$ können wir diesen Zusammenhang als ein System linearer Differentialgleichungen darstellen, die Frenetschen Gleichungen der Kurve $c_B(s)$ in \mathbb{E}^n :

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1}' \\ e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}. \quad (10.1.17)$$

Für \mathbb{E}^3 ergibt sich mit dem Binormalenvektor b und der Torsion τ also:

$$T := e_1, \quad N := e_2, \quad B := e_3, \quad \kappa := \kappa_1, \quad \tau := \kappa_2, \quad \Rightarrow$$

$$T' = \kappa N, \quad N' = -\kappa T + \tau B, \quad B' = -\tau N. \quad (10.1.18)$$

Dies sind bei Vorgabe von κ und τ neun gewöhnliche Differentialgleichungen für die Bestimmung der neun Komponenten von T, N, B , woraus dann $c_B(s) = c_{B0} + \int_0^s t(s') ds'$ bestimmt werden kann.

Frenet (1816-1900) veröffentlichte diese Gleichungen im Jahr 1847 in seiner Dissertation und 1852 in einer Publikation. Unabhängig von Frenet erfolgte eine etwas allgemeinere Formulierung durch Serret (1819-1885) im Jahr 1851, weshalb man manchmal auch von den Frenet-Serret-Gleichungen spricht (Spivak (1979), Bd. II, S. 45).

10.2 Leonhard Euler (1707 – 1783)

Leonhard Euler wurde 1707 in Basel geboren. Sein Vater, ein protestantischer Pfarrer, war mit dem Mathematiker Johann Bernoulli befreundet, der sehr schnell die Begabungen des jungen Leonhard Euler erkannte und einen großen Einfluß auf dessen Entwicklung und Ausbildung hatte. 1727 nahm Euler eine Anstellung an der Akademie St. Petersburg an. 1734 heiratete er in St. Petersburg Katharina Gsell. Von ihren dreizehn Kindern überlebten nur fünf die frühe Kindheit. Eine schwere Infektion Eulers 1735 hatte in den folgenden Jahren die völlige Erblindung seines rechten Auges zur Folge. 1741 folgte Euler einer Einladung Friedrichs des Großen an die Akademie Berlin. 1766 mußte er die Akademie nach einem Zerwürfnis mit Friedrich wieder verlassen und folgte einer Einladung Katharinas der Großen, an die Akademie St. Petersburg zurückzukehren. Gleichzeitig erblindete er nun auch auf dem linken Auge aufgrund eines Katarakts (Grauer Star). Dennoch konnte er mit der Hilfe zweier seiner Söhne und seines Sekretärs Nicolas Fuß weiter arbeiten und publizieren. 1771 verlor er bei einem Großfeuer in St. Petersburg sein Haus und fast sein Leben. 1773 starb seine Frau Katharina. Drei Jahre danach heiratete er die Halbschwester seiner verstorbenen Frau Salome Abigail Gsell. 1783 starb Euler nach dem Mittagessen mit seiner Familie mitten in einem Gespräch über den neuentdeckten Planeten Uranus an einer Hirnblutung.



Abbildung 10.1: L. Euler
E. Handmann (c. 1756), PD.
[[http://de.wikipedia.org/wiki/
Leonhard_Euler](http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)]

Euler forschte und veröffentlichte auf allen Gebieten der damaligen Mathematik und Physik: Analysis (insb. Differential-, Integral-Rechnung, Reihen, Variationsrechnung), Geometrie, Graphentheorie, Algebra, Anfänge der Topologie, Zahlentheorie, Mechanik, Astronomie, Elastizitätstheorie, Hydrodynamik, Optik, Musiktheorie. Euler gilt als einer der größten und produktivsten Mathematiker aller Zeiten. Das Euler Komitee der Schweizer Akademie der Wissenschaften hat im Jahr 1907 mit der wissenschaftlich editierten Neuveröffentlichung aller Bücher und Publikationen Eulers (*Opera Omnia*) begonnen und will diese Aufgabe mit dem letzten Band Nr.74 im Jahr 2010 vollendet haben. Danach soll die wissenschaftliche Korrespondenz Eulers in einer Zusatzreihe erscheinen.

[Quellen: de.wikipedia: Leonhard_Euler, en.wikipedia: Leonhard Euler, en.wikipedia: Opera Omnia Leonhard Euler].

10.3 Euler und die Krümmung von Flächen

Die differentialgeometrische Untersuchung gekrümmter Flächen im Raum beginnt mit Eulers Lehrbuch der Differentialrechnung in 2 Bänden (1755) und seinen daran anschließenden Einzelpublikationen (1760-1767) (Scriba u. Schreiber, 2010, S. 408).

Die Idee von Euler war es, Flächen in \mathbb{R}^3 durch die Krümmung von ebenen Kurven $c(t)$ zu beschreiben, die aus dem Schnitt der Fläche mit Normalenebenen entstehen. Wenn man nun in einem Punkt p der Oberfläche die Normalenebene um 2π rotieren läßt, dann wird diese Krümmung, die sog. Normalenkrümmung κ_T^N , der Schnittkurve von Fläche M und Normalenebene E einen Bereich von $[\kappa_{min}, \kappa_{max}]$ durchlaufen. Wir orientieren uns an Spivak (1979), Bd. II, S. 65 ff.

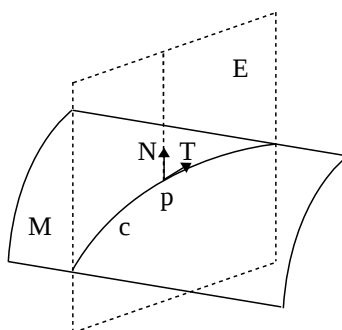


Abbildung 10.2: Krümmung von Normalenschnitten einer Fläche M

Satz 10.3.1 (Euler) Seien E eine Normalenebene durch den Punkt p der Fläche M und T eine Tangente an die Schnittkurve $c(t)$ von E und M in Punkt p . Wenn die κ_T nicht alle gleich sind, dann gibt es genau eine Tangente T_{min} in der κ minimal ist, κ_{min} , und eine Tangente T_{max} in der κ maximal ist, κ_{max} . Die beiden Tangenten T_{min} und T_{max} stehen orthogonal aufeinander und für eine Tangente T , die einen Winkel von θ mit T_{min} bildet, gilt:

$$\kappa_T^N = \kappa_{min} \cos^2 \theta + \kappa_{max} \sin^2 \theta . \quad (10.3.1)$$

Beweis: Zunächst legen wir das Koordinatensystem so, daß der Punkt p im Ursprung liegt, also $p = (0, 0, 0)^T$, und die Tangentialebene in p gerade die $x - y$ Ebene ist. Dann beschreiben wir die Oberfläche M in einer Umgebung von p als $\{(x, y, z)^T \mid z = f(x, y)\}$. Wegen unserer Wahl des Koordinatensystems gilt:

$$f(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 .$$

Jetzt sucht Euler nach einer Drehung der $x - y$ Ebene um den Normalenvektor durch p , d.h. einer Drehung um die z -Achse, so daß die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ verschwinden. Daß dies möglich ist sieht man folgendermaßen. Wenn die Drehung der

$x - y$ Ebene um θ durch die Matrix $R(\theta)$ beschrieben wird, dann gilt für die gedrehte Oberfläche M :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} := R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$f_\theta(x, y) := f(\tilde{x}, \tilde{y}) := f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\theta}{\partial y}(x, y) &= \partial_{\tilde{x}} f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (-\sin \theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{y}} f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (\cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(x, y) &= \partial_{\tilde{x}}^2 f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (-\sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ &\quad + \partial_{\tilde{y}}^2 f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \cdot (\cos \theta \sin \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(0, 0) &= [-\partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0) + \partial_{\tilde{y}}^2 f(0, 0)] \cdot (\cos \theta \sin \theta) \\ &\quad + \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} f(0, 0) \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot [\partial_{\tilde{y}}^2 f(0, 0) - \partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0)] + \cos 2\theta \cdot \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} f(0, 0). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan 2\theta = \frac{2\partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} f(0, 0)}{\partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0) - \partial_{\tilde{y}}^2 f(0, 0)} & \text{für } \partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0) \neq \partial_{\tilde{y}}^2 f(0, 0), \\ \cos 2\theta = 0, \text{ d.h. } \theta = \frac{\pi}{4} & \text{für } \partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0) = \partial_{\tilde{y}}^2 f(0, 0). \end{cases}$$

In diesem $(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ Koordinatensystem bestimmt Euler die Krümmung der Schnittkurve von M mit der $\tilde{x} - z$ Ebene und mit der $\tilde{y} - z$ Ebene mit Hilfe von 10.1.15:

$$\tilde{x} - z \text{ Ebene : } c(t) = (t, f(t, 0)),$$

$$\kappa_1 = \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0)}{(1+0)^{3/2}} = \partial_{\tilde{x}}^2 f(0, 0);$$

$$\tilde{y} - z \text{ Ebene : } c(t) = (t, f(0, t)),$$

$$\kappa_2 = \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{\partial_y^2 f(0,0)}{(1+0)^{3/2}} = \partial_y^2 f(0,0).$$

Die Krümmung der Schnittkurve von M mit einer Ebene durch die z -Achse, die mit der $\tilde{x} - z$ Ebene einen Winkel ϑ bildet, ergibt sich zu:

$$(\tilde{x} \cos \vartheta + \tilde{y} \sin \vartheta) - z \text{ Ebene : } c(t) = (t, f(t \cos \vartheta, t \sin \vartheta)),$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\dot{c}_1(t)\ddot{c}_2(t) - \dot{c}_2(t)\ddot{c}_1(t)}{(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2)^{3/2}} \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} f(t \cos \vartheta, t \sin \vartheta) \Big|_{t=0} \\ &= \cos^2 \vartheta \cdot \partial_x^2 f(0,0) + \sin^2 \vartheta \cdot \partial_y^2 f(0,0) \\ &= \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\kappa_1 \neq \kappa_2$ und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die Hauptkrümmungen $\kappa_1 < \kappa_2$ an. Damit erhalten wir $\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]$. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen sind gerade \tilde{x} und \tilde{y} und stehen damit orthogonal aufeinander. \square

Schon kurz nach Eulers Publikation konnte Meusnier de la Place (1754-1793) im Jahr 1776 die obige Krümmungsformel von Euler für allgemeine Ebenenschnitte einer Fläche M veralgemeinern.

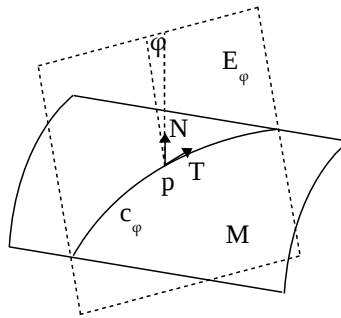


Abbildung 10.3: Krümmung von allgemeinen Ebenenschnitten einer Fläche M

Satz 10.3.3 (Meusnier) Seien E_φ eine Ebene durch den Punkt p der Fläche M , die mit der Normalenebene E durch p einen Winkel von φ bilde und κ_T^N die Krümmung der Schnittkurve $c(t)$ der Normalenebene E mit der Fläche M . Dann gilt für die Krümmung κ_T^φ der Schnittkurve $c_\varphi(t)$ von E_φ und M im Punkt p :

$$\kappa_T^\varphi \cos \varphi = \kappa_T^N. \quad (10.3.2)$$

Beweis: Seien $c(s)$ und $c_\varphi(s)$ die Schnittkurven der Ebenen E und E_φ mit der Fläche M , die durch den Punkt $p \in M$ gehen und in p gleiche Tangenten haben, d.h.:

$$p = c(0) = c_\varphi(0), \quad c'(s)|_{s=0} = c'_\varphi(s)|_{s=0}.$$

Die Tangente $T(c(s)) := c'(s)$ steht überall senkrecht auf der Normalen $N(c(s))$:

$$\langle c'(s) | N(c(s)) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle c''(s) | N(c(s)) \rangle = -\langle c'(s) | N'(c(s)) \rangle.$$

An der Stelle p , also bei $s = 0$, gilt nun mit $T(p) = c'(0) = c'_\varphi(0)$:

$$\langle c'_\varphi(0) | N(p) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle c''_\varphi(0) | N(p) \rangle = -\langle c'_\varphi(0) | N'(p) \rangle.$$

Und mit 10.1.10 $c''(s) = \kappa(s)N(c(s))$ folgt :

$$\begin{aligned} \kappa_T^N(0) &= \langle c''(0) | N(p) \rangle = -\langle c'(0) | N'(p) \rangle \\ &= -\langle c'_\varphi(0) | N'(p) \rangle = \langle c''_\varphi(0) | N(p) \rangle \\ &= \langle \kappa_T^\varphi(0) N_\varphi(p) | N(p) \rangle = \kappa_T^\varphi(0) \langle N_\varphi(p) | N(p) \rangle \\ &= \kappa_T^\varphi(0) \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

□

11 Tangentialvektoren und Differentialformen

11.1 Differentialformen

Bevor wir mit der Beschreibung von Geodäten und der Gaußschen Flächentheorie beginnen, soll hier kurz in die von uns verwendete Schreibweise der Differentialformen und deren Rücktransport eingeführt werden. Daneben werden die Begriffe von *Immersionen* und *Einbettungen* definiert.

Wir verwenden die von Élie Cartan bereits 1899 eingeführte Sprache der Differentialformen. Der Cartan-Formalismus blieb lange Zeit trotz seiner großen Vorteile an Klarheit und Koordinatenunabhängigkeit unbeachtet und hat sich in der Mathematik, beginnend mit der Differentialgeometrie, erst nach dem 2. Weltkrieg durchgesetzt, in der theoretischen Physik sogar erst Anfang der 1970'er Jahre.

Sei $f : M \rightarrow N$ mit $m := \dim M \leq n := \dim N$ eine glatte (d.h. C^∞) Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N . Man bezeichnet dann mit f_* die durch f induzierte *Tangentialabbildung* (auch *Differential* df , oder *pushforward* genannt). Wenn $T_p M := \{V := V^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \mid V^\mu \in \mathbb{R}, \mu = 1 \dots m\}$ der Raum der Tangentialvektoren am Punkt $p \in M$ ist und $T_{f(p)} N := \{W := W^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mid W^i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n\}$ der Raum der Tangentialvektoren am Punkt $f(p) \in N$, dann wird f_* definiert als:

$$f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad f_* V(g) := V(g \circ f), \quad \text{mit } g : N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad (11.1.1)$$

$$W^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g)|_{f(p)} = V^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}(g \circ f)|_p,$$

und mit $g := x^i$ folgt

$$W^i|_{f(p)} = V^\mu \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}|_{f(p)} V^\mu, \quad (11.1.2)$$

d.h. die Komponenten von $V \in T_p M$ werden mit der Jacobi-Matrix $\frac{\partial x}{\partial u}$ in die Komponenten von $W \in T_{f(p)} N$ abgebildet.

Der Dualraum des Tangentialraums $T_p M$ ist der Kotangentialraum $T_p^* M$, der lineare Raum der 1-Formen, oder Covektoren) am Punkt $p \in M$:

$$T_p^* M := \{w := w_\mu du^\mu \mid w_\mu \in \mathbb{R}, \langle du^\mu \mid \frac{\partial}{\partial u^\nu} \rangle := \frac{\partial}{\partial u^\nu}(du^\mu) = \delta_\nu^\mu, \mu, \nu = 1 \dots m\}, \quad (11.1.3)$$

$$V \in T_p M, w \in T_p^* M \quad \Rightarrow \quad \langle w | V \rangle = V(w) = w_\mu V^\mu .$$

In der älteren physikalischen Literatur werden die $V \in T_p M$ als kontravariante Vektoren bezeichnet und die $w \in T_p^* M$ als kovariante Vektoren.

Analog zur Tangentialabbildung f_* bei Vektoren definiert man eine entsprechende induzierte Abbildung f^* für 1-Formen, den sog. *Rücktransport* (auch *pullback* genannt). Sei $T_{f(p)}^* N := \{\xi := \xi_i dx^i \mid \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n\}$, dann wird f^* definiert als:

$$f^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M, \quad \langle f^* \xi | V \rangle := \langle \xi | f_* V \rangle . \quad (11.1.4)$$

Damit folgt, daß die Komponenten von $\xi \in T_{f(p)}^* N$ mit der transponierten Jacobi-Matrix $(\frac{\partial x}{\partial u})^T$ in die Komponenten von $w \in T_p^* M$ abgebildet werden, denn:

$$\begin{aligned} \langle f^* \xi | V \rangle &= w_\mu V^\mu = \xi_i W^i |_{f(p)} = \xi_i V^\mu \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu} |_{f(p)} \quad \Rightarrow \\ w_\mu &= \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu} |_{f(p)} = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T |_{f(p)} \right)_\mu^i \xi_i . \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

Hinweis: Wenn $f : M \rightarrow N$ nicht injektiv ist, dann gibt es Punkte $p \neq p' \in M$ mit $f(p) = f(p')$ und möglicherweise $f_* V(p) \neq f_* V(p')$, d.h. Vektorfelder $V(p) \in T_p M$ werden nicht auf Vektorfelder in $T_{f(p)} N$ abgebildet! Hier verhalten sich Felder von 1-Formen deutlich freundlicher in der Handhabung, denn für ein 1-Formenfeld $\xi(f(p)) \in T_{f(p)}^* N$ existiert immer ein eindeutiges 1-Formenfeld $f^* \xi \in T_p^* M$.

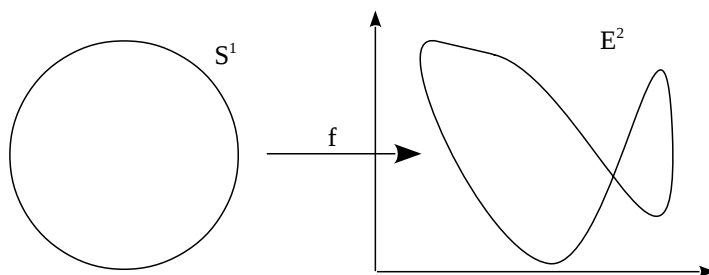


Abbildung 11.1: eine Immersion von $S^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$, die keine Einbettung ist

Definition 11.1.1 Eine glatte Funktion (d.h. C^∞) zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $f : M \rightarrow N$ mit $m = \dim M \leq n = \dim N$ heißt eine Immersion von M in N , wenn der Tangentialraum $T_p M$ an jedem Punkt $p \in M$ injektiv in den Tangentialraum $T_{f(p)} N$ abgebildet wird, oder kürzer gesagt: $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist eine Injektion.

Wenn zusätzlich auch noch f selbst injektiv ist, so spricht man von einer Einbettung.

Wir werden hier und im Folgenden eine zweidimensionale Fläche in \mathbb{E}^3 als die Immersion einer Menge $U \subset \mathbb{E}^2$ in \mathbb{E}^3 beschreiben. In der Verallgemeinerung auf n Dimensionen nennen wir eine Immersion von $U \subset \mathbb{E}^{n-1}$ in \mathbb{E}^n eine Hyperfläche in \mathbb{E}^n .

Differentialformen höherer Stufe werden nach Élie Cartan folgendermaßen definiert:

Das Civita-Symbol $\epsilon_{i_1, \dots, i_k}$ ist das Vorzeichen der Permutation π der Zahlen $(1, 2, \dots, k)$ in die Zahlen (i_1, i_2, \dots, i_k) :

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \\ i_1, i_2, \dots, i_k \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{i_1, \dots, i_k} := \epsilon^{i_1, \dots, i_k} := \operatorname{sgn} \pi. \quad (11.1.6)$$

Da es $k!$ Permutationen der Zahlen $(1, 2, \dots, k)$ gibt, folgt sofort (Summenkonvention):

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_k} \epsilon^{i_1, \dots, i_k} = k!. \quad (11.1.7)$$

Definition 11.1.2 Das äußere Produkt \wedge^r der 1-Formen dx^{μ_1} bis dx^{μ_r} ist definiert als:

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} &:= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) dx^{\pi(\mu_1)} \otimes dx^{\pi(\mu_2)} \otimes \dots \otimes dx^{\pi(\mu_r)} \\ &= \epsilon_{\pi(\mu_1), \dots, \pi(\mu_r)} dx^{\pi(\mu_1)} \otimes dx^{\pi(\mu_2)} \otimes \dots \otimes dx^{\pi(\mu_r)}. \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

Damit wird eine r -Differentialform an einem Punkt $p \in M$ definiert als:

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (11.1.9)$$

Der Vektorraum der r -Differentialformen an einem Punkt $p \in M$ heißt $\Omega_p^r(M)$. Früher sprach man bei den Koeffizienten $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_r}$ der r -Differentialformen als von r -stufigen, antisymmetrischen, kovarianten Tensoren.

Jetzt kann man auf

$$\Omega_p^*(M) := \Omega_p^0(M) \oplus \Omega_p^1(M) \oplus \dots \oplus \Omega_p^m(M) \quad (11.1.10)$$

ein Produkt definieren, wodurch $\Omega_p^*(M)$ zu einer Algebra wird. Seien also $\omega \in \Omega_p^r(M)$, $\xi \in \Omega_p^s(M)$ und $V_i \in T_p M$, $1 \leq i \leq r+s$, dann wird das äußere Produkt $\omega \wedge \xi$ definiert als:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \xi(V_1, \dots, V_{r+s}) &:= \frac{1}{r!s!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} \xi_{\mu_{r+1}, \dots, \mu_{r+s}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{r+s}}(V_1, \dots, V_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \omega(V_{\pi(1)}, \dots, V_{\pi(r)}) \xi(V_{\pi(r+1)}, \dots, V_{\pi(r+s)}). \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Für $r+s > m$ ist $\omega \wedge \xi := 0$.

Seien $\omega \in \Omega_p^r(M)$ und $\xi \in \Omega_p^s(M)$, dann gilt

$$\omega \wedge \xi = (-1)^{rs} \xi \wedge \omega, \quad (11.1.12)$$

denn

$$\begin{aligned} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_s} \\ &= (-1)^r dx^{\nu_1} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_s} \\ &= (-1)^{rs} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_s} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \end{aligned}$$

Daraus folgt insbesondere für $\omega \in \Omega_p^r(M)$

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad \text{für } r \text{ ungerade.} \quad (11.1.13)$$

Da es $\binom{m}{r}$ verschiedene Möglichkeiten gibt $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ aus $(1, 2, \dots, m)$ auszuwählen, ist

$$\dim(\Omega^r) = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}. \quad (11.1.14)$$

Daraus folgt auch sofort, daß

$$\dim(\Omega^{m-r}) = \binom{m}{m-r} = \frac{m!}{(m-r)!r!} = \dim(\Omega^r), \quad (11.1.15)$$

eine Tatsache, wovon wir später bei der Einführung des Hodge-Stern-Operators noch Gebrauch machen werden.

Eine Möglichkeit um r -Differentialformen auf $(r-1)$ -Differentialformen zu verjüngen ist das sog. *innere Produkt* der r -Differentialform ω mit einem Vektor X .

Definition 11.1.3 Seien $\omega \in \Omega^r(M)$ und $X \in T_p(M)$, dann ist das innere Produkt definiert als:

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X, X_1, \dots, X_{r-1} \in T_p(M),$$

$$i_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M), \quad i_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1}) \quad \text{d.h.} \quad (11.1.16)$$

$$i_X \omega = \frac{1}{(r-1)!} X^\mu \omega_{\mu \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (11.1.17)$$

11.2 Rücktransport von Differentialformen höherer Stufe

Häufig benötigt man auch den Rücktransport von Differentialformen höherer Stufe. Seien jetzt $m := \dim M \leq \dim N$, $f : M \rightarrow N$ eine injektive Abbildung mit $x^\mu := f(u^\mu)$, $\{\frac{\partial}{\partial u^\mu} | \mu = 1 \dots m\}$ eine Basis von $T_p M$, $\{du^\mu | \mu = 1 \dots m\}$ eine Basis von $T_p^* M$ und $V_\alpha = V_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} \in T_p M$ mit $\alpha = 1 \dots k \leq m$ linear unabhängige Vektoren. Dann wird der Rücktransport der k -Form $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ definiert als

$$(f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k))(V_1, \dots, V_k) := (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)(f_* V_1, \dots, f_* V_k) . \quad (11.2.1)$$

Im Zusammenhang mit k -Formen tauchen häufig auch Determinanten auf, die wir im Folgenden ebenfalls mit Hilfe des oben eingeführten Civita-Symbols $\epsilon_{i_1, \dots, i_k}$ beschreiben.

Die Determinante einer k -dimensionalen Matrix A wird dann definiert als

$$\det(A) := \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{1i_1} \cdot \dots \cdot A_{ki_k} . \quad (11.2.2)$$

Statt nach Zeilen kann die Determinante mit einer Umsortierung auch nach Spalten entwickelt werden

$$\det(A) := \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 1} \cdot \dots \cdot A_{i_k k} . \quad (11.2.3)$$

Beweis: Sei $i_m = \pi(m) = 1 \Rightarrow \pi^{-1}(1) = m$, dann bringen wir den Faktor mit dem Doppelindex (m, i_m) , d.h. $A_{m, i_m} = A_{m, \pi(m)} = A_{\pi^{-1}(1), 1}$ ganz nach links, usw., und erhalten

$$\begin{aligned} \det(A) &= \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{1i_1} \cdot \dots \cdot A_{ki_k} = \epsilon^{\pi(1), \dots, \pi(k)} A_{1, \pi(1)} \cdot \dots \cdot A_{k, \pi(k)} \\ &= \epsilon^{\pi(1), \dots, \pi(k)} A_{\pi^{-1}(1), 1} \cdot \dots \cdot A_{\pi^{-1}(k), k} \\ &= \epsilon^{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(k)} A_{\pi^{-1}(1), 1} \cdot \dots \cdot A_{\pi^{-1}(k), k} \\ &= \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 1} \cdot \dots \cdot A_{i_k k} . \quad \square \end{aligned}$$

Hilfreich ist auch die Formel

$$\epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k j_k} = \det(A) \epsilon_{j_1, \dots, j_k} , \quad (11.2.4)$$

die ebenso wie die vorhergehende Formel mit einer Umsortierung bewiesen wird.

Beweis: Sei $j_m = \pi(m) = 1 \Rightarrow \pi^{-1}(1) = m$, $\pi^{-1}(i_1) = i_m$, dann bringen wir den Faktor mit dem Index i_m, j_m , d.h. $A_{i_m, j_m} = A_{i_m, \pi(m)} = A_{\pi^{-1}(i_1), 1}$ ganz nach links, usw., und erhalten

$$\epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k j_k} = \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \pi(1)} \cdot \dots \cdot A_{i_k, \pi(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon^{i_1, \dots, i_k} A_{\pi^{-1}(i_1), 1} \cdot \dots \cdot A_{\pi^{-1}(i_k), k} \\
&= \epsilon^{\pi^{-1}(i_1), \dots, \pi^{-1}(i_k)} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) A_{\pi^{-1}(i_1), 1} \cdot \dots \cdot A_{\pi^{-1}(i_k), k} \\
&= \epsilon^{l_1, \dots, l_k} \operatorname{sgn}(\pi) A_{l_1, 1} \cdot \dots \cdot A_{l_k, k} \\
&= \det(A) \operatorname{sgn}(\pi) = \det(A) \epsilon_{j_1, \dots, j_k} . \quad \square
\end{aligned}$$

Eine wichtige Beobachtung ist, daß der Rücktransport f^* die Algebra der äußeren Produkte erhält.

Lemma 11.2.3

$$f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = f^* dx^1 \wedge \dots \wedge f^* dx^k = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}\right)(du^1 \wedge \dots \wedge du^k) . \quad (11.2.5)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&(f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k))(V_1, \dots, V_k) = (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)(f_* V_1, \dots, f_* V_k) \\
&= (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)\left(f_* V_1^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}}, \dots, f_* V_k^{\mu_k} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_k}}\right) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot V_k^{\mu_k} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)\left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial x^{j_k}}{\partial u^{\mu_k}} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot V_k^{\mu_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} \\
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} (du^{\mu_1} \otimes \dots \otimes du^{\mu_k})(V_1, \dots, V_k) \\
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} \epsilon^{\mu_1, \dots, \mu_k} (du^1 \wedge \dots \wedge du^k)(V_1, \dots, V_k) \\
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^k} (du^1 \wedge \dots \wedge du^k)(V_1, \dots, V_k) \\
&= \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}\right)(du^1 \wedge \dots \wedge du^k)(V_1, \dots, V_k) .
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
&(f^*(dx^1) \wedge \dots \wedge f^*(dx^k))(V_1, \dots, V_k) = \epsilon_{i_1, \dots, i_k} (f^*(dx^{i_1}) \otimes \dots \otimes f^*(dx^{i_k}))(V_1, \dots, V_k) \\
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} (f^*(dx^{i_1}))(V_1) \cdot \dots \cdot (f^*(dx^{i_k}))(V_k) \\
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1}(f_* V_1) \cdot \dots \cdot dx^{i_k}(f_* V_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} (f_* V_1^{\mu_1} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_1}}) \cdot \dots \cdot dx^{i_k} (f_* V_1^{\mu_k} \frac{\partial}{\partial u^{\mu_k}}) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot V_1^{\mu_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \left(\frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \right) \cdot \dots \cdot dx^{i_k} \left(\frac{\partial x^{j_k}}{\partial u^{\mu_k}} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) \\
&= V_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot V_1^{\mu_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{\mu_k}} .
\end{aligned}$$

Also ist

$$(f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k))(V_1, \dots, V_k) = (f^*(dx^1) \wedge \dots \wedge f^*(dx^k))(V_1, \dots, V_k) . \quad \square$$

11.3 Äußere Ableitung von Differentialformen

Der Begriff der *äußeren Ableitung*, oder auch *Cartan-Ableitung*, verallgemeinert die 'gewöhnliche' Ableitung auf die von Élie Cartan eingeführten Differentialformen.

Sei $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r -Form, dann ist die äußere Ableitung definiert als

Definition 11.3.1

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(M) \quad \Rightarrow$$

$$d_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M) \quad \text{mit} \quad d\omega := d_r \omega := \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \omega_{i_1 \dots i_r} \right) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} . \quad (11.3.1)$$

Eine außerordentliche wichtige Eigenschaft der äußeren Ableitung ist, daß $d_r \omega$ eine geschlossene $(r+1)$ -Form ist, d.h.

$$d_{r+1}(d_r \omega) = 0 \quad \text{oder kurz} \quad d^2 = 0 , \quad (11.3.2)$$

denn

$$d^2 \omega = d_{r+1} d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j \partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0 ,$$

da $(\partial_j \partial_k \omega_{i_1 \dots i_r})$ symmetrisch und $dx^j \wedge dx^k$ antisymmetrisch unter der Vertauschung von j und k sind. Eine r -Form, die in $\ker d_r$ liegt, heißt eine *geschlossene* r -Form, eine r -Form, die in $\text{Im } d_{r-1}$ liegt, heißt eine *exakte* r -Form. Aus $d^2 = 0$ folgt, daß $\ker d_r \supset \text{Im } d_{r-1}$. Dies gibt Anlaß zur Definition der folgenden Quotientengruppe:

$$r\text{-te de Rham Kohomologiegruppe} := \frac{\ker d_r}{\text{Im } d_{r-1}} . \quad (11.3.3)$$

Mit den de Rham Kohomologiegruppen werden wir uns später noch ausführlicher beschäftigen.

Hier soll noch der Rücktransport f^* der äußeren Ableitung einer r -Form betrachtet werden.

Satz 11.3.2 Sei $f : M \rightarrow N$ eine injektive Abbildung und $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r -Form, dann gilt

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) \quad \text{bzw. genauer} \quad d_r(f^*\omega) = f^*(d_r\omega). \quad (11.3.4)$$

Beweis: Zunächst betrachten wir eine 0-Form ω , d.h. eine Funktion $\omega : N \rightarrow \mathbb{R}$. Seien weiter $m := \dim M \leq n := \dim N$, $f : M \rightarrow N$ injektiv, $\{u^\mu | \mu = 1 \dots m\}$ eine Basis von M , $\{x^k | k = 1 \dots n\}$ eine Basis von N und $X \in T_pM$. Für die 0-Form ω ist die äußere Ableitung gleich dem einfachen Differential, also $d_0 = d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(\omega \circ f) = d(\omega \circ f) = d(\omega(x(u))) \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial u^\mu} du^\mu = f^*\left(\frac{\partial \omega}{\partial x^k} dx^k\right) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Jetzt sei ω eine r -Form, dann folgt mit dem gerade gezeigten Rücktransport von Funktionen:

$$\begin{aligned} d_r(f^*\omega) &= d_r f^*\left[\left(\frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\right] \\ &= d_r\left[\left(\frac{1}{r!} f^* \omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) (f^* dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^* dx^{i_r})\right] \\ &= d_r\left[\left(\frac{1}{r!} f^* \omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) (df^* x^{i_1}) \wedge \dots \wedge (df^* x^{i_r})\right] \\ &= \left(\frac{1}{r!} df^* \omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) \wedge (df^* x^{i_1}) \wedge \dots \wedge (df^* x^{i_r}) \\ &= \left(\frac{1}{r!} f^* d\omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) \wedge (f^* dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^* dx^{i_r}) \\ &= f^*\left[\left(\frac{1}{r!} d\omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\right] \\ &= f^* d_r\left[\left(\frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r}(x)\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}\right] \\ &= f^*(d_r\omega). \end{aligned} \quad \square$$

11.4 Integrale von Differentialformen und Rücktransport

Sei jetzt $f : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion (d.h. C^∞) zwischen zwei orientierbaren differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N der Dimension $m = \dim M = \dim N$. Wenn nun f zusätzlich invertierbar ist, also ein Diffeomorphismus, und ω eine k -Form

auf N mit $k \leq m$, und $U \subset M$ mit $k \leq \dim U \leq m$, dann ist $\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_U \neq 0$, und es folgt mit 11.2.5 sofort

$$\begin{aligned} \int_{f(U)} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) &= \int_{f^{-1}(f(U))} |\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})| (du^1 \wedge \dots \wedge du^k) = \\ &= \operatorname{sgn}(\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_{u_0 \in U}) \int_U \det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}) (du^1 \wedge \dots \wedge du^k) \\ &= \pm \int_U f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) \end{aligned}$$

und mit der Linearität von f^* also für jede k -Form ω

$$\int_{f(U)} \omega = \operatorname{sgn}(\det(\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu})_{u_0 \in U}) \int_U f^* \omega = \pm \int_U f^* \omega. \quad (11.4.1)$$

Hierbei gilt das positive Vorzeichen für Abbildungen f , welche die Orientierung der Basis erhalten und das negative Vorzeichen für Abbildungen f , welche die Orientierung umkehren.

12 Geodäten

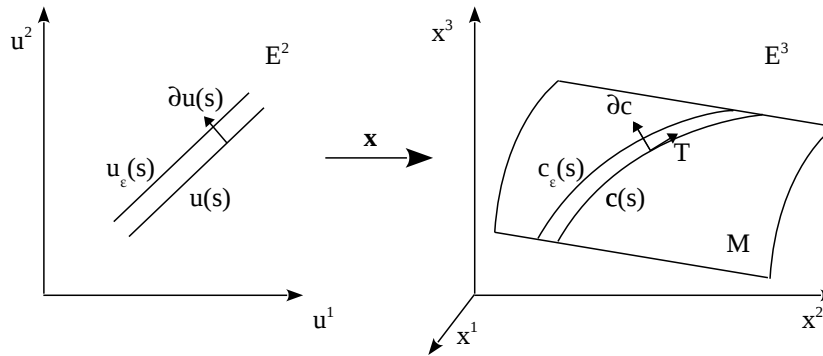


Abbildung 12.1: Immersion einer Kurve von \mathbb{E}^2 in eine Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

Bislang haben wir Kurven in der Ebene \mathbb{E}^2 , im Raum \mathbb{E}^3 , und Kurven als Schnitte von Flächen in \mathbb{E}^3 mit Normalenebenen betrachtet. Nachdem Euler die Variationsrechnung entwickelt hatte kam es zwischen ihm und Johann Bernoulli (1667-1748) zu einem schriftlichen Austausch über den Begriff der Geodäte, als der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten einer Fläche (Scriba u. Schreiber, 2010).

Im Vorangehenden wurde die Krümmung $\kappa(s)$ einer nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n$ als den Betrag $|c''(s)|$ definiert (10.1.6). Wenn wir nun die Immersion einer Kurve $u(s)$ in \mathbb{E}^m in eine Kurve $c(s)$ in einer m -dimensionalen Hyperfläche M in \mathbb{E}^{m+1} betrachten, dann wird im Allgemeinen die Richtung des Vektors $c''(s)$ nicht mit dem Normalenvektor der Fläche M am Punkt $c(s)$ übereinstimmen. Wir zerlegen daher $c''(s)$, und damit $\kappa(s)$, in einen Normalen- und einen Tangentialanteil:

$$c''(s) = c''^N(s) + c''^T(s). \quad (12.0.1)$$

Die normale Komponente $|c''^N(s)|$ ist die bereits oben diskutierte Eulersche Normalenkrümmung $\kappa_T^N(s)$. Die tangential Komponente $|c''^T(s)|$ heißt geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ und soll jetzt betrachtet werden. Der wesentliche Punkt ist hier, wie wir sogleich sehen werden, daß die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ intrinsisch in der Fläche M definiert ist und daher ohne Bezugnahme auf den umgebenden Raum \mathbb{E}^{m+1} auskommt.

Wir orientieren uns an Spivak (1979) (Bd. II, S. 115 ff.), Eschenburg u. Jost (2007) (S. 61 ff.) und Frankel (2004) (S. 232 ff.).

Definition 12.0.1 Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : (a, b) \rightarrow M$ in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt Geodäte, wenn $c''^T(s) = 0$ für $s \in (a, b)$ ist, d.h. wenn die geodätische Krümmung $\kappa_g(s) := |c''^T(s)| = 0$ ist.

Eine Geodäte ist also eine Kurve verschwindender Krümmung in der Hyperfläche M in der sie verläuft. Wenn diese m -dimensionale Hyperfläche M in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet ist, z.B. in \mathbb{E}^n mit $m < n$, dann wird jedoch die Normal-Komponente der Krümmung der Geodäten im Allgemeinen nicht verschwinden.

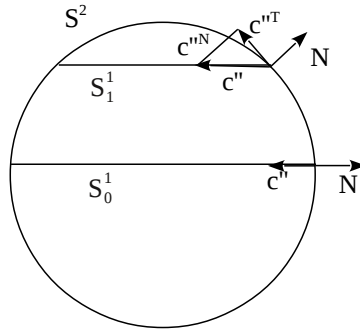


Abbildung 12.2: der Großkreis S_0^1 auf der Kugel S^2 ist eine Geodäte

Beispiel: Bei einem Großkreis S_0^1 auf einer Kugel S^2 , d.h. einem Kreis S^1 mit Kreismittelpunkt gleich Kugelmittelpunkt, hat c'' keine Tangentialkomponente, also ist der Großkreis eine Geodäte. \square

Wenn $c(t)$ die Geodätengleichung $c''^T(t) = 0$ erfüllt, dann ist die Parametrisierung t proportional zur Bogenlänge, denn $c'(t)$ ist stets tangential bzgl. M , d.h. $c'(t) = c'^T(t)$:

$$0 = \langle c''^T | c'^T \rangle = \langle c'' | c'^T \rangle = \langle c'' | c' \rangle = \frac{1}{2} \langle c' | c' \rangle' \Rightarrow |c'(t)| = k = \text{const} .$$

Durch Übergang zu $s := k \cdot t + t_0$ und $c_B(s) := c(t)$ folgt $|c'_B(s)| = 1$. Dies können wir auch so ausdrücken: eine Geodäte ist invariant unter einer affinen Transformation. Daher nehmen wir im Folgenden eine Geodäte stets als nach Bogenlänge parametrisiert an!

Sei jetzt $a(s)$ eine Kurve $a : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^m$ und $c(s)$ die Immersion dieser Kurve mittels der Abbildung \mathbf{x} in eine m -dimensionale Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$, also $c(s) := \mathbf{x}(a(s))$. Die Koordinatensysteme seien $\{u^\mu\}$ in \mathbb{E}^m und $\{x^i\}$ in \mathbb{E}^{m+1} . Wir wollen jetzt die Geodätengleichung $c''^T(s) = 0$ in Bezug auf die Kurve $a(s)$ und das Koordinatensystem $\{u^\mu\}$ betrachten.

Definition 12.0.3 Seien $Z(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in einer m -dimensionalen Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$, $T(t) \subset M$ der Tangenten-Einheitsvektor zu $c(t)$ und $N(t)$ der Normalen-Einheitsvektor mit $N(t) \perp M$ am Punkt $c(t)$, dann ist der Vektor der intrinsischen oder kovarianten Ableitung $\frac{\nabla Z(t)}{dt}$ definiert als die Projektion der gewöhnlichen Ableitung $\frac{dZ(t)}{dt}$ in die Tangentialebene von M :

$$\nabla Z(T) := \nabla_T Z := \frac{\nabla Z(t)}{dt} := \frac{dZ(t)}{dt} - \langle \frac{dZ(t)}{dt} | N \rangle N . \tag{12.0.2}$$

Sei jetzt also $c(s)$ die Immersion $\mathbf{x}(u(s)) \subset M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ und sei $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert. Wenn wir zunächst $c(s)$ als Raumkurve in \mathbb{E}^{m+1} betrachten, dann ist $c'(s) = T(s)$ und $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds} = \kappa(s)N_0(s)$ mit dem Normalen-Einheitsvektor $N_0(s)$ von $c(s)$, der senkrecht auf $T(s)$ steht. Im Allgemeinen steht $N_0(s)$ im Gegensatz zu $N(s)$ aber nicht senkrecht auf M . Die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ ist jetzt als die Projektion von $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds}$ in die Tangentialebene von M am Punkt $c(s)$ definiert:

$$\kappa_g := |c''^T(s)| = \left| \left(\frac{dT(s)}{ds} \right)^T \right| = \left| \frac{\nabla T(s)}{ds} \right| \quad (12.0.3)$$

und die Geodätengleichung folgt also als

$$c''(s)^T = \frac{\nabla T}{ds} = 0. \quad (12.0.4)$$

Häufig stellt man diese Geodätengleichung auch in den lokalen Koordinaten $\{u^\mu\}$ von \mathbb{E}^m dar. Die erste Ableitung von $\mathbf{x}(u)$ an einem Punkt u_0 liegt in der Tangentialebene $T_{\mathbf{x}(u_0)}M$:

$$\partial_\mu \mathbf{x}(u) := \frac{\partial}{\partial u^\mu} \mathbf{x}(u).$$

Die zweite Ableitung von $\mathbf{x}(u)$ an einem Punkt u_0 hat einen Tangential- und einen Normalenanteil:

$$\partial_\mu \partial_\nu \mathbf{x}(u) := \left[\frac{\partial^2}{\partial u^\mu \partial u^\nu} \mathbf{x}(u) \right]^T + \left[\frac{\partial^2}{\partial u^\mu \partial u^\nu} \mathbf{x}(u) \right]^N =: \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}(u) + b_{\mu\nu} N.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} T &:= \frac{\partial \mathbf{x}}{ds} = \partial_\nu \mathbf{x} \frac{du^\nu}{ds} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{ds^2} &= \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{x} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} + \partial_\nu \mathbf{x} \frac{d^2 u^\nu}{ds^2} \\ &= (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x} + b_{\mu\nu} N) \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} + \partial_\nu \mathbf{x} \frac{d^2 u^\nu}{ds^2} \quad \Rightarrow \\ \frac{\nabla T}{ds} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{ds^2} \right)^T = \left(\frac{d^2 u^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} \right) \partial_\lambda \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (12.0.5)$$

Also lautet die Geodätengleichung einer Kurve $c(s) = \mathbf{x}(u(s)) \subset M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ in den lokalen Koordinaten $\{u^\alpha\}$ von \mathbb{E}^m :

$$\frac{\nabla T}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 u^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} = 0. \quad (12.0.6)$$

Dies ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades, und diese hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte u_0 und $T_0 = T(u_0)$ in einer geeigneten Umgebung von u_0 eine eindeutige Lösung (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238).

13 Euler-Charakteristik von konvexen Polyedern

Wir unterbrechen an dieser Stelle unsere Betrachtung der Krümmung von Flächen in \mathbb{E}^3 für einen Augenblick und wenden uns einem wichtigen topologischen Resultat von Euler zu, der Euler-Charakteristik. Später werden wir uns mit weitreichenden Verallgemeinerungen dieses Resultats von Euler beschäftigen.

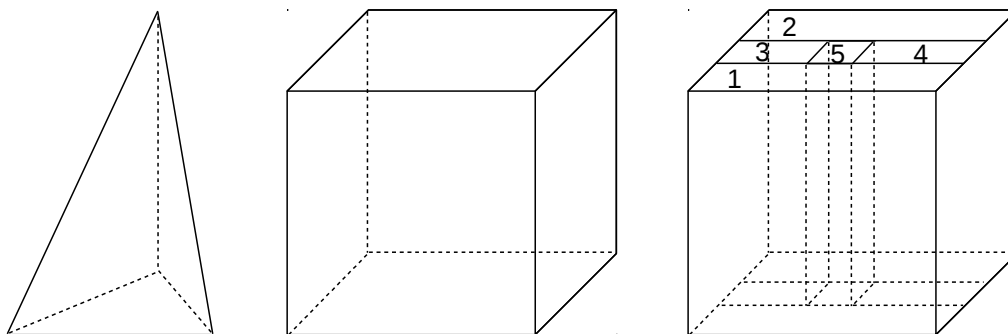


Abbildung 13.1: Polyeder mit Geschlecht 0 und 1

Die Euler-Charakteristik wird gelegentlich auch Euler-Poincaré-Charakteristik genannt. Euler betrachtete in den Jahren 1752-1753 reguläre Polyeder (Platonische Körper) in \mathbb{E}^3 und fand dabei seine berühmte Polyeder-Formel. Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen des Polyeders, dann gilt für die Euler-Charakteristik χ :

$$\chi := e - k + f = 2. \quad (13.0.1)$$

Bei der dreiseitigen Pyramide zählen wir $e = 4$, $k = 6$, $f = 4$, also $\chi = 2$, beim konvexen Quader erhalten wir $e = 8$, $k = 12$, $f = 6$, also wieder $\chi = 2$.

Euler hatte sich gewundert, daß dieser einfache Zusammenhang noch niemandem zuvor aufgefallen war. Was Euler jedoch nicht wissen konnte war, daß tatsächlich schon Descartes (1596-1650) in den Jahren 1619-1621 einen Aufsatz über Polyeder verfaßt hatte, in dem er diesen Zusammenhang hergeleitet hatte. Descartes Manuskript wurde nie publiziert, jedoch 1675 oder 1676 von Leibniz (1646-1716) in Paris aus dem Nachlaß von Descartes handschriftlich kopiert und schließlich erst 1860 mit dem Nachlaß von Leibniz veröffentlicht (Phillips, 2013).

Eppstein (2013) hat im Internet einen schönen Artikel mit dem Titel „Twenty Proofs of Euler’s Formula: $V-E+F=2$ “ veröffentlicht, der zeigt, wie diese geometrisch-topologische Frage bis heute immer wieder zu neuen und kreativen Antworten geführt hat. Wir folgen hier dem 9. Beweis von Eppstein, der wohl auf Adrien-Marie Legendre (1752–1833) zurückgeht.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der Polyeder 'klein' ist, d.h. im Innern einer Einheitskugel S^2 liegt und daß der Kugelmittelpunkt irgendwo innerhalb des Polyeders liegt. Als nächstes triangulieren wir die Oberfläche des Polyeders, d.h. wir ersetzen alle Flächen durch eine Summe von Dreiecken. Wenn wir jetzt nach der Summe aller Dreieckskanten k fragen, so finden wir $\frac{3}{2}$ mal so viele Kanten wie Dreiecksflächen f , denn jedes Dreieck hat 3 Kanten, teilt sich aber jede Kante mit einem Nachbardreieck.

$$k = \frac{3}{2}f . \quad (13.0.2)$$

Wenn wir jetzt jede Dreieckskante der Oberfläche des Polyeders vom Kugelmittelpunkt auf die Kugeloberfläche projizieren, so erhalten wir als Bild der Dreieckskante ein Segment eines Großkreises. Also wird jedes Dreieck des Polyeders auf ein sphärisches Dreieck auf S^2 abgebildet. Für die Fläche eines sphärischen Dreiecks mit den Innenwinkeln α_i auf der Einheitskugel ($r = 1$) hatte Harriot gefunden (9.0.2):

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = A + \pi .$$

Jetzt summieren wir diesen Ausdruck über alle Dreiecksflächen und erhalten:

$$\sum_{m=1}^f \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \sum_{m=1}^f (A + \pi) = 4\pi + f\pi , \quad (13.0.3)$$

denn die Summe über alle sphärischen Dreiecksflächen A ist ja gerade die gesamte Kugeloberfläche.

Andererseits können wir die Winkelsumme $\sum_{i=1}^3 \alpha_i$ auch über alle Ecken (Vertizes) E durchführen und erhalten dann:

$$\sum_{n=1}^e \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 2\pi e . \quad (13.0.4)$$

Die Gesamtwinkelsummen 13.0.3 und 13.0.4 müssen gleich sein, unabhängig davon, ob wir über Flächen oder Ecken summieren. Also folgt

$$4\pi + f\pi = 2\pi e \quad \Rightarrow \quad f = 2e - 4 \quad \Rightarrow \quad 3f = 2e - 4 + 2f \quad \Rightarrow$$

$$2k = 2e - 4 + 2f \quad \Rightarrow \quad \chi := e - k + f = 2 . \quad (13.0.5)$$

Natürlich stellt sich nun die Frage, ob dieses Ergebnis von der speziellen Form der Triangulierung abhängt? Wenn wir aus einem Dreieck zwei Dreiecke machen, indem wir einen Eckpunkt mit irgendeinem Punkt auf der gegenüberliegenden Kante verbinden, so erhöhen sich e um 1, k um 2, f um 1 und $\chi = e - k + f$ bleibt unverändert. \square

Die ersten beiden Abbildungen zeigen konvexe Polyeder. Die dritte Abbildung zeigt einen Quader mit einem 'Loch', bzw. 'offenen Kanal'. Wir finden hier $e = 2 \cdot 12 = 24$, $k = 4 + 2 \cdot (6 + 10) + 4 = 40$, $f = 4 + 2 \cdot 4 + 4 = 16$, also $\chi = 0$. Dies kann man eleganter darstellen, indem man diesen Quader kompakt aus fünf Teilquadern zusammensetzt, wobei der fünfte Quader gerade als Kanal in der Mitte liegen möge. Den aus fünf Teilquadern zusammengesetzten Quader nennen wir $Q_0 := \cup_{i=1}^5 Q_i$ und weil er identisch mit dem einfachen Quader Q_0 ist, gilt $\chi(Q_0) = 2$. Jetzt entfernen wir den fünften Quader in der Mitte und erhalten also $\chi = \chi(Q_0) - \chi(Q_5) = 2 - 2 = 0$. Für jeden weiteren Quader, den wir im Zentrum entfernen, um ein weiteres 'Loch' zu erzeugen, verringert sich χ um 2. Also gilt allgemein: wenn g , das sog. *Geschlecht* eines Polyeders bezeichne, d.h. die Anzahl der 'Löcher', so ändert sich die Formel der Euler Charakteristik zu:

$$\chi_g := e - k + f = 2 - 2g . \quad (13.0.6)$$

14 Flächentheorie von Gauß

14.1 Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Der Vater von Carl Friedrich Gauß, Gebhard Dietrich Gauß (1744-1808) lebte in Braunschweig als Lehmmaurer und Hausschlachter. Seine erste Frau Dorothea Emeranzia Warnecken (1745-1775), mit der er einen Sohn hatte, Johann Georg Heinrich (1769-1854), starb früh an 'Auszehrung' (Tuberkulose). Mit seiner zweiten Frau Dorothea Benze (1743-1839) hatte er ein weiteres Kind namens Carl Friedrich (1777-1855).

Der junge Carl Friedrich war ein sehr waches und interessiertes Kind und lernte auf eigene Initiative mit Hilfe seines Bruders Georg schon sehr früh Lesen und Schreiben. Gegen große Widerstände des Vaters gelang es ihm mit 11 Jahren das Gymnasium in Braunschweig besuchen zu dürfen. Dort lernte er nebenbei auf eigene Initiative hin Altgriechisch, um Pythagoras und Euklid im Original lesen zu können. Der 14-jährige Gauß wurde vom Braunschweiger Professor Zimmermann als außergewöhnliches Talent erkannt und auf dessen Veranlassung vom Braunschweiger Herzog Carl Wilhelm Ferdinand gefördert. Mit 15 Jahren begann Gauß sein Studium in Braunschweig am Collegium Carolinum bei Prof. Zimmermann in Mathematik und Physik und bei Prof. Eschenburg in Philosophie und Literatur.

Ab dem Jahr 1795 durfte Gauß mit einem Stipendium seines Herzogs für drei Jahre an der Universität Göttingen studieren. Die dortige Universität hatte für Gauß vornehmlich wegen ihrer umfangreichen Universitätsbibliothek eine große Bedeutung, weil diese ihm den Zugang zu allen aktuellen mathematischen Publikationen eröffnete. In Göttingen begann Gauß die Zahlentheorie von Euler zu studieren und zu erweitern, was schließlich 1801 zu seiner ersten großen Veröffentlichung führte, den *Disquisitiones Arithmeticae*. Mit einem Teilergebnis dieser Arbeit, dem *Fundamentalsatz der Algebra*, promovierte Gauß 1799 an der Braunschweigischen Landesuniversität Helmstedt.



Abbildung 14.1: C. F. Gauß
G. Biermann (1887), PD.
[<http://de.wikipedia.org/wiki/Gauß>]

Zu Beginn des Jahres 1801 wurde von dem italienischen Astronomen Giuseppe Piazzi der Asteroid Ceres entdeckt (heute als Zwergplanet klassifiziert). Gauß begann mit großem Engagement und großem Arbeitsaufwand aus den wenigen Beobachtungsdaten von Piazzi die Bahn von Ceres zu berechnen. Nachdem sich diese Berechnungen als korrekt herausgestellt hatten wurde Gauß über Nacht europaweit berühmt und durfte sich Hoffnungen auf einen Ruf an eine Sternwarte machen. 1807 wurde er Professor für Astronomie in Göttingen und Leiter der dortigen Sternwarte. 1809 erschien sein astronomisches Hauptwerk *Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen*. In diesem Werk stellte Gauß auch erstmalig die von ihm schon jahrelang verwendete *Fehlerrechnung* vor. 1812 berechnete Gauß die Bahn des Jupitermondes Pallas, wobei er fast ein Jahr lang 800000 reelle Zahlen verarbeitete (ohne Taschenrechner und Computer!). Anschließend korrigierte er die theoretische Jupitermasse aus den beobachteten Bahnstörungen des Pallas.

Daneben versuchte Gauß alle möglichen Fehlerquellen für seine astronomischen Beobachtungen zu identifizieren und zu minimieren. Dabei wurde ihm klar, daß eine wesentliche Ungenauigkeit bei astronomischen Beobachtungen die ungenügend genauen Erdkoordinaten der Beobachtungsstationen aufgrund der Abplattung der Erde war. Daher planten die europäischen Geodäten und Astronomen ein möglichst präzises gesamteuropäisches Vermessungsnetz. Gauß ließ sich von dieser Idee überzeugen und erklärte sich bereit, die Vermessung des Königreichs Hannover zu übernehmen. Diese für Gauß auch körperlich überaus anstrengende Arbeit beschäftigte ihn von 1821-1825. Seine Erfindung des Heliotrops, eines Spiegel-Linsen-Systems, mit dem er Sonnenlicht bündeln und in eine Richtung fokussiert abstrahlen konnte, erlaubte ihm bei guter Sicht eine Strecke von bis zu 100 km zwischen zwei Meßpunkten zu überbrücken und stellte eine Revolution in der Geodäsie dar. In all diesen Jahren der geodätischen Messungen arbeitete Gauß nebenbei an seiner mathematischen Flächentheorie, die ihn zum Begriff der Flächenkrümmungen und seinem *Theorema Egregium* (*Herausragender Satz*) führte. Gauß erkannte klar die große Bedeutung dieser Entdeckung und war über seine in mühevoller Arbeit erreichten Ergebnisse sehr glücklich. Er publizierte einige dieser Arbeiten über Differentialgeometrie 1827 unter dem Titel *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (*Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen*). Gauß blieb lebenslang seinem Publikationsmotto treu: „*pauca sed matura*“ („*nur Weniges, aber Reifes*“), und so blieben viele seiner Einsichten unveröffentlicht und fanden sich erst Jahrzehnte später in seinen mathematischen Tagebüchern. Legendär sind die zahlreichen brieflichen Antworten von Gauß an andere Mathematiker, die ihm stolz von ihren Entdeckungen berichteten und denen Gauß dann kurz und freundlich mitteilte, daß er sich über diese Entdeckung freue, daß er selbst aber schon vor vielen Jahren einen entsprechenden „zierlichen kleinen Beweis“ gefunden habe.

In den Jahren von 1828-1844 wurde Gauß um eine Verfeinerung seines Meßnetzes zum Zweck der Kartographie gebeten, doch diese Arbeit delegierte er soweit als möglich. 1831 trat der mit Gauß befreundete Physiker Wilhelm Weber seine Professur in Göttingen an und zwischen Gauß, der bislang immer nur als Einzelgänger geforscht hatte, und dem jungen Weber entwickelte sich eine für beide inspirierende Zusammenarbeit beim Thema Magnetismus. Dabei entwickelte Gauß das Magnetometer, das erste exakte Meßgerät

zur Messung von Magnetfeldstärken und baute und erprobte mit Weber den ersten elektromagnetischen Telegraphen.

Bernhard Riemann begann sein Mathematikstudium in Göttingen, hatte dort zunächst von Gauß aber nicht allzuviel erlebt, weil dieser kein Interesse an der Lehre zeigte und nur pflichtgemäß seine Astronomievorlesungen hielt. Riemann wechselte dann nach Berlin zu Jacobi und Dirichlet, die ihn unterstützten und förderten und kehrte dann wieder zurück nach Göttingen, wo er unter Gauß mit einer Arbeit über Funktionentheorie promovierte. Anschließend habilitierte Riemann 1854 im Fach Mathematik unter Gauß. Dieser saß als Dekan der Prüfungskommission für Riemann vor und wählte aus Riemanns Liste der möglichen Themen für dessen Probevorlesung das letztgenannte Thema „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen“. Riemann wurde von dieser Wahl völlig überrascht, denn üblicherweise akzeptierte die Fakultät immer das erstgenannte Thema des Kandidaten, und er erarbeitete aus dem Nichts in zwei Monaten die Grundlagen der Differentialgeometrie in n Dimensionen. Gauß, zu jener Zeit schon herzkrank, war wohl der Einzige der Riemanns Vortrag wirklich verstand, und er war außergewöhnlich erregt und begeistert. Dies war der letzte öffentliche Auftritt von Gauß in der Fakultät vor seinem Tod zu Beginn des Jahres 1855.

Die glücklichste Zeit seines Lebens war für Gauß die Zeit seiner ersten Ehe mit Johanna Osthof ab dem Jahr 1805. Nach der Geburt ihres dritten Kindes starb Johanna, und nur ein halbes Jahr später im Verlauf einer großen Masern-Epidemie starb auch dieses junge Kind. Gauß war zutiefst betroffen und verfiel in eine Depression. 1810 heiratete er Wilhelmine Waldeck, eine Göttinger Freundin von Johanna, und aus dieser Ehe gingen drei Kinder hervor. Ab 1818 begann Wilhelmine gesundheitlich schwächer zu werden und einige Jahre später zeigte sich, daß sie unheilbar an Tuberkulose erkrankt war. Sie wurde liebevoll von Minna, dem zweiten Kind von Gauß gepflegt, die sich dabei jedoch auch an Tuberkulose infizierte. Wilhelmine starb nach langem Leiden 1831 und Minna starb 1840. Gauß blieb als Trost nur seine Arbeit!

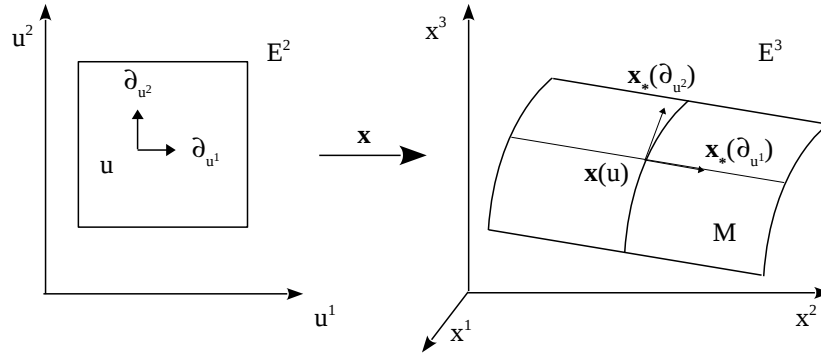
Die Originalarbeiten von Gauß hat das Göttinger Digitalisierungszentrum freundlicherweise online gestellt, siehe Gauß (2013).

[Quellen: de.wikipedia: Gauß, Mania (2012)].

14.2 Erste und zweite Fundamentalform einer Fläche

Gauß standen zu seiner Zeit weder der Begriff der Tensoren noch jener der Differentialformen zur Verfügung. Eine schöne Darstellung der Gaußschen Gedanken und Bezeichnungen findet sich im Abschnitt „How to Read Gauss“ in Spivak (1979), II, S. 74 ff.

Wir orientieren uns hier im Wesentlichen an Frankel (2004), S. 201 ff. und Eschenburg u. Jost (2007), S. 45 ff., mit etwas modifizierten Bezeichnungen.

Abbildung 14.2: Immersion einer Fläche von \mathbb{E}^2 in eine Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

Sei $\mathbf{x} : \mathbb{E}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ eine Immersion. Dann gilt für die Tangentialabbildung

$$\mathbf{x}_* : T_u(\mathbb{E}^2) \rightarrow T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3), \quad \mathbf{x}_*(\partial_{u^i}) := \frac{\partial \mathbf{x}^k(u)}{\partial u^i} \partial_{x^k}, \quad i \in \{1, 2\}, k \in \{1, 2, 3\}, \quad (14.2.1)$$

das heißt, der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ an $M \subset \mathbb{E}^3$ im Punkt $\mathbf{x}(u) \in \mathbb{E}^3$ ist gegeben durch

$$T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \left\{ \frac{\partial x^k(u)}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, i = 1 \dots 2, k = 1 \dots 3 \right\}.$$

Nun ist $T_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \sim \mathbb{E}^3$ und so wählen wir als Einheitsvektoren in dem äquivalenten Tangentialraum $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$:

$$e_i(u) := \mathbf{x}_{u^i} := \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i}, \quad (14.2.2)$$

also

$$\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3 = \left\{ e_i(u) = \mathbf{x}_{u^i} = \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(u)}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^2(u)}{\partial u^i} \\ \frac{\partial x^3(u)}{\partial u^i} \end{pmatrix}, i = 1 \dots 2 \right\}$$

Senkrecht auf $e_1(u)$ und $e_2(u)$ im Punkt $\mathbf{x}(u) \in M$ wählen wir mit rechtshändiger Orientierung den Normalenvektor $\mathbf{n}(u)$.

Jetzt führen wir die zu $\{e_i(u)\}$ duale Basis des Kotangentialraums $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}^*(\mathbb{E}^3)$ ein mit

$$\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}^*(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3 = \{de^i(u) \mid de^i(e_j)|_u = \delta_j^i\}.$$

Mittels der $de^i(u)$ kann man die beiden folgenden vektorwertigen 1-Formen an der Stelle $\mathbf{x}(u)$ einführen:

$$d\mathbf{x}(u) := x_{u^i} de^i = x_{u^1} de^1 + x_{u^2} de^2,$$

$$d\mathbf{n}(u) := N_{u^i} de^i = n_{u^1} de^1 + n_{u^2} de^2 .$$

$d\mathbf{x}(u)$ angewendet auf einen Vektor V ergibt gerade wieder diesen Vektor V , denn

$$V = V^i e_i \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}(u)(V) = \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(V^j e_j) = \mathbf{x}_{u^i}(u) V^i = V , \quad (14.2.3)$$

Auf M wird eine Metrik g als ein Feld einer 2-Form (d.h. eines kovarianten Tensors 2. Stufe) eingeführt durch

$$g_{ij}(u) := \langle e_i(u) \mid e_j(u) \rangle := \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_{u^i}^k \mathbf{x}_{u^j}^k , \quad (14.2.4)$$

$$g(u) := g_{ij}(u) de^i(u) \otimes de^j(u) . \quad (14.2.5)$$

Für zwei Vektoren $V = V^i e_i$ und $W = W^j e_j$ des Tangentialraums $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ gilt also:

$$\langle V \mid W \rangle = V^i W^j \langle e_i(u) \mid e_j(u) \rangle = g_{ij}(u) V^i W^j . \quad (14.2.6)$$

Nun kann die Metrik-2-Form $g(u)$ als ein 'Quadrat' einer 1-Form $ds(u)$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} ds^2(u) &:= \langle d\mathbf{x}(u) \mid d\mathbf{x}(u) \rangle := \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(u) \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) de^j(u) \rangle \\ &= \langle e_i(u) de^i(u) \mid e_j(u) de^j(u) \rangle = g_{ij}(u) de^i(u) de^j(u) = g(u) . \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

Die *Erste Fundamentalform von Gauß* ist jetzt der folgende Ausdruck für die Bogenlänge ds , in der Sprache der Differentialformen also die folgende 1-Form:

$$\begin{aligned} ds(u) &:= \langle d\mathbf{x}(u) \mid d\mathbf{x}(u) \rangle^{\frac{1}{2}} := \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i(u) \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) de^j(u) \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle e_i(u) de^i(u) \mid e_j(u) de^j(u) \rangle^{\frac{1}{2}} = (g_{ij}(u) de^i(u) de^j(u))^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (14.2.8)$$

Diese *Erste Fundamentalform von Gauß* ist bezüglich der Fläche M intrinsisch, denn sie bezieht sich nur auf den Tangentialraum $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$ von $\mathbf{x}(u) \in M$.

Den Zusammenhang mit der bekannten Schreibweise der Differentialquotienten sieht man sofort, wenn $V(t)$ eine Tangente an die Kurve $\mathbf{x}(u(t))$ ist:

$$V = \frac{de^i}{dt} \mathbf{x}_{u^i}(u) = \frac{de^i}{dt} e_i \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}(u)(V) = \mathbf{x}_{u^i}(u) de^i\left(\frac{de^j}{dt} e_j\right) = \mathbf{x}_{u^i}(u) \frac{de^i}{dt} ,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds(u)}{dt}\right)^2 &:= \left\langle \frac{d}{dt} d\mathbf{x}(u) \mid \frac{d}{dt} d\mathbf{x}(u) \right\rangle := \left\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \frac{de^i}{dt} \mid \mathbf{x}_{u^j}(u) \frac{de^j}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle e_i(u) \frac{de^i}{dt} \mid e_j(u) \frac{de^j}{dt} \right\rangle = g_{ij}(u) \frac{de^i}{dt} \frac{de^j}{dt} . \end{aligned}$$

Damit wird die Bogenlänge einer Kurve $\mathbf{x}(u(t))$ von $\mathbf{x}(u(a))$ bis $\mathbf{x}(u(b))$ zu

$$\begin{aligned} s(a, b) &= \int_a^b \left\| \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} \frac{de^i}{dt} \right\| dt = \int_a^b \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^i} \frac{de^i}{dt} \mid \frac{\partial \mathbf{x}(u)}{\partial u^j} \frac{de^j}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_a^b \left(g_{ij}(u) \frac{de^i}{dt} \frac{de^j}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt . \end{aligned} \quad (14.2.9)$$

Die *Zweite Fundamentalform von Gauß* beschreibt jetzt die Änderung des Tangentialraums, bzw. des Normalenvektors, im umgebenden Raum \mathbb{E}^3 bei einer Änderung des Punktes $\mathbf{x}(u)$. Dies ist eine direkte Verallgemeinerung der Definition der Krümmung einer Kurve als Änderung der Tangente in Normalenrichtung (siehe 10.1.6):

$$K_{ij}(u) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} e_j(u) \mid \mathbf{n}(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \mathbf{x}(u) \mid \mathbf{n}(u) \right\rangle = \langle \mathbf{x}_{u^i u^j}(u) \mid \mathbf{n}(u) \rangle , \quad (14.2.10)$$

bzw. als Feld einer symmetrischen 2-Form:

$$K(u) := b_{ij}(u) de^i(u) \otimes de^j(u) . \quad (14.2.11)$$

Eine alternative Beschreibung von $K_{ij}(u)$ erhält man mittels

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u^i} \perp \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad 0 &= \frac{\partial}{\partial u^j} \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{n}(u) \rangle = \langle \mathbf{x}_{u^j u^i}(u) \mid \mathbf{n}(u) \rangle + \langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{n}_{u^j}(u) \rangle \quad \Rightarrow \\ K_{ij}(u) &= -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{n}_{u^j}(u) \rangle , \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (14.2.12)$$

$$K(u) = -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{n}_{u^j}(u) \rangle de^i \otimes de^j = -\langle d\mathbf{x}_{u^i}(u) \mid d\mathbf{n}_{u^j}(u) \rangle . \quad (14.2.13)$$

In einem endlichdimensionalen Vektorraum kann man jeder reellen, symmetrischen Matrix eine selbstadjungierte Abbildung zuordnen. In unserem Zusammenhang kann man so mit $K_{ij}(u)$ die sog. Weingarten-Abbildung $L(u)$ definieren:

$$\langle e_i(u) \mid L(u) e_j(u) \rangle = \langle e_i(u) \mid L(u)^k_j e_k(u) \rangle = L(u)^k_j g_{ki}(u) := K_{ij}(u) , \quad \text{d.h.} \quad (14.2.14)$$

$$L(u)^k_j = K^k_j(u) . \quad (14.2.15)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle e_i(u) \mid L(u) e_j(u) \rangle &= L(u)^k_j g_{ki}(u) = K_{ij}(u) = -\langle \mathbf{x}_{u^i}(u) \mid \mathbf{n}_{u^j}(u) \rangle , \\ L(u) e_j(u) &= L(u)^k_j e_k(u) = -\mathbf{n}_{u^j}(u) , \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{n}_{u^j}(u) &= -K^k_j(u) \mathbf{x}_{u^k}(u) . \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

Daraus folgt für die Änderung von $\mathbf{n}(u)$ entlang einer Kurve $\mathbf{x}(u(t))$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{n}(u) &= \mathbf{n}_{u^j}(u) de^j(u) = -L(u)^i_j e_i(u) de^j(u) \quad \Rightarrow \\ \frac{d\mathbf{n}(u(t))}{dt} &= -L(u(t))^i_j \mathbf{x}_{u^i}(u(t)) \frac{de^j(t)}{dt} . \end{aligned} \quad (14.2.17)$$

14.3 Gauß-Krümmung

Die reelle, symmetrische Matrix $L(u)^i_j$ der Weingarten-Abbildung $L(u)$ kann nun diagonalisiert werden zu

$$\tilde{L}(u)^i_j := \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (14.3.1)$$

Die entsprechenden orthogonalen Eigenvektoren \tilde{e}_k mit $L(u)^k_j \tilde{e}_k = \kappa_j \tilde{e}_j$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Die Gaußsche Krümmung ist definiert als

$$\begin{aligned} K_G(u) &:= \det(L(u)^i_j) = \det(\tilde{L}(u)^i_j) = \kappa_1 \kappa_2 \\ &= \det(K^i_j(u)) = \frac{\det(K_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))} =: \frac{\det(K(u))}{\det(g(u))}, \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

und sie ist als Determinante unabhängig von der jeweils gewählten Basis des Tangentialraums $\tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3)$.

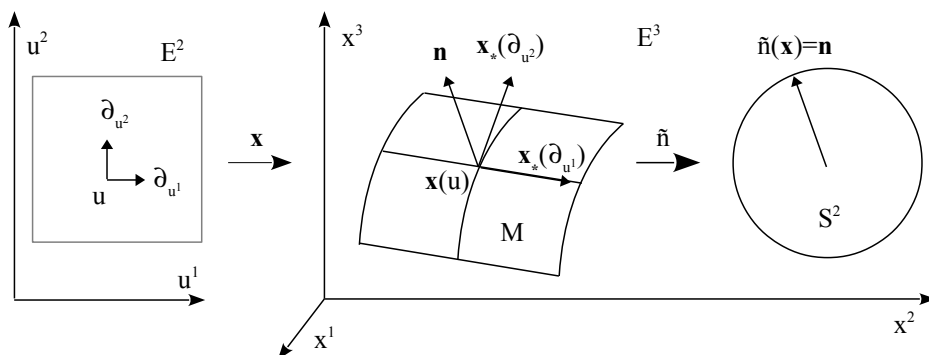


Abbildung 14.3: Gaußsche Normalenabbildung einer Fläche $M \subset \mathbb{E}^3$

Tatsächlich hat Gauß die nach ihm benannte Krümmung ursprünglich mittels seiner *Normalenabbildung* definiert. Diese Abbildung $\tilde{n} : M \rightarrow S^2$ mit $\tilde{n}(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ordnet jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^2 zu. Nun hat Gauß um den Punkt $\mathbf{x} \in M$ eine kleine Umgebung U konstruiert und diese Umgebung dann mittels \tilde{n} auf S^2 abgebildet. Das Verhältnis der Flächen $\lim_{U \rightarrow 0} \text{vol}(\tilde{n}(U)) / \text{vol}(U)$ zeigt an, wie stark sich $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ an der Stelle \mathbf{x} verändert und wurde daher von Gauß als Krümmung K definiert.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang dieser Krümmungsdefinition mit der obigen Definition mittel der Determinanten von K herstellen.

Seien also die drei Basisvektoren $e_1, e_2, \mathbf{n} \in \tilde{T}_{\mathbf{x}(u)}(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$ in einer positiven Orientierung gegeben. Seien weiter M und S^2 beide in den gleichen Raum \mathbb{E}^3 eingebettet, dann

kann man die Tangentialräume $T_{\mathbf{x}}M$ und $T_{\tilde{n}(\mathbf{x})}S^2$ miteinander identifizieren. Damit sind dann auch die entsprechenden Flächenformen bei \mathbf{x} , bzw. $\tilde{n}(\mathbf{x})$ identisch:

$$\omega := \text{vol}_{S^2} = \text{vol}_M = \sqrt{g} \frac{1}{2!} \epsilon_{ij} de^i \wedge de^j = \sqrt{g} de^1 de^2 .$$

Für die Tangentialabbildung \tilde{n}_* gilt dann:

$$\tilde{n}_*(e_i) = \tilde{n}_*(\mathbf{x}_{u^i}) = \tilde{n}_*\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i} .$$

Für den Rücktransport (pullback) der Flächenform $\omega = \text{vol}_{S^2}$ von S^2 nach M ergibt sich mit 14.2.16:

$$\begin{aligned} \tilde{n}^*(\text{vol}_{S^2}) &= \tilde{n}^*(\omega(e_1, e_2)) = \omega(\tilde{n}_*\mathbf{x}_{u^1}, \tilde{n}_*\mathbf{x}_{u^2}) = \omega\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^2}\right) \\ &= \omega(-K^k{}_1 \mathbf{x}_{u^k}, -K^l{}_2 \mathbf{x}_{u^l}) = K^k{}_1 K^l{}_2 \omega(e_k, e_l) \\ &= (K^1{}_1 K^2{}_2 - K^2{}_1 K^1{}_2) \omega(e_1, e_2) = \det(K^i{}_j) \omega(e_1, e_2) \\ &= \frac{\det(K_{ij})}{\det(g)} \omega(e_1, e_2) = K_G(u) \text{vol}_M . \end{aligned}$$

Daraus folgt nun wie behauptet

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{n}(U))}{\text{vol}(U)} = \lim_{U \rightarrow 0} \frac{\int_{\tilde{n}(U)} \text{vol}_{S^2}}{\int_U \text{vol}_M} = K_G .$$

14.4 Integrabilitätsbedingungen von Gauß, Codazzi, Mainardi

Der Vektor $\mathbf{x}_{u^i u^j}(u)$ wird im Allgemeinen nicht in der Fläche M liegen, also zerlegt man ihn in einen tangentialen und einen normalen Anteil:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u^i u^j}(u) &= \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \mathbf{x}(u) =: \Gamma^k{}_{ij}(u) \mathbf{x}_{u^k}(u) + \langle \mathbf{x}_{u^i u^j}(u) | \mathbf{n}(u) \rangle \mathbf{n}(u) \\ &= \Gamma^k{}_{ij}(u) \mathbf{x}_{u^k}(u) + K_{ij}(u) \mathbf{n}(u) . \end{aligned} \quad (14.4.1)$$

Für die Christoffel-Symbole $\Gamma^k{}_{ij}(u)$ findet man:

$$\Gamma^k{}_{ij}(u) = \Gamma^k{}_{ji}(u) = \frac{1}{2} g^{km}(u) \left[\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} \right] , \quad \text{und} \quad (14.4.2)$$

$$\Gamma_{kij}(u) = \Gamma_{kji}(u) , \quad \Gamma_{kij}(u) = -\Gamma_{ikj}(u) . \quad (14.4.3)$$

Beweis: Aus $\mathbf{x}_{u^i u^j}(u) = \mathbf{x}_{u^j u^i}(u)$ folgt sofort $\Gamma_{ij}^k(u) = \Gamma_{ji}^k(u)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u) \rangle = \langle \mathbf{x}_{u^i u^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u) \rangle + \langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid \mathbf{x}_{u^i u^m}(u) \rangle \\ &= \langle \Gamma_{ij}^n(u) \mathbf{x}_{u^n}(u) \mid \mathbf{x}_{u^m}(u) \rangle + \langle \mathbf{x}_{u^j}(u) \mid \Gamma_{im}^n(u) \mathbf{x}_{u^n}(u) \rangle \\ &= \Gamma_{ij}^n(u) g_{nm}(u) + \Gamma_{im}^n(u) g_{jn}(u) = \Gamma_{mij}(u) + \Gamma_{jim}(u), \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} = \Gamma_{mji}(u) + \Gamma_{ijm}(u), \quad \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} = \Gamma_{jmi}(u) + \Gamma_{imj}(u),$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} \\ &= \Gamma_{mij}(u) + \Gamma_{jim}(u) + \Gamma_{mji}(u) + \Gamma_{ijm}(u) - \Gamma_{jmi}(u) - \Gamma_{imj}(u) \\ &= 2\Gamma_{mij}(u) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k(u) &= g^{km}(u) \Gamma_{mij}(u) \\ &= \frac{1}{2} g^{km}(u) \left[\frac{\partial g_{jm}(u)}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}(u)}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^m} \right], \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{mij}(u) = -\Gamma_{imj}(u). \quad \square$$

Gauß hat aus der Bedingung $\mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) = \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u)$, also aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, eine notwendig Bedingung an die Koeffizienten der ersten Fundamentalform $g_{ij}(u)$ abgeleitet. Die entsprechende Bedingung für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform $K_{ij}(u)$ stammt von Codazzi und Mainardi. Bonnet konnte dann mit Hilfe des Satzes von Frobenius (siehe das nächste Kapitel) zeigen, daß diese beiden Bedingungen an $g_{ij}(u)$ und $K_{ij}(u)$ auch hinreichende Bedingungen für eine eindeutige Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche M im 3-dimensionalen Raum \mathbb{E}^3 sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) &= \partial_{u^i} \mathbf{x}_{u^j u^k}(u) = \partial_{u^i} [\Gamma_{jk}^m(u) \mathbf{x}_{u^m}(u) + K_{jk}(u) \mathbf{n}(u)] \\ &= (\partial_{u^i} \Gamma_{jk}^m(u)) \mathbf{x}_{u^m}(u) + \Gamma_{jk}^m(u) \mathbf{x}_{u^i u^m}(u) + (\partial_{u^i} K_{jk}(u)) \mathbf{n}(u) + K_{jk}(u) \mathbf{n}_{u^i}(u) \\ &= (\partial_{u^i} \Gamma_{jk}^m(u)) \mathbf{x}_{u^m}(u) + \Gamma_{jk}^m(u) \Gamma_{im}^n(u) \mathbf{x}_{u^n}(u) + \Gamma_{jk}^m(u) K_{im}(u) \mathbf{n}(u) \\ &\quad + (\partial_{u^i} K_{jk}(u)) \mathbf{n}(u) - K_{jk}(u) K_{i}^n(u) \mathbf{x}_{u^n}(u) \\ &= [\partial_{u^i} \Gamma_{jk}^n(u) + \Gamma_{jk}^m(u) \Gamma_{im}^n(u) - K_{jk}(u) K_{i}^n(u)] \mathbf{x}_{u^n}(u) \end{aligned}$$

$$+ [\partial_{u^i} K_{jk}(u) + \Gamma_{jk}^m(u) K_{im}(u)] \mathbf{n}(u) ,$$

und analog

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) &= [\partial_{u^j} \Gamma_{ik}^n(u) + \Gamma_{ik}^m(u) \Gamma_{jm}^n(u) - K_{ik}(u) K_j^n(u)] \mathbf{x}_{u^n}(u) \\ &\quad + [\partial_{u^j} K_{ik}(u) + \Gamma_{ik}^m(u) K_{jm}(u)] \mathbf{n}(u) . \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) - \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_{u^i u^j u^k}(u) - \mathbf{x}_{u^j u^i u^k}(u) \\ &= [\partial_{u^i} \Gamma_{jk}^n(u) + \Gamma_{jk}^m(u) \Gamma_{im}^n(u) - K_{jk}(u) K_i^n(u) \\ &\quad - \partial_{u^j} \Gamma_{ik}^n(u) - \Gamma_{ik}^m(u) \Gamma_{jm}^n(u) + K_{ik}(u) K_j^n(u)] \mathbf{x}_{u^n}(u) \\ &\quad + [\partial_{u^i} K_{jk}(u) + \Gamma_{jk}^m(u) K_{im}(u) - \partial_{u^j} K_{ik}(u) - \Gamma_{ik}^m(u) K_{jm}(u)] \mathbf{n}(u) \\ &\stackrel{!}{=} 0 . \end{aligned}$$

Wir führen die Abkürzung

$$R_{kij}^n(u) := \partial_{u^i} \Gamma_{jk}^n(u) - \partial_{u^j} \Gamma_{ik}^n(u) + \Gamma_{jk}^m(u) \Gamma_{im}^n(u) - \Gamma_{ik}^m(u) \Gamma_{jm}^n(u) , \quad (14.4.4)$$

ein, der wir später als Komponente des Riemannschen Krümmungstensors wiederbegegnen werden. Grundlegend ist hier die Einsicht, daß die $R_{kij}^n(u)$ über die Christoffel-Symbole $\Gamma_{jk}^n(u)$ nur von den Koeffizienten $g_{ij}(n)$ der Metrik-2-Form und deren ersten und zweiten Ableitungen abhängen, also vollständig intrinsische Größen der Fläche M sind, und sich nicht auf den umgebenden Raum beziehen!

Damit ergeben sich nun die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätsbedingungen:

$$R_{kij}^n(u) = K_{jk}(u) K_i^n(u) - K_{ik}(u) K_j^n(u) , \quad (14.4.5)$$

$$\partial_{u^i} K_{jk}(u) - \Gamma_{ik}^m(u) K_{jm}(u) = \partial_{u^j} K_{ik}(u) - \Gamma_{jk}^m(u) K_{im}(u) . \quad (14.4.6)$$

14.5 Integrabilitätsbedingungen und der Satz von Frobenius

Sei $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}} \mathbb{E}^n \sim \mathbb{E}^n$ ein Vektorfeld eines n -dimensionalen euklidischen Raums. Dann stellt sich in der Physik häufig die Frage, ob sich dieses Vektorfeld als Gradientenfeld einer skalaren Funktion $f(\mathbf{x})$ darstellen läßt, also $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Dies ist nun ein System von n Gleichungen für die eine unbekannte Funktion $f(\mathbf{x})$, also für $n > 1$ ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die zusätzlichen Bedingungen für eine Lösbarkeit nennt man *Integrabilitätsbedingungen*.

Die bekannte Antwort im obigen Beispiel lautet, $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x})$ ist genau dann lösbar, wenn die Rotation von $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ verschwindet. Daß diese Bedingung notwendig ist, sieht man leicht. Seien $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld und das Differential $df(\mathbf{x})$ eine 1-Form auf \mathbb{E}^n , also

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^n := \left\{ W^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid W^i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n \right\},$$

$$df(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{E}^n := \{ w_i(\mathbf{x}) dx^i \mid w_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n \},$$

dann ist der Gradient als die kontravariante Form des kovarianten Differentials definiert, d.h.

$$\langle \nabla f \mid \mathbf{V} \rangle := df(\mathbf{V}) \quad \Rightarrow \quad (14.5.1)$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \begin{cases} \partial_i f dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \partial_j f, \\ \langle (\nabla f)^k \frac{\partial}{\partial x^k} \mid \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = g_{jk} (\nabla f)^k, \end{cases}$$

$$(\nabla f)^i = g^{ij} g_{jk} (\nabla f)^k = g^{ij} \partial_j f =: \partial^i f. \quad (14.5.2)$$

Wenn sich nun $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ als Gradientenfeld einer Funktion $f(\mathbf{x})$ in \mathbb{E}^n darstellen läßt, so gilt also

$$V^i = g^{ij} \partial_j f = \partial^i f \quad \text{bzw.} \quad V_i = \partial_i f.$$

Notwendig für die Lösbarkeit dieser überbestimmten Gleichung ist die Gleichheit der gemischten Ableitungen

$$\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = \partial_i V_j - \partial_j V_i \stackrel{!}{=} 0,$$

und da in \mathbb{E}^n ja $V^i = V_i$ ist, so gilt also:

$$\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = \partial_i V^j - \partial_j V^i \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{in } \mathbb{E}^3 \text{ also: } \nabla \times \mathbf{V} \stackrel{!}{=} 0. \quad (14.5.3)$$

Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels ist die Frage nach der Lösbarkeit eines speziellen, überbestimmten linearen Differentialgleichungssystems, oder geometrisch formuliert: gibt es eine *Integralmannigfaltigkeit*, die tangential zu einer vorgegebenen glatt verbundenen Schar von Tangentialräumen liegt? Die Aussage, daß die Gleichheit der gemischten Ableitungen für die Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, wird heute als der **Satz von Frobenius** (1877) bezeichnet, obwohl historisch betrachtet die ersten Beweise dieses Satzes von Feodor Deahna (1840) und Alfred Clebsch (1866) stammen. Wir folgen hier Spivak (1979), I, S. 244 ff., mit einigen Modifikationen und kleinen Erweiterungen.

Ein Beispiel in \mathbb{E}^3 hilft bei der Klärung der Begriffe. Gegeben sei eine glatt verbundene Schar von Flächen, die man durch eine 2-dimensionale *Distribution* Δ , d.h. 2-dimensionale Unterräume von \mathbb{E}^3 , beschreibt:

$$\Delta_p := \left\{ r_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \bar{f}_1(p) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \right) + r_2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + \bar{f}_2(p) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \right) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{E}^3 \right\}. \quad (14.5.4)$$

Hierbei sind $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$ vorgegebene C^∞ -Funktionen, welche die Tangentialräume der verschiedenen Punkte $p \in \mathbb{E}^3$ verbinden. Nebenbei: diese *Distribution* der Differentialgeometrie hat, außer dem Namen, nichts mit den Distributionen der Funktionalanalysis gemeinsam!

Sei nun $\bar{\alpha} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\bar{\alpha}(x, y) := (x, y, z(x, y))^T := (x, y, \alpha(x, y))^T \quad \text{und} \quad (14.5.5)$$

$$\alpha(x, y) := z(x, y) \quad \text{also} \quad \alpha : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1.$$

Wenn nun $\bar{\alpha}$ eine Lösungsmannigfaltigkeit zu der Distribution Δ_p in dem Sinne sein soll, daß $\bar{\alpha}$ tangential zu Δ_p für alle $p \in \mathbb{E}^3$ liegt, dann muß für $\alpha : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^1$ gelten:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \bar{f}_1(p), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \bar{f}_2(p). \quad (14.5.6)$$

Der Übergang von den Variablen x, y, z zu $x, y, \alpha(x, y)$ entspricht dem Übergang von den Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^1$ zu $f_1, f_2 : \mathbb{E}^2 \otimes \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbb{E}^1$ mit $f_i(x, y, z) = f_i(x, y, \alpha(x, y))$.

Die Distribution kann also mit der Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ geschrieben werden als:

$$\Delta_p := \left\{ r_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \right) + r_2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \right) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{E}^3 \right\}. \quad (14.5.7)$$

und diese Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ ist die Lösung des überbestimmten Differentialgleichungssystems (2 Gleichungen für die eine Unbekannte α):

$$\begin{aligned} \partial_x \alpha(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, y) = f_1(x, y, \alpha(x, y)), \\ \partial_y \alpha(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \alpha(x, y) = f_2(x, y, \alpha(x, y)), \end{aligned} \quad (14.5.8)$$

mit den Anfangsbedingungen $\alpha(0, 0) = \alpha_0 \in \mathbb{E}^1$. Natürlich ist die Integralmannigfaltigkeit α nur dann eine Lösung des DGL-Systems sofern eine Lösung existiert. Man kann leicht Beispiele konstruieren die zeigen, daß es nicht für jedes Funktionenpaar f_1, f_2 eine Lösung gibt (siehe etwa Spivak (1979), I, S. 247). In jedem Fall notwendig für die Existenz einer Lösung ist die Gleichheit der gemischten Ableitungen:

$$\partial_x \partial_y \alpha(x, y) \stackrel{!}{=} \partial_y \partial_x \alpha(x, y). \quad (14.5.9)$$

Dieses Beispiel wollen wir nun für eine m -dimensionale Distribution in \mathbb{E}^{m+n} verallgemeinern. Wenn $\alpha : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^n$ die m -dimensionale Integralmannigfaltigkeit bezeichne, dann können wir die m -dimensionale Distribution Δ am Punkt $p \in \mathbb{E}^{m+n}$ wie oben definieren als:

$$\Delta_p := \left\{ r_i \cdot (\partial_i|_p + \sum_{k=1}^n f_i^k(p) \frac{\partial}{\partial \alpha^k}|_p) \mid i = 1 \dots m, k = 1 \dots n, r_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (14.5.10)$$

Hierbei sind die $f_i : \mathbb{E}^m \otimes \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $i = 1 \dots m$, vorgegebene C^∞ -Funktionen, welche die Tangentialräume der verschiedenen Punkte p verbinden. Wenn nun die m -dimensionale Mannigfaltigkeit α für alle p tangential zu Δ_p liegt, dann läßt sich die Distribution Δ wieder schreiben als:

$$\Delta_p := \left\{ r_i \cdot (\partial_i|_p + \sum_{k=1}^n \partial_i \alpha^k \frac{\partial}{\partial \alpha^k}|_p) \mid i = 1 \dots m, k = 1 \dots n, r_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad (14.5.11)$$

und diese Integralmannigfaltigkeit α ist Lösung des überbestimmten Differentialgleichungssystems ($m \cdot n$ Gleichungen für n Unbekannte):

$$\partial_i \alpha^k(x^1, \dots, x^m) = f_i^k(x^1, \dots, x^m, \alpha^k(x^1, \dots, x^m)), \quad i = 1 \dots m, k = 1 \dots n, \quad (14.5.12)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\alpha^k(0, \dots, 0) = \alpha_0^k \in \mathbb{E}^n, \quad i = 1 \dots m, k = 1 \dots n, \quad (14.5.13)$$

Notwendig für die Existenz einer Lösung ist wieder die Gleichheit der gemischten Ableitungen:

$$(\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \alpha^k(x^1, \dots, x^m) \stackrel{!}{=} 0, \quad i, j = 1 \dots m. \quad (14.5.14)$$

Wenn man sich den Ausdruck für die Gleichheit der gemischten Ableitungen ausführlicher hinschreibt, so erhält man die sog. *Frobenius-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \partial_i f_j^k|_\alpha + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha^l} \partial_i \alpha^l - (\partial_j f_i^k|_\alpha + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i^k}{\partial \alpha^l} \partial_j \alpha^l) = \\ \partial_i f_j^k|_\alpha - \partial_j f_i^k|_\alpha + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_j^k}{\partial \alpha^l} f_i^l - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i^k}{\partial \alpha^l} f_j^l \stackrel{!}{=} 0, \quad (14.5.15) \\ i, j = 1 \dots m, k, l = 1 \dots n. \end{aligned}$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Frobenius-Gleichungen nicht nur notwendig, sondern lokal auch hinreichend für die Existenz einer Lösung α sind.

Beweis: Wir suchen eine lokale Lösung von 14.5.12 mit den Anfangsbedingungen 14.5.13 um $(x^1, \dots, x^m) = 0$ herum. Wir beginnen mit der ersten Variablen x^1 :

$$\alpha^k(0, \dots, 0) = \alpha_0^k, \quad k = 1 \dots n, \quad (14.5.16)$$

$$\partial_1 \alpha^k(x^1, 0, \dots, 0) = f_1^k(x^1, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, 0, \dots, 0)). \quad (14.5.17)$$

Dies ist für jedes $k = 1 \dots n$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Grades, die nach dem Satz von Picard-Lindelöf für den Anfangswerte α_0^k in einer geeigneten Umgebung von $|x^1| < \epsilon_1$ eine eindeutige Lösung hat (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). Jetzt suchen wir um $(x_0^1, 0, \dots, 0)$ mit einem festen $|x_0^1| < \epsilon_1$ herum eine Lösung in der zweiten Variablen x^2 :

$$\alpha^k(x_0^1, \dots, 0) = \alpha_1^k, \quad k = 1 \dots n,$$

$$\partial_2 \alpha^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0) = f_2^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x_0^1, x^2, 0, \dots, 0)).$$

Wie zuvor existiert um den Anfangswerte α_1^k in einer geeigneten Umgebung von $|x^2| < \epsilon_2$ eine eindeutige Lösung. Jetzt stellt sich allerdings die Frage, ob diese Lösung auch noch die Differentialgleichung bezüglich der ersten Variablen x^1 erfüllt?

$$g^k(x^2) := \partial_1 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0) - f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)).$$

Zunächst sieht man, daß wegen 14.5.17 die Anfangsbedingung erfüllt ist:

$$g^k(0) = \partial_1 \alpha^k(x^1, 0, 0, \dots, 0) - f_1^k(x^1, 0, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, 0, 0, \dots, 0)) = 0.$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß unter Voraussetzung der Frobenius-Gleichungen 14.5.15 tatsächlich $g^k(x^2) = 0$ für alle $|x^2| < \epsilon_2$ ist, d.h. daß diese Lösung wie gewünscht auch die Differentialgleichung in x^1 14.5.17 erfüllt.

$$\begin{aligned} & \partial_2 g^k(x^2) \\ &= \partial_2 \partial_1 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0) - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\ & \quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} \partial_2 \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0) \\ &= \partial_1 (\partial_2 \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\ & \quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \\ &= \partial_1 (f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))) \\ & \quad - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \\
& = \partial_1 f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
& \quad - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
& \quad + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} \partial_1 \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0) \\
& \quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) \\
& = \partial_1 f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
& \quad - \partial_2 f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))|_\alpha \\
& \quad + \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} \cdot \\
& \quad \cdot (f_1^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) + g^l(x^2)) \\
& \quad - \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_1^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} f_2^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^l(x^1, x^2, 0, \dots, 0)) .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Frobenius-Gleichungen 14.5.15 folgt sofort:

$$\partial_2 g^k(x^2) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_2^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0, \alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0))}{\partial \alpha^l} g^l(x^2) .$$

Dieses lineare DGL-System für $g^k(x^2)$ mit der Anfangsbedingung $g^k(x^2) = 0$ liefert die eindeutige Lösung $g^k(x^2) = 0$ für alle $|x^2| < \epsilon_2$, womit also $\alpha^k(x^1, x^2, 0, \dots, 0)$ auch eine Lösung der DGL. 14.5.15 bzgl. der Koordinate x^1 ist. Und so weiter bis x^m ... \square

Wenn die vorgegebenen C^∞ -Funktionen $f_i : \mathbb{E}^m \otimes \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, $i = 1 \dots m$, welche die Distribution definieren, von der gesuchten Integralmannigfaltigkeit $\alpha : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^n$ linear abhängen, dann lassen sich die Fresenius-Gleichungen deutlich vereinfachen. Sei also

$$f_i = F_i \cdot \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (14.5.18)$$

$$f_i^k(x_1, \dots, x_m, \alpha(x_1, \dots, x_m)) = \sum_{\nu} F_{i\nu}^k(x_1, \dots, x_m) \cdot \alpha^\nu(x_1, \dots, x_m) \quad (14.5.19)$$

mit $i = 1 \dots m$, $k, l' = 1 \dots n$. Damit wird das DGL-System 14.5.12 linear:

$$\partial_i \alpha^k(x^1, \dots, x^m) = \sum_{l'} F_{il'}^k(x_1, \dots, x_m) \cdot \alpha^{l'}(x_1, \dots, x_m). \quad (14.5.20)$$

Dann ist

$$\frac{\partial f_j^l}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \sum_{l'=1}^n F_{jl'}^l \alpha^{l'} = F_{jk}^l, \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_i^l}{\partial \alpha^k} = F_{ik}^l,$$

$$\partial_i \alpha^k = f_i^k = \sum_{l'=1}^n F_{il'}^k \alpha^{l'}, \quad \text{und} \quad \partial_j \alpha^k = \sum_{l'=1}^n F_{jl'}^k \alpha^{l'},$$

$$\partial_i f_j^l |_{\alpha} = \sum_{l'=1}^n (\partial_i F_{jl'}^l) \alpha^{l'}, \quad \text{und} \quad \partial_j f_i^l |_{\alpha} = \sum_{l'=1}^n (\partial_j F_{il'}^l) \alpha^{l'}.$$

Wenn wir dies in die Frobenius-Gleichungen 14.5.15 einsetzen, so folgt

$$\sum_{l'=1}^n (\partial_i F_{jl'}^l) \alpha^{l'} - \sum_{l'=1}^n (\partial_j F_{il'}^l) \alpha^{l'} + \sum_{\substack{k=1 \\ l'=1}}^n F_{jk}^l F_{il'}^k \alpha^{l'} - \sum_{\substack{k=1 \\ l'=1}}^n F_{ik}^l F_{jl'}^k \alpha^{l'} \stackrel{!}{=} 0,$$

bzw. in Matrixschreibweise mit den $n \times n$ Matrizen F_i, F_j , $i, j = 1 \dots m$, und dem n -dimensionalen Vektor α :

$$(\partial_i F_j - \partial_j F_i + F_j \cdot F_i - F_i \cdot F_j) \cdot \alpha \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{bzw.} \quad (14.5.21)$$

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i + [F_j, F_i] \stackrel{!}{=} 0. \quad (14.5.22)$$

Achtung: Gelegentlich taucht in der Literatur auch die zu 14.5.21 transponierte Gleichung auf (z.B. in Eschenburg u. Jost (2007), S. 195, 233) und dies führt dann zu einem Vorzeichenwechsel im obigen Kommutator, denn mit $G_i := F_i^T$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + (F_j \cdot F_i)^T - (F_i \cdot F_j)^T) \\ &= \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + (F_i^T \cdot F_j^T - F_i^T \cdot F_j^T)) \\ &= \alpha^T \cdot (\partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j]). \end{aligned} \quad (14.5.23)$$

Wenn man die $n \times n$ Matrizen G_i , $i = 1 \dots m$, als eine Matrix-Differentialform schreibt, so erhält man:

$$G := \sum_{j=1}^m G_j dx^j \quad \Rightarrow$$

$$dG = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \partial_i G_j dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (\partial_i G_j - \partial_j G_i) dx^i dx^j ,$$

$$G \wedge G = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m G_i G_j dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m (G_i G_j - G_j G_i) dx^i dx^j ,$$

$$\boxed{(\partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dG + G \wedge G = 0 .} \quad (14.5.24)$$

Dieses Form der linearen Frobenius-Gleichungen wird als *Maurer-Cartan-Gleichung* bezeichnet und begegnet uns wieder und wieder in den Eichfeldtheorien der theoretischen Physik.

Beispiel: Das Eingangsbeispiel dieses Abschnitts stellte die Frage, wann genau ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}^3$ sich als Gradientenfeld einer Funktion $\bar{\alpha}(\mathbf{x}) = (x^1, x^2, x^3, \alpha(x^1, x^2, x^3))^T$, also als 3-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\bar{\alpha}$ in \mathbb{E}^{3+1} , mit $\partial_i \alpha = V_i$ darstellen läßt. Wir schreiben $\alpha =: \log \beta$ und erhalten

$$\partial_i \beta(\mathbf{x}) = V_i(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x}) , \quad i = 1 \dots 3 .$$

Dies ist gerade das lineare DGL-System 14.5.19 mit $n = 1$. Die hinreichende Bedingung für die Existenz von β bei vorgegebenem $V_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ ist 14.5.22 mit der eindimensionalen Matrix $F_i = V_i$, also:

$$\partial_i V_j - \partial_j V_i + [V_j, V_i] = \partial_i V_j - \partial_j V_i \stackrel{!}{=} 0 . \quad \square$$

Mit Hilfe des Satzes von Frobenius können wir jetzt auf den Spuren von Bonnet zeigen, daß die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend für die eindeutige Existenz einer 2-dimensionalen Fläche in \mathbb{E}^3 sind.

Satz 14.5.3 *Seien auf einem einfach zusammenhängenden 2-dimensionalen Gebiet $U \subset \mathbb{E}^3$ zwei 2-dimensionale symmetrische C^∞ -Funktionen $g, b : U \rightarrow \mathbb{E}^2$ (d.h. 2-dim. symmetrische Matrizen) gegeben, sei g eine positiv definite Metrik, und g und b mögen die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätsbedingungen (14.4.5, 14.4.6) erfüllen, dann sind g und b die erste und zweite Fundamentalform einer 2-dimensionalen Fläche in \mathbb{E}^3 .*

Beweis: Wir folgen der Beweisskizze von Eschenburg u. Jost (2007), S. 194-195, jedoch in unserer Bezeichnungsweise. In 14.4.1 und 14.2.16 hatten wir die beiden Gaußschen Flächengleichungen gefunden ($i, j, k = 1, 2$):

$$\partial_i \mathbf{x}_{u^j} := \frac{\partial}{\partial u^i} \mathbf{x}_{u^j}(u) = \Gamma_{ij}^k(u) \mathbf{x}_{u^k}(u) + K_{ij}(u) \mathbf{n}(u) ,$$

$$\partial_i \mathbf{n}(u) := \frac{\partial}{\partial u^i} \mathbf{n}(u) = -K_i^k(u) \mathbf{x}_{u^k}(u).$$

Es soll jetzt mittels des Satzes von Frobenius in seiner linearisierten Form 14.5.23 gezeigt werden, daß die Vorgabe von $K_{ij}(u)$, $g_{ij}(u)$ und damit auch $\Gamma_{ij}^k(u)$ hinreichend zur Bestimmung von $\mathbf{x}_{u^k}(u)$ und $\mathbf{n}(u)$ ist. Wir fassen die $\mathbf{x}_{u^k}(u)$ und $\mathbf{n}(u)$ zu einem Zeilenvektor zusammen:

$$\alpha := (\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}, \mathbf{n}),$$

und damit können wir die Gaußschen Flächengleichungen als eine Vektor-Differentialgleichung schreiben:

$$\partial_i(\mathbf{x}_{u^1}, \dots, \mathbf{n}) = (\mathbf{x}_{u^k}, \dots, \mathbf{n}) \begin{pmatrix} \Gamma_{il}^k & \dots & -K_i^k \\ \vdots & & \vdots \\ K_{il} & \dots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \partial_i \alpha = \alpha G_i.$$

Dabei sind $i, j \in \{1, \dots, m\}$ pro Gleichung fixiert, $k, k' \in \{1, \dots, n\}$ Matrixzeilenindizes, $l, l' \in \{1, \dots, n\}$ Matrixspaltenindizes. Die Frobenius Bedingungen 14.5.23 lauten dann:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i G_j - \partial_j G_i + [G_i, G_j].$$

$$\partial_i G_j - \partial_j G_i = \begin{pmatrix} \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k & \dots & -\partial_i K_j^k + \partial_j K_i^k \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[G_i, G_j] = \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{il'}^k & \dots & -K_i^k \\ \vdots & & \vdots \\ K_{il'} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_{jl'}^{k'} & \dots & -K_j^{k'} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{jl'} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l'} \Gamma_{il'}^k \Gamma_{jl'}^{k'} - K_i^k K_j^{k'} & \dots & -\sum_{l'} \Gamma_{il'}^k K_j^{k'} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{l'} K_{il'} \Gamma_{jl'}^{k'} & \dots & -\sum_{l'} K_{il'} K_j^{k'} \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} \sum_{l'} \Gamma_{jl'}^k \Gamma_{il'}^{k'} - K_j^k K_i^{k'} & \dots & -\sum_{l'} \Gamma_{jl'}^k K_i^{k'} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{l'} K_{jl'} \Gamma_{il'}^{k'} & \dots & -\sum_{l'} K_{jl'} K_i^{k'} \end{pmatrix}.$$

Die linearen Frobenius-Gleichungen liefern also vier Gleichungsblöcke:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \sum_{l'} \Gamma_{il'}^k \Gamma_{jl'}^{k'} - \sum_{l'} \Gamma_{jl'}^k \Gamma_{il'}^{k'} - K_i^k K_j^{k'} + K_j^k K_i^{k'},$$

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} -\partial_i K_j^k + \partial_j K_i^k - \sum_{\nu'} \Gamma_{i\nu'}^k K_{\nu'}^j + \sum_{\nu'} \Gamma_{j\nu'}^k K_{\nu'}^i, \\
0 &\stackrel{!}{=} \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} + \sum_{\nu'} K_{i\nu'} \Gamma_{\nu'jl} - \sum_{\nu'} K_{j\nu'} \Gamma_{\nu'il}, \\
0 &\stackrel{!}{=} -\sum_{\nu'} K_{i\nu'} K_{\nu'}^j + \sum_{\nu'} K_{j\nu'} K_{\nu'}^i.
\end{aligned}$$

Wir benutzen die Symmetrie von $K_{ij} = K_{ji}$ (14.2.11) und

$$\sum_i c_i d^i = \sum_{i,j} c_i \delta_j^i d^j = \sum_{i,j,k} c_i g^{ik} g_{kj} d^j = \sum_k c^k d_k = \sum_i c^i d_i.$$

Die vierte Zeile ist dann trivialerweise erfüllt, denn

$$\begin{aligned}
-\sum_{\nu'} K_{i\nu'} K_{\nu'}^j + \sum_{\nu'} K_{j\nu'} K_{\nu'}^i &= \sum_{\nu'} (-K_{\nu'i} K_{\nu'}^j + K_{j\nu'} K_{\nu'}^i) = \sum_{\nu'} (-K_{\nu'i} K_{\nu'j} + K_{j\nu'} K_{\nu'}^i) \\
&= \sum_{\nu'} (-K_{\nu'i} K_{j\nu'} + K_{j\nu'} K_{\nu'}^i) = 0.
\end{aligned}$$

Die dritte Zeile ist wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole im zweiten und dritten Index $\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$ und der Antisymmetrie im ersten und zweiten Index $\Gamma_{kij} = -\Gamma_{ikj}$ (14.4.3) identisch mit der zweiten Zeile, denn

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} + \sum_{\nu'} K_{i\nu'} \Gamma_{\nu'jl} - \sum_{\nu'} K_{j\nu'} \Gamma_{\nu'il} \\
&= \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} + \sum_{\nu'} K_{\nu'i} \Gamma_{\nu'jl} - \sum_{\nu'} K_{\nu'j} \Gamma_{\nu'il} \\
&= \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} + \sum_{\nu'} K_{\nu'i} \Gamma_{\nu'jl} - \sum_{\nu'} K_{\nu'j} \Gamma_{\nu'il} \\
&= \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} + \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu'lj} K_{\nu'}^i - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu'li} K_{\nu'}^j \\
&= \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} - \sum_{\nu'} \Gamma_{l\nu'j} K_{\nu'}^i + \sum_{\nu'} \Gamma_{l\nu'i} K_{\nu'}^j \quad \Rightarrow \\
0 &\stackrel{!}{=} \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} + \sum_{\nu'} \Gamma_{i\nu'}^l K_{\nu'}^j - \sum_{\nu'} \Gamma_{j\nu'}^l K_{\nu'}^i.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung formen wir noch ein wenig um:

$$0 \stackrel{!}{=} \partial_i K_{lj} - \partial_j K_{li} + \sum_{\nu'} \Gamma_{l\nu'}^i K_{\nu'}^j - \sum_{\nu'} \Gamma_{l\nu'}^j K_{\nu'}^i$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} + \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' i} K_{\nu' j} - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' j} K_{\nu' i} \\
&= \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' i} K_{\nu' j} + \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' l j} K_{\nu' i} \\
&= \partial_i K_{jl} - \partial_j K_{il} - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' i} K_{\nu' j} + \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' l j} K_{\nu' i} \\
&= \partial_i K_{jl} - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' i} K_{\nu' j} - (\partial_j K_{il} - \sum_{\nu'} \Gamma_{\nu' j l} K_{\nu' i}),
\end{aligned}$$

und erhalten gerade die Codazzi-Mainardi-Integrabilitätsbedingung 14.4.6.

In der ersten Zeile setzen wir den Riemannschen Krümmungstensor (14.4.4) ein:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \partial_i \Gamma_{jl}^k - \partial_j \Gamma_{il}^k + \sum_{\nu'} \Gamma_{i\nu'}^k \Gamma_{\nu' j l} - \sum_{\nu'} \Gamma_{j\nu'}^k \Gamma_{\nu' i l} - K_i^k K_{jl} + K_j^k K_{il} \\
&= R_{lij}^k - K_i^k K_{jl} + K_j^k K_{il}.
\end{aligned}$$

Und dies ist nun die Gaußsche Integrabilitätsbedingung 14.4.5. □

14.6 Das *Theorema Egregium* von Gauß

Gauß vermutete während der Zeit seiner Beschäftigung mit der Vermessung des Königreichs Hannover, daß die Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche sich allein aus Längen- und Winkelmessungen bestimmen läßt. Aber Gauß brauchte doch sehr viel Mühe und Zeit, bis er dies tatsächlich beweisen konnte. Umso größer war dann aber seine Freude über das Ergebnis, die er mit dem Titel *Theorema Egregium* (*Herausragender Satz*) seiner lateinisch verfaßten Arbeit ausdrückte.

Heute können wir den Inhalt des *Theorema Egregium* in Kürze so ausdrücken:

Satz 14.6.1 (Theorema Egregium von Gauß) *Die Gaußsche Krümmung $K_G(u)$ einer 2-dimensionalen Fläche M im 3-dimensionalen Raum \mathbb{E}^3 hängt nur von den Koeffizienten der ersten Fundamentalform $g_{ij}(u)$ und ihren Ableitungen ab, ist also eine intrinsische Größe von M .*

Beweis: Wir hatten in 14.4.4 gesehen, daß $R_{kij}^n(u)$ nur von den Christoffelsymbolen und deren ersten Ableitungen abhängt, und damit nach 14.4.2 also nur von $g_{ij}(u)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen. Aus 14.4.5 folgt:

$$\begin{aligned}
R_{ij}^{nk}(u) &= g^{km}(u) R_{mij}^n(u) = g^{km}(u) [K_{jm}(u) K_i^n(u) - K_{im}(u) K_j^n(u)] \\
&= g^{km}(u) [K_{mj}(u) K_i^n(u) - K_{mi}(u) K_j^n(u)]
\end{aligned}$$

$$= K^k_j(u)K^n_i(u) - K^k_i(u)K^n_j(u) .$$

Daraus folgt mit 14.3.2

$$\begin{aligned} R^{12}_{12}(u) &= K^2_2(u)K^1_1(u) - K^2_1(u)K^1_2(u) = \det(K^i_j(u)) \\ &= \frac{\det(K_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))} = \frac{\det(K(u))}{\det(g(u))} = \kappa_1(u)\kappa_2(u) = K_G(u) \end{aligned} \quad (14.6.1)$$

□

Damit hängt die Gaußsche Krümmung $K_G(u)$ nur von $g_{ij}(u)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen ab und ist eine intrinsische Größe der Fläche M und zugleich eine isometrische Invariante der Fläche, d.h. $K_G(u)$ bleibt unter Metrik-erhaltenden Abbildungen unverändert.

Diese Arbeit von Gauß war ein bedeutender Schritt auf dem Weg zur Theorie der geometrisch-topologischen Invarianten - und die Freude von Gauß über seine Entdeckung ist wirklich verständlich!

15 Riemannsche Geometrie

15.1 Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Bernhard Riemann wurde 1826 in Breselenz bei Dannenberg in Niedersachsen geboren. Wie sein Vater sollte er zunächst Pfarrer werden, aber bereits auf dem Gymnasium fiel dem Rektor Riemanns außergewöhnliche Begabung für Mathematik auf. Es heißt, Riemann habe das von seinem Rektor entlehene Buch von Legendre über Zahlentheorie mit 859 Seiten in einer Woche gelesen. Er begann ein Studium der Mathematik in Göttingen, wo er erstmals Gauß hörte, der aber für Studenten der Anfangssemester unzugänglich war. Riemann wechselte dann nach Berlin zu Jacobi und Dirchlett, die ihn unterstützten und förderten, und dann wieder zurück nach Göttingen. Er promovierte unter Gauß mit einer Arbeit über Funktionentheorie. Gleichzeitig hatte Riemann durch den Kontakt mit den Göttinger Physikern Weber und Listing ein starkes Interesse an Physik. Bei Weber hatte er 18 Monate eine Assistentenstelle inne. Riemann habilitierte mit der Arbeit „Über die Darstell-

barkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“, worin er u.a. für die Integration reeller Funktionen das sog. 'Riemann-Integral' einführte. Um als Privatdozent in Göttingen lehren zu dürfen, mußten die Kandidaten drei Themenvorschläge für ihre Probevorlesung einreichen - und üblicherweise wurde vom Dekan der Fakultät der oberste Vorschlag dieser Liste ausgewählt. Riemanns Vorschlag Nr. 3 lautete „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen“, und als Gauß das las, wählte er als Dekan dieses Thema für Riemanns Probevorlesung. Überrascht legte Riemann all seine Untersuchungen zum Thema „Elektrizität, Magnetismus, Licht und Gravitation“ zur Seite und schuf im Jahr 1854 in den 2 Monaten bis zu seiner Probevorlesung die Grundlagen der Differentialgeometrie in n Dimensionen. Der Physiker Weber, ein enger Freund von Gauß berichtete, daß Gauß nach Riemanns Vortrag außergewöhnlich begeistert und erregt gewesen sei. Dies war der letzte öffentliche Auftritt von Gauß in der Fakultät vor seinem Tod.

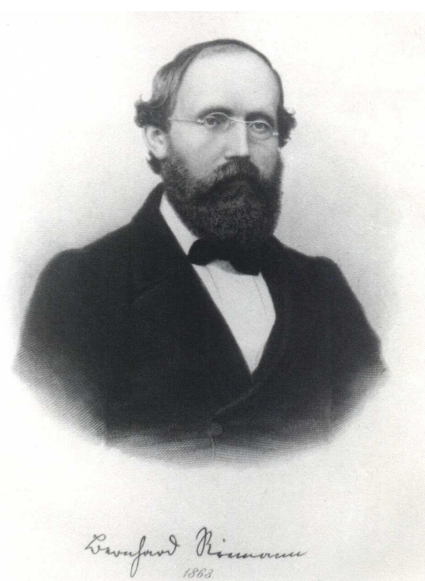


Abbildung 15.1: B. Riemann
A. Weger (1863), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann]

1855 starb Gauß und Dirichlet folgte ihm in Göttingen nach. Als auch Dirichlet im Jahr 1859 starb, erhielt Riemann den Göttinger Lehrstuhl für Mathematik. 1862 heiratete er Elise Koch, mit der er eine Tochter hatte. Riemann erkrankte an Tuberkulose und suchte Linderung im milderen Klima des Tessin, wo er dann mit nur 39 Jahren am Lago Maggiore verstarb.

Neben der Begründung der Differentialgeometrie in seiner Probevorlesung sind besonders wichtig Riemanns zahlreiche Beiträge zur Funktionentheorie, seine Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ von 1859 mit den Erkenntnissen zur Zetafunktion, sowie weitere Arbeiten zur Theorie der Integration, der Fourier-Transformation, der hypergeometrischen Differentialgleichung, der hyperbolischen Differentialgleichungen und zu Stabilitätsproblemen bei Lösungen partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Seine italienischen Mathematiker-Freunde Betti und Beltrami beeinflusste Riemann bei ihren Forschungen zur algebraischen Geometrie und Topologie.

Der Riemannsche Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen“ findet sich erfreulicherweise zusammen mit anderen Arbeiten Riemanns auf dem Server des GDZ, des 'Göttinger Digitalisierungszentrums': Riemann (1854).

Es gab zur Zeit von Riemann noch keine Tensorrechnung. Diese wurde erst in den Jahren 1887-1896 im Zusammenhang mit der Riemannschen n -dimensionalen Geometrie unter dem Titel „*absolute Differentialgeometrie*“ von Ricci-Curbastro und seinem Schüler Civita eingeführt. Wir werden im Folgenden die Riemannsche Differentialgeometrie vornehmlich in der 'neueren' Differentialformen-Darstellung verwenden, wie sie auf die Arbeiten von Élie Cartan (1869-1951) in den 1920'er Jahren zurückgeht.

[Quelle: de.wikipedia: Bernhard_Riemann].

15.2 Basen im Tangentialraum und Vielbeine

Es gibt Darstellungen der Riemannschen Differentialgeometrie wie Sand am Meer und viele Autoren kreieren ihre ganz eigenen Notationen. Evans schreibt im Vorwort seines schönen Buches *Partial Differential Equations* (Evans, 1998): „Notation is a nightmare“ :-)
Well, that's it!

Wir folgen hier weitgehend der Bezeichnungsweise von Nakahara (2003). Abweichend davon verwenden wir jedoch die heute bei vielen theoretischen Physikern gebräuchliche Konvention, die griechischen Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi$ nur für die Indizes von Koordinatenbasen $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ zu verwenden, und die lateinischen Buchstaben a, b, c, d, e, f für allgemeine Indizes, bzw. die Indizes von Nichtkoordinatenbasen $\{e_a\}$ (siehe etwa: Wald (1984), Freedman u. Van Proeyen (2012), etc.).

Warum will man eigentlich den zusätzlichen Aufwand einer Transformation auf eine Nichtkoordinatenbasis betreiben, obwohl eine Darstellung von Tensoren sich doch am leichtesten in einer Koordinatenbasis realisieren läßt? Aus der Sicht der Physik sind Nichtkoordinatenbasen unverzichtbar zur Realisierung von Spinoren in gekrümmten

Raumzeiten. Da es keine endlichdimensionalen, unitären Spinordarstellungen der Diffeomorphismengruppe gibt, führt also der Standard-Weg zu solchen endlichdimensionalen, unitären Spinordarstellungen über lokale Lorentztransformationen, und damit zu lokalen Nichtkoordinatenbasen (siehe etwa Wald (1984), Kapitel 13: Spinors).

Die Definitionen von Torsion, Krümmung, allgemeiner Metrik und Minkowski-Metrik stimmen mit den Definitionen in dem berühmten klassischen Werk **Gravitation** von Misner u. a. (1973) überein.

Zur Festlegung unserer im Folgenden verwendeten Bezeichnungen seien hier kurz einige Definitionen und Zusammenhänge erinnert.

Es sei M eine m -dimensionale C^∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit, d.h. ein topologischer Raum, der lokal homöomorph zu \mathbb{R}^m ist:

Definition 15.2.1 M heißt eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn gilt:

- (1) M ist ein topologischer Raum;
- (2) es gibt eine Überdeckung $\{U_i\}$ von M durch offene Mengen U_i , d.h. $\cup_i U_i = M$;
- (3) in jeder offenen Menge $U_i \subseteq M$ gibt es eine Koordinatenfunktion φ_{U_i} , d.h. einen Homöomorphismus $\varphi_{U_i} : U_i \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^m$ mit $\varphi_{U_i}(p) := (x_{U_i}^1(p), \dots, x_{U_i}^m(p))$, $p \in M$. Das Paar $\{U_i, \varphi_{U_i}\}$ heißt Karte und die $\{x_{U_i}^\mu\}$ die Koordinaten von U_i ;
- (4) im Überlappungsgebiet $U_i \cap U_j$ zweier Karten gibt es eine Kartenwechselabbildung als eine C^∞ -Abbildung $\psi_{ij} := \varphi_{U_i} \circ \varphi_{U_j}^{-1}$.

Eine allgemeine differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ohne Rand, da sie ja überall lokal zu \mathbb{R}^m sein soll. Allerdings kann man bei Bedarf auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand definieren (siehe etwa Nakahara (2003), S. 173 ff.).

Das Standardbeispiel aus der Physik für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist die 4-dimensionale Raumzeit-Mannigfaltigkeit.

Der Tangentialraum an einem Punkt $p \in M$ sei der Vektorraum $T_p M := \{V \mid V = V^\mu \partial_\mu = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 1 \dots m\}$. Die Menge $\{\partial_\mu \mid \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 1 \dots m\}$ ist die sogenannte *Koordinatenbasis*, auch *holonome Basis* genannt, des Tangentialraums.

Das Entsprechende gilt für $T_p^* M$, den Kotangentialraum oder Dualraum zu $T_p M$, also den Vektorraum $T_p^* M := \{w \mid w = w_\mu dx^\mu, \mu = 1 \dots m\}$.

Die Menge $\{dx^\mu \mid dx^\mu(\partial_\nu) := \langle dx^\mu \mid \partial_\nu \rangle := \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu, \mu, \nu = 1 \dots m\}$ ist die sogenannte Koordinatenbasis des Kotangentialraums.

Élie Cartan hat in seinen Arbeiten eingeführt, vom Tangentialraum $T_p M$ mittels einer linearen Abbildung von einer Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer *Nichtkoordinatenbasis* $\{e_a\}$, auch *nicht-holonome Basis* genannt, überzugehen.

Sei an einem Punkt $p \in M$ die Abbildung $e_a^\mu \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $\det e_a^\mu > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m -dimensionale Abbildung und

$e^a{}_\mu$ die entsprechende inverse Abbildung, also $e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu$ und $e^a{}_\mu e_b{}^\mu = \delta^a{}_b$. Die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ wird jetzt definiert als

$$e_a := e_a{}^\mu \partial_\mu . \quad (15.2.1)$$

Die Abbildung $e_a{}^\mu$ heißt *Vielbein*, bzw. bei $m = 2$ *Zweibein*, bei $m = 3$ *Dreibein* oder bei $m = 4$ *Vierbein*. Ein Vektor $X \in T_p M$ ist unabhängig von der verwendeten Basis, also gilt

$$\begin{aligned} X &= X^\mu \partial_\mu = X^a e_a = X^a e_a{}^\mu \partial_\mu \quad \Rightarrow \\ X^\mu &= X^a e_a{}^\mu , \quad X^a = e_a{}^\mu X^\mu . \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

Die zu $\{e_a\}$ duale Nichtkoordinatenbasis $\{\theta^a\}$ des Kotangentialraums wird definiert durch $\langle \theta^a | e_b \rangle = \delta^a{}_b$, also

$$\theta^a := e^a{}_\mu dx^\mu . \quad (15.2.3)$$

Für den Kommutator zweier Koordinatenbasisvektoren gilt $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

Wenn $X = X^\mu \partial_\mu$ und $Y = Y^\nu \partial_\nu$ zwei Tangentialvektoren sind, dann sind XY und YX keine Elemente des Tangentialraums $T_p M$, wohl aber der Kommutator $[X, Y] := XY - YX$, denn

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X^\mu \partial_\mu (Y^\nu \partial_\nu) - Y^\nu \partial_\nu (X^\mu \partial_\mu) \\ &= X^\mu (\partial_\mu Y^\nu) \partial_\nu - Y^\nu (\partial_\nu X^\mu) \partial_\mu . \end{aligned} \quad (15.2.4)$$

Also ist der Kommutator von zwei Nichtkoordinaten-Basisvektoren eine Linearkombination von Nichtkoordinaten-Basisvektoren:

$$[e_a, e_b] = c_{ab}{}^c e_c . \quad (15.2.5)$$

Die $c_{ab}{}^c \in \mathbb{R}$ heißen Strukturkonstanten. Sie sind offensichtlich schiefsymmetrisch in a und b und erfüllen die Jacobi-Identität:

$$[e_a, e_b] = -[e_b, e_a] \quad \Rightarrow \quad (15.2.6)$$

$$c_{ab}{}^c = -c_{ba}{}^c , \quad (15.2.7)$$

$$[[e_a, e_b], e_d] + [[e_d, e_a], e_b] + [[e_b, e_d], e_a] = 0 \quad \Rightarrow \quad (15.2.8)$$

$$c_{ab}{}^c c_{cd}{}^e + c_{da}{}^c c_{cb}{}^e + c_{bd}{}^c c_{ca}{}^e = 0 , \quad (15.2.9)$$

denn

$$\begin{aligned}
 (c_{ab}{}^c c_{cd}{}^e + c_{da}{}^c c_{cb}{}^e + c_{bd}{}^c c_{ca}{}^e) e_e &= [[e_a, e_b], e_d] + [[e_d, e_a], e_b] + [[e_b, e_d], e_a] \\
 &= (e_a e_b e_d - e_b e_a e_d - e_d e_a e_b + e_d e_b e_a) + (e_d e_a e_b - e_a e_d e_b - e_b e_d e_a + e_b e_a e_d) \\
 &\quad + (e_b e_d e_a - e_d e_b e_a - e_a e_b e_d + e_a e_d e_b) \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

Die Strukturkonstanten $c_{ab}{}^c$ beziehen sich aber ebenso wie die Basen $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ zunächst nur auf einen einzelnen Punkt $p \in M$.

Von einem Vektorfeld X auf M spricht man, wenn $X|_p$ für alle $p \in M$ definiert und glatt ist. Sei also $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller C^∞ -Funktionen auf M , d.h.:

$$\mathcal{F}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \circ \varphi_{U_i}^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m), \text{ auf allen Karten } U_i\}, \quad (15.2.10)$$

dann ist X ein Vektorfeld auf M , wenn gilt $X \in \mathcal{X}(M)$ mit:

$$\mathcal{X}(M) := \{X \mid X|_p \in T_p(M), X[f] := X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathcal{F}(M) \text{ für alle } f \in \mathcal{F}(M)\}. \quad (15.2.11)$$

Entsprechend zur Menge der Vektorfelder $\mathcal{X}(M)$ definiert man auch die Menge der 1-Formenfelder $\Omega^1(M)$ und die Menge der Tensorfelder $\mathcal{T}_r^q(M)$. Dabei ist $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$ und $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_0^1(M)$.

Das *Vielbein-Feld* (auch: *Rahmenfeld*, *moving frame*, *repère mobile*) e_α^μ ist ein Tensor aus $\mathcal{T}_1^1(M)$. Später werden wir in M eine Metrik einführen und dadurch zusätzliche Aussagen zu diesem Vielbein-Feld gewinnen können.

Immer wieder sehr nützlich ist die folgende Formel der äußeren Ableitung einer 1-Form: $d\omega$.

Lemma 15.2.2 *Seien $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$, dann gilt*

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]). \quad (15.2.12)$$

Beweis: Die zu beweisende Aussage ist unabhängig von der verwendeten Basis, also verwenden wir der Einfachheit halber eine Koordinatenbasis: $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu$, $\omega = w_\lambda dx^\lambda$. Für die linke Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
 d(w_\lambda dx^\lambda) &= \partial_\mu w_\lambda dx^\mu \wedge dx^\lambda = \partial_\mu w_\lambda (dx^\mu \otimes dx^\lambda - dx^\lambda \otimes dx^\mu) \Rightarrow \\
 d\omega(X, Y) &= (\partial_\mu w_\lambda)(X^\mu Y^\lambda - X^\lambda Y^\mu),
 \end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
& X[w(Y)] - Y[w(X)] - w([X, Y]) \\
&= X^\mu \partial_\mu (w_\lambda Y^\lambda) - Y^\nu \partial_\nu (w_\lambda X^\lambda) - (w_\lambda X^\mu \partial_\mu Y^\lambda - w_\lambda Y^\nu \partial_\nu X^\lambda) \\
&= X^\mu (\partial_\mu w_\lambda) Y^\lambda + X^\mu w_\lambda \partial_\mu Y^\lambda - Y^\nu (\partial_\nu w_\lambda) X^\lambda - Y^\nu w_\lambda \partial_\nu X^\lambda \\
&\quad - w_\lambda X^\mu \partial_\mu Y^\lambda + w_\lambda Y^\nu \partial_\nu X^\lambda \\
&= X^\mu Y^\lambda \partial_\mu w_\lambda - X^\lambda Y^\nu \partial_\nu w_\lambda = X^\mu Y^\lambda \partial_\mu w_\lambda - X^\lambda Y^\mu \partial_\mu w_\lambda \\
&= (\partial_\mu w_\lambda) (X^\mu Y^\lambda - X^\lambda Y^\mu) . \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 15.2.4 *Ein Feld von Basisvektoren $\{e_a\}$ ist genau dann lokal ein Feld einer Koordinatenbasis (Koordinatenrahmen), wenn $[e_a, e_b] = 0$ für alle a und b ist.*

Beweis: Wenn $e_\mu = \partial_\mu$, dann ist natürlich $[e_\mu, e_\nu] = 0$. Es bleibt also die Umkehrung zu zeigen.

Sei also $[e_a, e_b] = 0$ und sei $\{\theta^a\}$ die duale Basis zu $\{e_a\}$, dann folgt mit dem obigen Lemma

$$\begin{aligned}
d\theta^a(e_b, e_c) &= e_b[\theta^a(e_c)] - e_c[(\theta^a e_b)] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= e_b[\delta^a_c] - e_c[\delta^a_b] = 0 ,
\end{aligned}$$

da ja e_b, e_c Differentialoperatoren sind. $d\theta^a = 0$ heißt, daß θ^a geschlossen ist und nach dem Lemma von Poincaré damit auch lokal exakt (sofern die erste Betti-Zahl $b_1(M) = 0$ ist, siehe etwa Frankel (2004), S. 157), und also existieren lokal Funktionen x^a mit $\theta^a = dx^a$. Mit $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \neq 0$ folgt, daß die x^a linear unabhängig sind und also ein lokales Koordinatensystem bilden. Mit $\delta^a_b = \theta^a(e_b) = dx^a(e_b)$ folgt: $e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$. \square

Aus dem obigen Lemma kann man auch unschwer eine wichtige Strukturgleichung für die duale Basis in einem Nichtkoordinatensystem gewinnen:

Lemma 15.2.6 (Maurer-Cartan Strukturgleichung)

$$d\theta^a = -c_{bc}{}^a \theta^b \wedge \theta^c . \quad (15.2.13)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
d\theta^a(e_b, e_c) &= e_b[\theta^a(e_c)] - e_c[(\theta^a e_b)] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= e_b[\delta^a_c] - e_c[\delta^a_b] - \theta^a([e_b, e_c]) \\
&= -\theta^a(c_{bc}{}^d e_d) = -c_{bc}{}^a . \quad \square
\end{aligned}$$

15.3 Lie-Ableitung

Sei $Y \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M , also $Y|_p \in T_p M$ für $p \in M$. Wenn man sich jetzt für die Änderung von Y auf M interessiert, dann kann man Y nicht einfach differenzieren, indem man $Y|_{p_0+q} - Y|_{p_0}$ für $q \rightarrow 0$ betrachtet, denn die Differenz zwischen Vektoren der verschiedenen Tangentialräume $T_{p_0} M$ und $T_{p_0+q} M$ ist nicht definiert. Es bedarf zum Differenzieren von Vektoren in einer Mannigfaltigkeit also einer zusätzlichen Struktur, welche die verschiedenen Tangentialräume miteinander in einen Zusammenhang bringt. Eine sehr allgemeine Möglichkeit dazu ist die Lie-Ableitung, die hier kurz erläutert wird, bevor wir im nächsten Abschnitt dann ausführlich auf den affinen Zusammenhang (= kovariante Ableitung) eingehen.

Gegeben sei ein weiteres Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ und eine Integralkurve $\sigma(t, p_0)$ von X , d.h. eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung für $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$

$$\frac{d}{dt}\sigma(t, p_0) = X|_{\sigma(t, p_0)} \quad \text{mit} \quad \sigma(0, p_0) = p_0 . \quad (15.3.1)$$

Diese Integralkurve $\sigma(t, p_0)$ existiert und ist eindeutig für die Anfangswerte p_0 und $\sigma(0, p_0) = p_0$ in einer geeigneten Umgebung von p_0 (Satz von Picard-Lindelöf, siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238) und heißt der von X erzeugte Fluß durch p_0 .

Lemma 15.3.1 *Der Fluß $\sigma(t, p_0)$ ist bezüglich des Parameters $t \in \mathbb{R}$ eine 1-dimensionale kommutative Gruppe, für welche gilt*

$$\sigma(t_2, \sigma(t_1, p_0)) = \sigma(t_2 + t_1, p_0) . \quad (15.3.2)$$

Beweis: Für die linke Seite erhalten wir das DGL-Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt_2}\sigma(t_2, \sigma(t_1, p_0)) = X|_{\sigma(t_2, \sigma(t_1, p_0))} , \quad \sigma(0, \sigma(t_1, p_0)) = \sigma(t_1, p_0) ,$$

und für die rechte Seite

$$\frac{d}{dt_2}\sigma(t_2 + t_1, p_0) = \frac{d}{d(t_2 + t_1)}\sigma(t_2 + t_1, p_0) = X|_{\sigma(t_2 + t_1, p_0)} ,$$

$$\sigma(0 + t_1, p_0) = \sigma(t_1, p_0) .$$

Damit erfüllen die Funktionen auf der linken und auf der rechten Seite die gleiche DGL mit den gleichen Anfangswerten und sind also identisch (wieder wie oben aufgrund des Satzes von Picard-Lindelöf). \square

Diesen Fluß σ kann man jetzt benutzen, um einen Zusammenhang zwischen den Tangentialräumen entlang des Flußes und somit eine Ableitung eines Vektorfelds $Y \in \mathcal{X}(M)$ entlang dieses Flusses zu definieren - die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X Y$:

Definition 15.3.3 Seien X, Y Vektorfelder, d.h. $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, und sei $\sigma(t, p_0)$ eine von X erzeugte Integralkurve durch $p_0 \in M$, dann wird die Lie-Ableitung des Vektorfelds Y in Richtung von X wie folgt definiert:

$$\mathcal{L} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{L}_X Y := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sigma(-t, p)_* Y|_p - Y|_{p_0}) \quad \text{mit } p := \sigma(t, p_0). \quad (15.3.3)$$

Das heißt, $Y \in T_p M$ an der Stelle p wird mittels der Tangentialabbildung (pushforward) $\sigma(-t, p)_*$ auf den Tangentialraum $T_{p_0} M$ zurückabgebildet, bevor der Differentialquotient gebildet werden kann.

Von Bedeutung ist das folgende Lemma, das die Lie-Ableitung mit dem Kommutator der Vektorfelder in Beziehung setzt.

Lemma 15.3.4

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad (15.3.4)$$

bzw. in einer Koordinatendarstellung mit $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$:

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu) \partial_\mu. \quad (15.3.5)$$

Beweis: Seien $p_0, p \in U_i \subset M$ zwei nah benachbarte Punkte auf dem durch das Vektorfeld X definierten Fluß $\sigma(t, p_0)$ in der Karte (U_i, φ_{U_i}) mit den Koordinaten

$$x_0 = \varphi_{U_i}(p_0), \quad x = \varphi_{U_i}(p) = \varphi_{U_i}(\sigma(t, p_0)) = x_0 + tX|_{x_0},$$

wobei die Vektorfelder X und Y in U_i die folgenden Koordinatendarstellungen haben mögen: $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu$, dann folgt

$$\begin{aligned} Y|_p &\cong Y^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \\ &= (Y^\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0}) \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}. \end{aligned}$$

Jetzt transportieren wir $\partial_\mu|_x = \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}$ mittels $\sigma(-t, p)_*$ in Koordinatendarstellung zurück auf x_0 und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(-t, p))_*(\partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}) &= \frac{\partial x_0^\lambda}{\partial x^\mu} \partial_\lambda|_{x_0} = \frac{\partial(x^\lambda - tX^\lambda|_{x_0})}{\partial x^\mu} \partial_\lambda|_{x_0} \\ &= (\delta_\mu^\lambda - t \frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\lambda|_{x_0}) \partial_\lambda|_{x_0} = (\delta_\mu^\lambda - t \frac{\partial}{\partial x_0^\mu} X^\lambda|_{x_0} + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0} \\ &= (\delta_\mu^\lambda - t \partial_\mu|_{x_0} X^\lambda|_{x_0} + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \varphi_{U_i}(\sigma(-t, p))_* [Y^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \partial_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} - Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0}] \\
&= [(Y^\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0})(\delta_\mu^\lambda - t\partial_\mu|_{x_0} X^\lambda|_{x_0} + O(t^2)) \partial_\lambda|_{x_0} - Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0}] \\
&= [tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu Y^\mu|_{x_0} \partial_\mu|_{x_0} - tY^\mu|_{x_0} \partial_\mu X^\lambda|_{x_0} \partial_\lambda|_{x_0} + O(t^2)] \\
&= t[XY - YX]_{x_0} + O(t^2),
\end{aligned}$$

und damit $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. □

Man kann nun die Definition der Lie-Ableitung auch auf Tensoren beliebiger Stufe erweitern. Für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und für 1-Formen $w \in \Omega^1(M)$ ist diese Erweiterung naheliegend:

Definition 15.3.6 Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und sei $\sigma(t, p_0)$ eine von X erzeugte Integralkurve durch $p_0 \in M$, sei $f \in \mathcal{F}(M)$, d.h. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, eine Funktion und $w \in \Omega^1(M)$ ein 1-Formenfeld, dann wird die Lie-Ableitung von f , bzw. w , in Richtung von X definiert als:

$$\mathcal{L} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{L}_X f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(p) - f(p_0)) = X(f) \quad \text{mit } p := \sigma(t, p_0). \quad (15.3.6)$$

$$\mathcal{L} : \mathcal{X}(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^1(M) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{L}_X w := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sigma(t, p)^* w|_p - w|_{p_0}) \quad \text{mit } p := \sigma(t, p_0). \quad (15.3.7)$$

Warum wird in der Definition von $\mathcal{L}_X w$ die 1-Form w mittels $\sigma(t, p)^*$ nach p_0 transportiert, während in der Definition von $\mathcal{L}_X Y$ mit dem Vektor Y dies mittels $\sigma(-t, p)_*$ geschehen ist? Nun, σ_* hat als Tangentialabbildung (pushforward) die gleiche Richtung wie σ , während σ^* als Rücktransport (pullback) in der umgekehrten Richtung wirkt (11.1.4).

Lemma 15.3.7 Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und $w \in \Omega^1(M)$ ein 1-Formenfeld, dann gilt in einer Koordinatendarstellung mit $X = X^\mu \partial_\mu$, $w = w_\mu dx^\mu$:

$$\mathcal{L}_X w = (X^\nu \partial_\nu w_\mu + w_\nu \partial_\mu X^\nu) dx^\mu. \quad (15.3.8)$$

Beweis: Seien $p_0, p \in U_i \subset M$ zwei nah benachbarte Punkte auf dem durch das Vektorfeld X definierten Fluß $\sigma(t, p_0)$ in der Karte (U_i, φ_{U_i}) mit den Koordinaten

$$x_0 = \varphi_{U_i}(p_0), \quad x = \varphi_{U_i}(p) = \varphi_{U_i}(\sigma(t, p_0)) = x_0 + tX|_{x_0},$$

wobei das Vektorfeld X und das 1-Formenfeld w in U_i die folgenden Koordinatendarstellungen haben mögen: $X = X^\mu \partial_\mu$, $w = w_\mu dx^\mu$, dann folgt

$$\begin{aligned} w|_p &\cong w_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} dx^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} \\ &= (w_\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_\mu|_{x_0}) dx^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} . \end{aligned}$$

Jetzt transportieren $dx^\mu|_x = dx^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}$ mittels $\sigma(t, p)^*$ in Koordinatendarstellung zurück auf x_0 und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(t, p))^*(dx^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}}) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\lambda} dx^\lambda|_{x_0} = \frac{\partial(x_0^\mu + tX^\mu|_{x_0})}{\partial x_0^\lambda} dx^\lambda|_{x_0} \\ &= (\delta_\lambda^\mu + t \frac{\partial}{\partial x_0^\lambda} X^\mu|_{x_0}) dx^\lambda|_{x_0} , \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(t, p))^*[w_\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} dx^\mu|_{x_0+tX|_{x_0}} - w_\mu|_{x_0} dx^\mu|_{x_0}] \\ &= [(w_\mu|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_\mu|_{x_0})(\delta_\lambda^\mu + t \partial_\lambda|_{x_0} X^\mu|_{x_0}) dx^\lambda|_{x_0} - w_\mu|_{x_0} dx^\mu|_{x_0}] \\ &= t[X^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_\lambda|_{x_0} + w_\mu|_{x_0} \partial_\lambda X^\mu|_{x_0}] dx^\lambda|_{x_0} . \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_X w = (X^\nu \partial_\nu w_\mu + w_\nu \partial_\mu X^\nu) dx^\mu . \quad \square$$

Da \mathcal{L}_X auf $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{X}(M)$, $\Omega^1(M)$ ein linearer Differential-Operator ist gelten für ihn die Leibniz-Regeln und diese ermöglichen dann die Verallgemeinerung der Definition von \mathcal{L}_X auf Tensorfelder beliebiger Stufe. Sei etwa $h \in \mathcal{T}_1^1(M)$ ein gemischter Tensor mit einer Koordinaten-Darstellung $h = h_\mu^\nu dx^\mu \otimes \partial_\nu$, dann ist seine Lie-Ableitung der folgende Tensor aus $\mathcal{T}_1^1(M)$:

$$\mathcal{L}_X h = (X^\lambda \partial_\lambda h_\mu^\nu - h^\lambda_\nu \partial_\lambda X^\mu + h^\mu_\lambda \partial_\nu X^\lambda) \partial_\mu \otimes dx^\nu . \quad (15.3.9)$$

Häufiger kommt auch der Fall der Lie-Ableitung höherdimensionale Differentialformen $w \in \Omega^r(M)$ vor:

$$, \quad X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \quad X, X_1, \dots, X_{r-1} \in T_p(M) .$$

Lemma 15.3.9 Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und $w \in \Omega^r(M)$ ein r -Formenfeld, dann gilt in einer Koordinatendarstellung mit $X = X^\mu \partial_\mu$, $w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$:

$$\mathcal{L}_X w = \frac{1}{r!} [X^\nu \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r} + \sum_{s=1}^r w_{\mu_1 \dots \nu_s \dots \mu_r} \partial_{\mu_s} X^{\nu_s}] dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} , \quad \text{oder} \quad (15.3.10)$$

$$\mathcal{L}_X w = \frac{1}{r!} [X^\nu \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r} + r w_{\nu \mu_2 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1} X^\nu] dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} . \quad (15.3.11)$$

Beweis: Seien $p_0, p \in U_i \subset M$ zwei nah benachbarte Punkte auf dem durch das Vektorfeld X definierten Fluß $\sigma(t, p_0)$ in der Karte (U_i, φ_{U_i}) mit den Koordinaten

$$x_0 = \varphi_{U_i}(p_0), \quad x = \varphi_{U_i}(p) = \varphi_{U_i}(\sigma(t, p_0)) = x_0 + tX|_{x_0},$$

wobei das Vektorfeld X und das r -Formenfeld w in U_i die folgenden Koordinatendarstellungen haben mögen: $X = X^\mu \partial_\mu$, $w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$, dann folgt

$$\begin{aligned} w|_p &\cong \frac{1}{r!} w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0+tX|_{x_0}} dx^{\mu_1}|_{x_0+tX|_{x_0}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0+tX|_{x_0}} \\ &= \frac{1}{r!} (w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0}) dx^{\mu_1}|_{x_0+tX|_{x_0}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0+tX|_{x_0}}. \end{aligned}$$

Jetzt transportieren $dx^{\mu_i}|_x = dx^{\mu_i}|_{x_0+tX|_{x_0}}$ mittels $\sigma(t, p)^*$ in Koordinatendarstellung zurück auf x_0 und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(t, p))^*(dx^{\mu_i}|_{x_0+tX|_{x_0}}) &= \frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial x_0^{\lambda_i}} dx^{\lambda_i}|_{x_0} = \frac{\partial(x_0^{\mu_i} + tX^{\mu_i}|_{x_0})}{\partial x_0^{\lambda_i}} dx^{\lambda_i}|_{x_0} \\ &= (\delta_{\lambda_i}^{\mu_i} + t \frac{\partial}{\partial x_0^{\lambda_i}} X^{\mu_i}|_{x_0}) dx^{\lambda_i}|_{x_0}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi_{U_i}(\sigma(t, p))^* \frac{1}{r!} [w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0+tX|_{x_0}} dx^{\mu_1}|_{x_0+tX|_{x_0}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0+tX|_{x_0}} \\ - w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} dx^{\mu_1}|_{x_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0}] \\ &= \frac{1}{r!} [(w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} + tX^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0}) \\ &\quad (\delta_{\lambda_1}^{\mu_1} + t \partial_{\lambda_1}|_{x_0} X^{\mu_1}|_{x_0}) dx^{\lambda_1}|_{x_0} \wedge \dots \wedge (\delta_{\lambda_r}^{\mu_r} + t \partial_{\lambda_r}|_{x_0} X^{\mu_r}|_{x_0}) dx^{\lambda_r}|_{x_0} \\ &\quad - w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} dx^{\mu_1}|_{x_0} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0}] \\ &= t \frac{1}{r!} [X^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} \delta_{\lambda_1}^{\mu_1} \dots \delta_{\lambda_r}^{\mu_r} \\ &\quad + w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} \partial_{\lambda_1} X^{\mu_1}|_{x_0}] dx^{\lambda_1}|_{x_0} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0} + \dots \\ &\quad + w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} \partial_{\lambda_r} X^{\mu_r}|_{x_0} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\lambda_r}|_{x_0} + t^2 \frac{1}{r!} [\dots] \\ &= t \frac{1}{r!} [X^\nu|_{x_0} \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r}|_{x_0} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &\quad + w_{\nu_1 \mu_2 \dots \mu_r}|_{x_0} \partial_{\mu_1} X^{\nu_1}|_{x_0}] dx^{\mu_1}|_{x_0} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_r}|_{x_0} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + w_{\mu_1 \dots \mu_{r-1} \nu_r} |_{x_0} \partial_{\mu_r} X^{\nu_r} |_{x_0} dx^{\mu_1} |_{x_0} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_r} |_{x_0} + t^2 \frac{1}{r!} [\dots] \\
& = t \frac{1}{r!} [X^\nu |_{x_0} \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r} + \sum_{s=1}^r w_{\mu_1 \dots \nu_s \dots \mu_r} |_{x_0} \partial_{\mu_s} X^{\nu_s}] \\
& \quad \cdot dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} + t^2 \frac{1}{r!} [\dots] \\
\mathcal{L}_X w & = \frac{1}{r!} [X^\nu \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r} + \sum_{s=1}^r w_{\mu_1 \dots \nu_s \dots \mu_r} \partial_{\mu_s} X^{\nu_s}] dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} ,
\end{aligned}$$

oder unter Ausnutzung der Antisymmetrie von $w_{\mu_1 \dots \mu_r}$ und $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$:

$$\mathcal{L}_X w = \frac{1}{r!} [X^\nu \partial_\nu w_{\mu_1 \dots \mu_r} + r w_{\nu \mu_2 \dots \mu_r} \partial_{\mu_1} X^\nu] dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} . \quad \square$$

Wenn nun $\mathcal{L}_X T = 0$ auf ganz M ist, dann bleibt T bei der Verschiebung entlang jeder Integralkurve $\sigma(t, p_0)$ konstant. Wenn es sich bei T um den metrischen Tensor $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ mit $\mathcal{L}_X g = 0$ handelt, so spricht man von einer Isometrie. Wenn diese Isometrie mit $\mathcal{L}_X g = 0$ nicht auf ganz M gilt, sondern nur auf den Integralkurven gewisser Vektorfelder X , dann heißen diesen Vektorfelder Killing-Felder. Sie sind in Untersuchungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie besonders interessant, denn sie führen zu wichtigen Erhaltungssätzen.

Zwei Folgerungen aus der Definition der Lie-Ableitung sind immer wieder hilfreich

Lemma 15.3.11 (Cartans Formel)

$$1. \quad \mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X , \quad (15.3.12)$$

$$2. \quad \text{Cartans Formel: } \mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X . \quad (15.3.13)$$

Beweis: 1. Sei $f \in \mathcal{F}(M)$, d.h. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, eine Funktion, und seien $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und $Y \in \mathcal{X}(M)$ ein fixierter Vektor, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X df(Y) & = \frac{d}{dt} (\sigma(t, p)^* df)(Y) = \frac{d}{dt} (df(\sigma(t, p)_* Y)) \\
& = \frac{d}{dt} (\sigma(t, p)_* Y(f)) = \frac{d}{dt} (Y(\sigma(t, p)^* f)) \\
& = Y \frac{d}{dt} ((\sigma(t, p)^* f)) = Y(\mathcal{L}_X f) = d(\mathcal{L}_X f)(Y) .
\end{aligned}$$

Und nun das gleiche für r -Formenfelder $w \in \Omega^r(M)$ mit $w = \frac{1}{r!} w_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X dw &= \mathcal{L}_X d\left[\frac{1}{r!} w_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\right] \\
 &= \mathcal{L}_X \left[\frac{1}{r!} (dw_{\mu_1, \dots, \mu_r}) \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\right] \\
 &= \frac{1}{r!} (\mathcal{L}_X dw_{\mu_1, \dots, \mu_r}) \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\quad + \frac{1}{r!} (dw_{\mu_1, \dots, \mu_r}) \wedge (\mathcal{L}_X dx^{\mu_1}) \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} + \dots \\
 &= \frac{1}{r!} (d\mathcal{L}_X w_{\mu_1, \dots, \mu_r}) \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\
 &\quad + \frac{1}{r!} (w_{\mu_1, \dots, \mu_r}) \wedge d(\mathcal{L}_X x^{\mu_1}) \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} + \dots \\
 &= d\mathcal{L}_X \left[\frac{1}{r!} w_{\mu_1, \dots, \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}\right] = d\mathcal{L}_X w .
 \end{aligned}$$

2. Mit diesem Ergebnis läßt sich nun leicht Cartan's Formel beweisen. Es genügt diese Formel für Funktionen und Differential von Funktionen zu zeigen.

$$[i_X d + di_X]f = i_X df + 0 = df(X) = X(f) = \mathcal{L}_X f ,$$

$$[i_X d + di_X]df = 0 + di_X df = dX(f) = d\mathcal{L}_X f = \mathcal{L}_X df ,$$

$$\text{also : } \mathcal{L}_X = i_X d + di_X .$$

□

15.4 Das Lemma von Poincaré

Zunächst einmal stellt die Gleichung $d\omega = 0$ mit einer r -Form ω eine homogenes System von Differentialgleichungen dar:

$$d_r \omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \omega_{i_1 \dots i_r} \right) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (15.4.1)$$

Das sieht man sehr schön an den folgenden Beispielen aus dem Raum \mathbb{R}^3 :

$$\omega := f(x^1, x^2, x^3) \quad \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial x^1} f(x^1, x^2, x^3) dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} f(x^1, x^2, x^3) dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} f(x^1, x^2, x^3) dx^3$$

$$= (\vec{\nabla}_i f) dx^i . \quad (15.4.2)$$

$$\begin{aligned} \omega &:= \omega_1(x^1, x^2, x^3) dx^1 + \omega_2(x^1, x^2, x^3) dx^2 + \omega_3(x^1, x^2, x^3) dx^3 \quad \Rightarrow \\ d\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \omega_2 - \frac{\partial}{\partial x^2} \omega_1 \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \omega_3 - \frac{\partial}{\partial x^3} \omega_2 \right) dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \omega_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} \omega_3 \right) dx^3 \wedge dx^1 \\ &= (\vec{\nabla} \times \omega)_1 dx^2 \wedge dx^3 + (\vec{\nabla} \times \omega)_2 dx^3 \wedge dx^1 + (\vec{\nabla} \times \omega)_3 dx^1 \wedge dx^2 . \end{aligned} \quad (15.4.3)$$

$$\begin{aligned} \omega &:= \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2 \quad \Rightarrow \\ d\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \omega_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} \omega_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} \omega_3 \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= (\vec{\nabla} \cdot \omega) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 . \end{aligned} \quad (15.4.4)$$

Für Physiker stellt sich jetzt natürlich sofort die Frage: wenn eine Feldstärke $\omega \in \Omega^r(M)$ als eine geschlossene r -Form gegeben sei, also $d\omega = 0$, existiert dann eine zugehörige $(r-1)$ -Form $\theta \in \Omega^{r-1}(M)$, ein sog. Potential, mit $\omega = d\theta$? Mathematisch ausgedrückt heißt diese Frage: unter welchen Voraussetzungen sind *geschlossene* Formen auch *exakte* Formen?

Die Antwort ist als das Lemma von Poincaré benannt. Um Poincarés Leistung wertschätzen zu können muß man daran erinnern, daß zu dessen Lebzeiten der Formalismus der Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten noch nicht vorhanden war.

Satz 15.4.1 (Lemma von Poincaré) *Wenn eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension m eine sternförmige lokale Koordinaten-Umgebung U hat, die sich stetig auf einen Punkt $x_0 \in M$ zusammenziehen läßt, dann ist jede geschlossene Form auch eine exakte Form.*

Es gibt in der Literatur verschiedene Beweise dieses Satzes. Nakahara (2003), S. 235 ff., beschreibt sehr schön die sog. *Zylinderkonstruktion*. Wir wollen hier aber dem Beweis mittels der *Lie-Ableitung* folgen, wie er z.B. in Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 213, sehr elegant vorgeführt wird.

Beweis: Die Aussage des Satzes gilt ja nur für lokale Umgebungen $U \subset M$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , also kann man statt in M direkt auf einer lokalen Karte $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ arbeiten. Sei also $\omega \in \Omega^r(\mathbb{R}^m)$. Dann wird zunächst ein linearer Operator $T : \Omega^r(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^{r-1}(\mathbb{R}^m)$ mit der folgenden Eigenschaft konstruiert:

$$Td\omega + dT\omega \stackrel{!}{=} \omega . \quad (15.4.5)$$

Weil nach Voraussetzung $d\omega = 0$ ist folgt $\omega = dT\omega$ und damit ist $\theta := T\omega$ die gesuchte Lösung mit $\omega = d\theta$.

Jetzt soll dieser Operator T konstruiert und gezeigt werden, daß er die gewünschten Eigenschaften hat.

$$T\omega(x) := \int_0^1 t^{r-1} i_x \omega(tx) dt, \quad x \in \mathbb{R}^m \quad \Rightarrow \quad (15.4.6)$$

$$(Td + dT)\omega(x) = \int_0^1 t^{r-1} (i_x d + di_x) \omega(tx) dt.$$

Nun ist aber $(i_x d + di_x) = \mathcal{L}_x$, wofür wir die Darstellung 15.3.11 einsetzen, und damit folgt:

$$\begin{aligned} (Td + dT)\omega(x) &= \int_0^1 t^{r-1} [\mathcal{L}_x \omega(tx)] dt \\ &= \int_0^1 t^{r-1} \frac{1}{r!} [r\omega_{\nu\mu_2\dots\mu_r}(tx) \partial_{\mu_1} x^\nu + x^\nu \partial_\nu \omega_{\mu_1\dots\mu_r}(tx)] (dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) dt \\ &= \int_0^1 t^{r-1} [r\omega(tx) + x^\nu t \frac{\partial \omega(tx)}{\partial (tx)^\nu}] dt \\ &= \int_0^1 t^{r-1} [r\omega(tx) + t \frac{\partial \omega(tx)}{\partial (tx)^\nu} \frac{\partial (tx)^\nu}{\partial t}] dt \\ &= \int_0^1 t^{r-1} [r\omega(tx) + t \frac{\partial \omega(tx)}{\partial (tx)} \cdot \frac{\partial (tx)}{\partial t}] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^r \omega(tx)] dt = \omega(x). \quad \square \end{aligned}$$

15.5 Affiner Zusammenhang oder kovariante Ableitung

Es hat sich gezeigt, daß einer der wichtigsten Begriffe der Differentialgeometrie und der theoretischen Physik der Begriff der Krümmung von Kurven, Flächen und Räumen ist. Im euklidischen Raum \mathbb{E}^n ist die Krümmung einer nach Bogenlänge parametrisierten

Kurve $c_B : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^n$ einfach der Betrag der zweiten Ableitung der Kurve nach der Bogenlänge, d.h. $\kappa(s) = |c_B''(s)|$ (10.1.6).

Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M steht uns in jedem Punkt $p \in M$ der jeweilige Tangentialraum $T_p M$ zur Verfügung, wir können aber zunächst keine Differenzen von Vektoren an verschiedenen Punkten, also etwa $c'(s+\epsilon) - c'(s)$, bilden, da nicht definiert ist, wie die Tangentialräume $T_{p+\epsilon}$ und T_p miteinander zusammenhängen. Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Definitionen eines Zusammenhangs auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt, die alle ihre jeweiligen Vorteile haben, aber glücklicherweise letztlich alle miteinander übereinstimmen - siehe die ausführliche Diskussion in Spivak (1979), II.

Wir beginnen mit der kovarianten Differentiation mittels der linearen Abbildung ∇ , die auch affiner Zusammenhang, bzw. nach dem französischen Mathematiker Jean-Louis Koszul (*1921) Koszul-Zusammenhang genannt wird. Anschließend gehen wir zu der Zusammenhangs-1-Form ω des Cartan-Zusammenhangs über, die Cartan als Zusammenhang im Vektorfeld der Nichtkoordinaten-Basen $\{e_\alpha\}$ unter dem Stichwort *begleitende Vielbeine* (*Rahmenfelder*, *moving frames*, *repère mobile*) eingeführt hat. Später, im Zusammenhang mit *Prinzipalbündeln* (*Hauptfaserbündeln*), werden wir uns auf den Ehresmann-Zusammenhang des französischen Mathematikers Charles Ehresmann (1905-1979) stützen, der insbesondere bei Mannigfaltigkeiten von Lie-Gruppen den Paralleltransport von Vektoren sehr transparent werden läßt.

Die kovariante Ableitung, oder der affine Zusammenhang (oder Koszul-Zusammenhang), wird definiert als eine bilineare Abbildung auf Vektorfeldern über der Mannigfaltigkeit M , die zusätzlich eine Leibniz-Regel erfüllt:

Definition 15.5.1

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad \text{mit } (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y \quad \text{für } X, Y \in \mathcal{X}(M) :$$

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) := \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \quad (15.5.1)$$

$$\nabla_{(X_1+X_2)} Y := \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad (15.5.2)$$

$$\nabla_{(fX)} Y := f \nabla_X Y \quad \text{für } f \in \mathcal{F}(M), \quad (15.5.3)$$

$$\nabla_X (fY) := X[f]Y + f \nabla_X Y \quad \text{für } f \in \mathcal{F}(M). \quad (15.5.4)$$

Aus Konsistenzgründen erweitert man diese Definition auf triviale Weise um eine kovariante Ableitung von Funktionen, d.h.

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad \text{mit } (X, f) \rightarrow \nabla_X f \quad \text{für } X \in \mathcal{X}(M), f \in \mathcal{F}(M) :$$

$$\nabla_X f := X[f]. \quad (15.5.5)$$

Die kovariante Ableitung der Basisvektoren definiert die sog. Zusammenhangskoeffizienten:

$$\nabla_a e_b := \nabla_{e_a} e_b := \omega^c{}_{ab} e_c . \quad (15.5.6)$$

Seien $X = X^a e_a$ und $Y = Y^b e_b$ so folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a} Y^b e_b = X^a (e_a[Y^b] e_b + Y^b \nabla_{e_a} e_b) \\ &= X^a (e_a[Y^b] e_b + Y^b \omega^c{}_{ab} e_c) = X^a (e_a[Y^b] + \omega^c{}_{ab} Y^b) e_c . \end{aligned} \quad (15.5.7)$$

Mit Hilfe der Definition des Differentials $df(X) := X[f]$ und dem Dualbasisvektor θ^a mit $\theta^a[X] = \theta^a[X^d e_d] = X^a$ kann man dies auch folgendermaßen formulieren:

$$\nabla_X Y = (dY^c(X) + \omega^c{}_{ab} X^a Y^b) e_c = (dY^c + \omega^c{}_{ab} \theta^a Y^b) X e_c , \quad (15.5.8)$$

Am häufigsten werden wir die folgende Kurzform der kovarianten Ableitung verwenden:

$$(\nabla_a Y)^c = (\nabla_{e_a} Y)^c = e_a[Y^c] + \omega^c{}_{ab} Y^b . \quad (15.5.9)$$

In einer Koordinatenbasis mit $X = X^\mu \partial_\mu$ und $Y = Y^\nu \partial_\nu$ erhalten wir für die kovariante Ableitung eines Vektors einfach:

$$\nabla_X Y = \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} Y^\nu \right) X^\mu \partial_\lambda , \text{ bzw. } (\nabla_\mu Y)^\lambda = \frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda{}_{\mu\nu} Y^\nu . \quad (15.5.10)$$

Für die kovariante Ableitung einer 1-Form $w = w_b \theta^b$ ergibt sich:

$$X[w(Y)] := X[\langle w | Y \rangle] = \nabla_X \langle w | Y \rangle = \langle \nabla_X w | Y \rangle + \langle w | \nabla_X Y \rangle .$$

Für die linke Seite ergibt sich

$$X[\langle w | Y \rangle] = X^a e_a[w_b Y^b] = X^a e_a[w_b] Y^b + X^a w_b e_a[Y^b] ,$$

und für den zweiten Ausdruck der rechten Seite

$$\langle w | \nabla_X Y \rangle = w_b (\nabla_X Y)^b = w_b X^a (e_a[Y^b] + \omega^b{}_{ac} Y^c) .$$

Aus diesen 3 Zeilen folgt

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X w | Y \rangle &= X[\langle w | Y \rangle] - \langle w | \nabla_X Y \rangle \\ &= X^a e_a[w_b] Y^b + X^a w_b e_a[Y^b] - w_b X^a (e_a[Y^b] + \omega^b{}_{ac} Y^c) \\ &= X^a (e_a[w_b] Y^b - w_b \omega^b{}_{ac} Y^c) = X^a (e_a[w_b] Y^b - w_c \omega^c{}_{ab} Y^b) \\ &= X^a (e_a[w_b] - w_c \omega^c{}_{ab}) Y^b \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\nabla_X w = X^a (e_a[w_b] - \omega^c_{ab} w_c) \theta^b . \quad (15.5.11)$$

Wie oben werden wir am häufigsten die folgende Kurzform der kovarianten Ableitung verwenden:

$$(\nabla_a w)_b = (\nabla_{e_a} w)_b = e_a[w_b] - \omega^c_{ab} w_c . \quad (15.5.12)$$

In einer Koordinatenbasis ist das einfach:

$$\nabla_X w = \left(\frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} - \omega^\lambda_{\mu\nu} w_\lambda \right) X^\mu dx^\nu , \text{ bzw. } (\nabla_\mu w)_\nu = \frac{\partial w_\nu}{\partial x^\mu} - \omega^\lambda_{\mu\nu} w_\lambda . \quad (15.5.13)$$

Die Definitionsgleichung 15.5.4 der kovarianten Ableitung hat die Form einer Leibniz-Regel. Daher liegt es nahe, die Leibniz-Regel ganz allgemein für die kovariante Ableitung von Tensorfeldern auf M zu fordern.

Definition 15.5.2 Seien $T_1 \in \mathcal{T}_{r_1}^{q_1}(M)$, $T_2 \in \mathcal{T}_{r_2}^{q_2}(M)$ zwei Tensorfelder auf M mit

$$\mathcal{T}_r^q(M) = \{ T \mid T = T_{1\dots r}^{1\dots q} \partial_1 \otimes \dots \otimes \partial_q \otimes dx^1 \otimes \dots \otimes dx^r \} ,$$

dann gelte für die kovariante Ableitung die Leibniz-Regel

$$\nabla_X (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2) . \quad (15.5.14)$$

Daraus folgt nun sofort:

$$\begin{aligned} (\nabla_a T)_{b_1 \dots b_r}^{c_1 \dots c_q} &= (\nabla_{e_a} T)_{b_1 \dots b_r}^{c_1 \dots c_q} \\ &= e_a [T_{b_1 \dots b_r}^{c_1 \dots c_q}] + \omega_{ad}^{c_1} T_{b_1 \dots b_r}^{dc_2 \dots c_q} + \dots + \omega_{ad}^{c_q} T_{b_1 \dots b_r}^{c_1 \dots c_{q-1} d} \\ &\quad - \omega_{ab_1}^d T_{db_2 \dots b_r}^{c_1 \dots c_q} - \omega_{ab_r}^d T_{b_1 \dots b_{r-1} d}^{c_1 \dots c_q} , \end{aligned} \quad (15.5.15)$$

bzw. in einer Koordinatenbasis

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu T)_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} &= (\nabla_{x^\mu} T)_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} + \omega_{\mu\kappa}^{\lambda_1} T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_q} + \dots + \omega_{\mu\kappa}^{\lambda_q} T_{\nu_1 \dots \nu_r}^{\lambda_1 \dots \lambda_{q-1} \kappa} \\ &\quad - \omega_{\mu\nu_1}^\kappa T_{\kappa \nu_2 \dots \nu_r}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} - \omega_{\mu\nu_r}^\kappa T_{\nu_1 \dots \nu_{r-1} \kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_q} . \end{aligned} \quad (15.5.16)$$

Der Paralleltransport eines Vektors $Y \in \mathcal{X}(M)$ entlang einer glatten Kurve $c : (a, b) \rightarrow M$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, wird nun mit Hilfe des oben eingeführten Zusammenhangs definiert. Sei $X = \left\{ \frac{d}{ds} \in \mathcal{X}(M) \mid c(s) \in C^\infty(M) \right\}$ das Tangentialvektorfeld an die Kurve $c(s)$, dann heißt Y entlang $c(s)$ parallel verschoben, wenn gilt

$$X|_{c(s)} = \frac{d}{ds} \Big|_{c(s)} = X^\mu \partial_\mu \Big|_{c(s)} = \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} \partial_\mu \Big|_{c(s)} \Rightarrow \nabla_X Y = 0 , \quad (15.5.17)$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda_{\mu\nu} Y^\nu \right) X^\mu \partial_\lambda = \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + \omega^\lambda_{\mu\nu} Y^\nu \right) \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} \partial_\lambda \\
&= \left(\frac{dY^\lambda}{ds} + \omega^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} Y^\nu \right) \partial_\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\quad \frac{dY^\lambda}{ds} + \omega^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(c(s))}{ds} Y^\nu = 0 . \tag{15.5.18}
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung für die Parallelverschiebung eines Vektors Y entlang einer Kurve $c(s)$ kann man auch sofort ersehen, warum dieser *Koszul-Zusammenhang* zumeist *Affiner Zusammenhang* genannt wird. Denn wenn wir die Kurve $c(s)$ einer affinen Transformation unterziehen, also $\tilde{c}(t) := c(s)$ mit $s := a \cdot t + t_0$, dann bleibt die Gleichung 15.5.18 für die Parallelverschiebung unverändert.

Eine Geodäte wird nun definiert als eine Kurve $c(s)$, deren Tangentenvektor $X = \frac{d}{ds}$ bei Parallelverschiebung entlang von $c(s)$ unverändert bleibt, also

$$\nabla_X X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \omega^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 . \tag{15.5.19}$$

Diese Geodätengleichung entspricht genau der Geodätengleichung 12.0.6, die wir für Kurven in m -dimensionalen Hyperflächen $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ abgeleitet hatten und stellt damit eine weitreichende Verallgemeinerung auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten M dar.

15.6 Der Torsionstensor

Wenn nun in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein solcher affiner Zusammenhang vorliegt, so lassen sich aus der kovarianten Ableitung ∇_X weitere Tensoren bilden - die beiden wichtigsten sind der Torsionstensor (das Torsionstensorfeld) $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$ und der Krümmungstensor (das Krümmungstensorfeld) $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$. Beide Tensoren werden zunächst völlig unabhängig von einer eventuell zusätzlich vorhandenen Metrik definiert.

Während gewöhnliche Ableitungen kommutieren, trifft dies für kovariante Ableitungen i.A. nicht zu. Für $X = \partial_\mu$ und $Y = \partial_\nu$ gilt ja in Bezug auf C^∞ -Funktionen $[X, Y] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$. Seien jetzt $X = X^\beta e_\beta$ und $Y = Y^\gamma e_\gamma$ beliebige Vektoren aus $\mathcal{X}(M)$, dann stellt $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ einen Differentialoperator 2.Ordnung für C^∞ -Funktionen dar, denn sei $f \in C^\infty(M)$, dann gilt mit 15.5.4 und einem konstanten $e_0 \in \mathcal{X}(M)$ für die kovarianten Ableitungen:

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X)f e_0 = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)f e_0 .$$

Dieser Ausdruck ist zwar per Konstruktion koordinatenunabhängig, aber nicht bilinear in X und Y und damit kein Tensor, denn es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y - \nabla_Y X &= X^b e_b [Y^c] e_c + X^b Y^c \omega_{bc}^d e_d - Y^c e_c [X^b] e_b - Y^c X^b \omega_{cb}^d e_d \\
&= X^b e_b [Y^c e_c] - Y^c e_c [X^b e_b] - (X^b Y^c e_b [e_c] - Y^c X^b e_c [e_b]) \\
&\quad + X^b Y^c (\omega_{bc}^d - \omega_{cb}^d) e_d \\
&= [X, Y] - X^b Y^c [e_b, e_c] + X^b Y^c (\omega_{bc}^d - \omega_{cb}^d) e_d \\
&= [X, Y] + X^b Y^c (\omega_{bc}^d - \omega_{cb}^d) e_d - X^b Y^c c_{bc}^d e_d .
\end{aligned}$$

Hier ist der Kommutator $[X, Y]$ auf der rechten Seite kein Tensor, weil er keine bilineare Funktion in X und Y ist, denn mit $f, g \in C^\infty$ folgt:

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= fX[gY] - gY[fX] = f(X[g]Y + gX[Y]) - g(Y[f]X + fY[X]) \\
&= fg[X, Y] + fX[g]Y - gY[f]X \neq fg[X, Y] .
\end{aligned}$$

Jedoch ist offensichtlich $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ sowohl unabhängig von der gewählten Basis, als auch bilinear in X und Y , und damit ein Tensor, der Torsionstensor genannt wird:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] , \quad (15.6.1)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$T^a_{bc} := \langle \theta^a | T(e_b, e_c) \rangle = \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} - c_{bc}^a . \quad (15.6.2)$$

Um die geometrische Bedeutung des Torsionstensors T zu veranschaulichen betrachtet man üblicherweise ein kleines, d.h. infinitesimales, Parallelogramm in der Mannigfaltigkeit M .

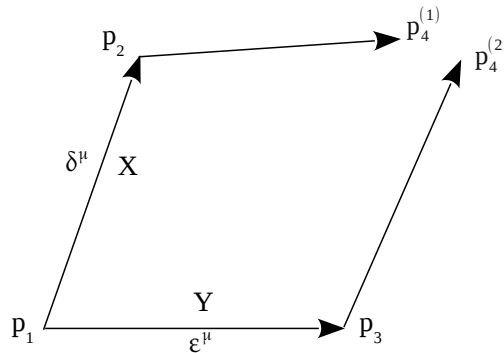


Abbildung 15.2: infinitesimales Parallelogramm und Torsion

Der Startpunkt des Parallelogramms $p_1 \in M$ habe die Koordinaten x^μ und wir wählen die entsprechende Koordinatenbasis ∂_μ , so daß die Strukturkonstanten $c_{ab}^c = 0$ sind

(15.2.5). Seien jetzt $p_2, p_3 \in M$ zwei weitere Punkte des Parallelogramms mit den Koordinaten $x^\mu + \delta^\mu$, bzw. $x^\mu + \epsilon^\mu$, mit infinitesimalen δ^μ und ϵ^μ . Seien weiter

$$X = X^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \delta^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \delta^\mu \partial_\mu, \quad \text{und} \quad Y = Y^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \epsilon^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \epsilon^\mu \partial_\mu$$

zwei Vektoren aus $T_{p_1} M$ mit $X^\mu = \overline{p_1 p_2} = \delta^\mu$ und $Y^\mu = \overline{p_1 p_3} = \epsilon^\mu$. Aus der Gleichung 15.5.18 für die Parallelverschiebung eines Vektors X entlang einer Kurve $c(s)$ um die infinitesimale Strecke ds folgt:

$$dX^\lambda + \omega^\lambda_{\nu\mu} dx^\nu(c(s)) X^\mu = 0, \quad \Rightarrow$$

$$dX^\lambda = -\omega^\lambda_{\nu\mu} dx^\nu(c(s)) X^\mu.$$

Jetzt verschieben wir den Vektor X parallel entlang Y bis zu p_3 und erhalten den Punkt $p_4^{(2)}$:

$$x^\lambda + \epsilon^\lambda + (\delta^\lambda - \omega^\lambda_{\nu\mu} \epsilon^\nu \delta^\mu).$$

Ebenso verschieben wir den Vektor Y parallel entlang X bis zu p_2 und erhalten den Punkt $p_4^{(1)}$:

$$x^\lambda + \delta^\lambda + (\epsilon^\lambda - \omega^\lambda_{\mu\nu} \delta^\mu \epsilon^\nu).$$

Die Differenz der beiden Parallelogrammpunkte $p_4^{(2)}$ und $p_4^{(1)}$ wird gerade vom Torsionstensor bestimmt:

$$\overline{p_4^{(2)} p_4^{(1)}} = (\omega^\lambda_{\mu\nu} - \omega^\lambda_{\nu\mu}) \delta^\mu \epsilon^\nu = T^\lambda_{\mu\nu} \delta^\mu \epsilon^\nu. \quad (15.6.3)$$

In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit affinem Zusammenhang und nichtverschwindender Torsion schließt sich also ein durch Parallelverschiebungen konstruiertes infinitesimales Parallelogramm nicht.

Einstein hat in seiner *Allgemeinen Relativitätstheorie* zur Beschreibung der Gravitation einen torsionsfreien Zusammenhang für die vierdimensionale Raumzeit angenommen und den Energie-Impuls-Tensor an die Krümmung gekoppelt. Wenn man in dieser Weise die Torsion in der ganzen Mannigfaltigkeit M zu Null setzt und eine Koordinatenbasis ∂_μ verwendet, so daß die Strukturkonstanten $c_{ab}{}^c = 0$ sind, dann sind die Zusammenhangskoeffizienten symmetrisch: $\omega^c{}_{ab} = \omega^c{}_{ba}$.

Erweiterte Gravitationstheorien, wie z.B. die *Einstein-Cartan-Theorie (EC)*, die *Supergravity (SUGRA)* oder die *Loop-Quantum-Gravity (LQG)* verwenden die Torsion und koppeln diese an Fermionenspins. Die *EC-Theorie* läßt sich als Eichtheorie der lokalen Poincaré-Gruppe ableiten (z.B. Hehl u. a. (1976)) und die *SUGRA-Theorie* als Eichtheorie der lokalen Super-Poincaré-Gruppe (z.B. Freedman u. Van Proeyen (2012)).

15.7 Der Krümmungstensor

Wenn der Differentialoperator 2.Ordnung $(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)$, dem wir soeben schon bei der Torsion begegnet sind, nicht auf C^∞ -Funktionen angewandt wird, sondern auf Vektoren $Z \in \mathcal{X}(M)$, so gelangen wir zum Krümmungstensor. Seien $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ mit $X = X^c e_c, Y = Y^d e_d, Z = Z^b e_b$:

$$\begin{aligned}
K_1 &:= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z \\
&= (\nabla_{X^c e_c} \nabla_{Y^d e_d} - \nabla_{Y^d e_d} \nabla_{X^c e_c}) Z^b e_b \\
&= X^c \nabla_c (Y^d \nabla_d Z^b e_b) - Y^d \nabla_d (X^c \nabla_c Z^b e_b) \\
&= X^c \nabla_c (Y^d (\nabla_d Z^b) e_b + Y^d Z^b \nabla_d e_b) - Y^d \nabla_d (X^c (\nabla_c Z^b) e_b + X^c Z^b \nabla_c e_b) \\
&= X^c (\nabla_c Y^d) (\nabla_d Z^b) e_b + X^c Y^d (\nabla_c \nabla_d Z^b) e_b + X^c Y^d (\nabla_d Z^b) \nabla_c e_b \\
&\quad + X^c (\nabla_c Y^d) Z^b \nabla_d e_b + X^c Y^d (\nabla_c Z^b) \nabla_d e_b + X^c Y^d Z^b (\nabla_c \nabla_d e_b) \\
&\quad - Y^d (\nabla_d X^c) (\nabla_c Z^b) e_b - Y^d X^c (\nabla_d \nabla_c Z^b) e_b - Y^d X^c (\nabla_c Z^b) \nabla_d e_b \\
&\quad - Y^d (\nabla_d X^c) Z^b \nabla_c e_b - Y^d X^c (\nabla_d Z^b) \nabla_c e_b - Y^d X^c Z^b (\nabla_d \nabla_c e_b) .
\end{aligned}$$

Der 3. und der 11. Term, sowie der 5. und der 9. Term, heben sich gegenseitig auf. Im 2. und 8. Term finden wir für $\nabla_c \nabla_d Z^b = e_c e_d Z^b$, bzw. $\nabla_d \nabla_c Z^b = e_d e_c Z^b$, denn die $e_a \in T_p(M)$ sind ja Differentialoperatoren:

$$Z^b \in C^\infty(M) \Rightarrow \nabla_d Z^b = e_d Z^b \in C^\infty(M) \Rightarrow e_c e_d Z^b \in C^\infty(M) , \Rightarrow$$

$$X^c Y^d (\nabla_c \nabla_d Z^b) e_b - Y^d X^c (\nabla_d \nabla_c Z^b) e_b = X^c Y^d ([e_c, e_d] Z^b) e_b = X^c Y^d (c_{cd}^e e_e Z^b) e_b .$$

Damit ergibt sich für K_1 :

$$\begin{aligned}
K_1 &= X^c (\nabla_c Y^d) (\nabla_d Z^b) e_b + X^c Y^d (c_{cd}^e e_e Z^b) e_b \\
&\quad + X^c (\nabla_c Y^d) Z^b \nabla_d e_b + X^c Y^d Z^b (\nabla_c \nabla_d e_b) \\
&\quad - Y^d (\nabla_d X^c) (\nabla_c Z^b) e_b - Y^d (\nabla_d X^c) Z^b \nabla_c e_b - Y^d X^c Z^b (\nabla_d \nabla_c e_b) .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nun offensichtlich nicht in X, Y, Z multilinear. Also versucht man, ebenso wie zuvor bei der Torsion, die Nichtlinearitäten von $(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z$ abzu ziehen, um einen Tensor 3. Stufe zu erhalten.

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= [X^c e_c, Y^d e_d] = X^c e_c (Y^d e_d) - Y^d e_d (X^c e_c) \\
&= X^c (e_c Y^d) e_d + X^c Y^d e_c e_d - Y^d (e_d X^c) e_c - Y^d X^c e_d e_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^c(e_c Y^d)e_d - Y^d(e_d X^c)e_c + X^c Y^d [e_c, e_d] \\
&= X^c(e_c Y^d)e_d - Y^d(e_d X^c)e_c + X^c Y^d c_{cd}{}^e e_e . \\
K_2 &:= \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= X^c(\nabla_c Y^d)\nabla_d Z - Y^d(\nabla_d X^c)\nabla_c Z + X^c Y^d c_{cd}{}^e \nabla_e Z \\
&= X^c(\nabla_c Y^d)(\nabla_d Z^b)e_b + X^c Z^b(\nabla_c Y^d)\nabla_d e_b \\
&\quad - Y^d(\nabla_d X^c)(\nabla_c Z^b)e_b - Y^d Z^b(\nabla_d X^c)\nabla_c e_b \\
&\quad + X^c Y^d c_{cd}{}^a (\nabla_a Z^b)e_b + X^c Y^d Z^b (c_{cd}{}^e \nabla_e e_b) .
\end{aligned}$$

Für die Differenz $K_1 - K_2$ ergibt sich nun der gesuchte in X, Y, Z multilineare Ausdruck, der Krümmungstensor R :

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &:= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= X^c Y^d Z^b \{ \nabla_c \nabla_d e_b - \nabla_d \nabla_c e_b - c_{cd}{}^e \nabla_e e_b \} \\
&= X^c Y^d Z^b \{ \nabla_c \omega^e{}_{db} e_e - \nabla_d \omega^e{}_{cb} e_e - c_{cd}{}^e \nabla_e e_b \} \\
&= X^c Y^d Z^b \cdot \{ (e_c \omega^e{}_{db}) e_e + \omega^e{}_{db} \omega^f{}_{ce} e_f - (e_d \omega^e{}_{cb}) e_e - \omega^e{}_{cb} \omega^f{}_{de} e_f - c_{cd}{}^e \omega^f{}_{eb} e_f \} , \\
&\hspace{15em} (15.7.1)
\end{aligned}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &:= \langle \theta^a \mid R(e_c, e_d)e_b \rangle \\
&= e_c \omega^a{}_{db} - e_d \omega^a{}_{cb} + \omega^e{}_{db} \omega^a{}_{ce} - \omega^e{}_{cb} \omega^a{}_{de} - c_{cd}{}^e \omega^a{}_{eb} .
\end{aligned} \tag{15.7.2}$$

Der Krümmungstensor $R^a{}_{bcd}$ ist in den beiden Indizes c, d antisymmetrisch, da ja die Strukturkonstanten $c_{cd}{}^e$ in den beiden unteren Indizes antisymmetrisch sind (15.2.7):

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc} . \tag{15.7.3}$$

Um die geometrische Bedeutung des Krümmungstensors R zu veranschaulichen betrachtet man üblicherweise ein kleines, d.h. infinitesimales, Parallelogramm in der Mannigfaltigkeit M . Das Parallelogramm möge in diesem Beispiel geschlossen sein, also M ohne Torsion.

Der Startpunkt des Parallelogramms $p_1 \in M$ habe die Koordinaten x^μ und wir wählen die entsprechende Koordinatenbasis ∂_μ , so daß die Strukturkonstanten $c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$ sind

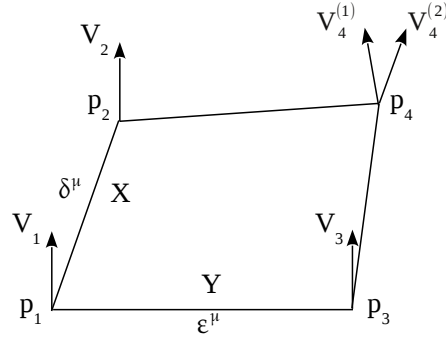


Abbildung 15.3: infinitesimales Parallelogramm und Krümmung

(15.2.5). Seien jetzt $p_2, p_3 \in M$ zwei weitere Punkte des Parallelogramms mit den Koordinaten $x^\mu + \delta^\mu$, bzw. $x^\mu + \epsilon^\mu$, mit infinitesimalen δ^μ und ϵ^μ . Seien weiter

$$X = X^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \delta^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \delta^\mu \partial_\mu, \quad \text{und} \quad Y = Y^\mu \partial_\mu = \frac{d(x^\mu + \epsilon^\mu s)}{ds} \partial_\mu = \epsilon^\mu \partial_\mu$$

zwei Vektoren aus $T_{p_1}M$ mit $X^\mu = \overline{p_1 p_2} = \delta^\mu$ und $Y^\mu = \overline{p_1 p_3} = \epsilon^\mu$. Aus der Gleichung 15.5.18 für die Parallelverschiebung eines Vektors V entlang einer Kurve $c(s)$ um die infinitesimale Strecke ds folgt:

$$dV^\kappa + \omega^\kappa_{\lambda\mu} dx^\lambda(c(s)) V^\mu = 0, \quad \Rightarrow$$

$$dV^\kappa = -\omega^\kappa_{\lambda\mu} dx^\lambda(c(s)) V^\mu.$$

Wir verschieben den Vektor V_1 vom Punkt p_1 parallel entlang X bis zu p_2 und erhalten V_2 . Danach verschieben wir V_2 parallel bis zu p_4 und erhalten den Vektor $V_4^{(1)}$:

$$V_2^\kappa = V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu.$$

$$\begin{aligned} V_4^{(1)\kappa} &= V_2^\kappa - \omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_2) V_2^\lambda \epsilon^\nu \\ &= V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu - [\omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_2) (V_1^\lambda - \omega^\lambda_{\mu\xi}(p_1) V_1^\xi \delta^\mu) \epsilon^\nu] \\ &= V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \delta^\mu \\ &\quad - [(\omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1) + \partial_\mu \omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1) \delta^\mu) (V_1^\lambda - \omega^\lambda_{\mu\xi}(p_1) V_1^\xi \delta^\mu) \epsilon^\nu] + O(|\delta|^2 |\epsilon|). \end{aligned}$$

Ebenso verschieben wir den Vektor V_1 vom Punkt p_1 parallel entlang Y bis zu p_3 und erhalten V_3 . Danach verschieben wir V_3 parallel bis zu p_4 und erhalten den Vektor $V_4^{(2)}$:

$$V_3^\kappa = V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1) V_1^\lambda \epsilon^\nu.$$

$$\begin{aligned}
V_4^{(2)\kappa} &= V_3^\kappa - \omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_3)V_3^\lambda\delta^\mu \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\epsilon^\nu - [\omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_3)(V_1^\lambda - \omega^\lambda_{\nu\xi}(p_1)V_1^\xi\epsilon^\nu)\delta^\mu] \\
&= V_1^\kappa - \omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\epsilon^\nu \\
&\quad - [(\omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1) + \partial_\nu\omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1)\epsilon^\nu)(V_1^\lambda - \omega^\lambda_{\nu\xi}(p_1)V_1^\xi\epsilon^\nu)\delta^\mu] + O(|\delta||\epsilon|^2) .
\end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Vektoren $V_4^{(2)}$ und $V_4^{(1)}$ bis zur 2. Ordnung in δ und ϵ wird gerade vom Krümmungstensor bestimmt:

$$\begin{aligned}
V_4^{(2)\kappa} - V_4^{(1)\kappa} &= -\partial_\nu\omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu + \partial_\mu\omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \\
&\quad + \omega^\kappa_{\mu\xi}(p_1)\omega^\xi_{\nu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu - \omega^\kappa_{\nu\xi}(p_1)\omega^\xi_{\mu\lambda}(p_1)V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \\
&= [\partial_\mu\omega^\kappa_{\nu\lambda}(p_1) - \partial_\nu\omega^\kappa_{\mu\lambda}(p_1) \\
&\quad + \omega^\kappa_{\mu\xi}(p_1)\omega^\xi_{\nu\lambda}(p_1) - \omega^\kappa_{\nu\xi}(p_1)\omega^\xi_{\mu\lambda}(p_1)] V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu \\
&= R^\kappa_{\lambda\mu\nu}V_1^\lambda\delta^\mu\epsilon^\nu .
\end{aligned}$$

In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M mit affinem Zusammenhang und nichtverschwindender Krümmung ist also das Resultat der Parallelverschiebung eines Vektors wegabhängig.

In der *Einsteinschen Gravitationstheorie* spielt jedoch nicht der Riemannsche-Krümmungstensor, sondern der daraus durch Kontraktion des 1. und 3. Indexes abgeleitete *Ricci-Tensor* die entscheidende Rolle.

$$Ric(Z, Y) := \langle \theta^a \mid R(e_a, Y)Z \rangle , \quad (15.7.4)$$

bzw. in Komponenten

$$Ric_{bd} = Ric(e_b, e_d) = R^a_{bad} . \quad (15.7.5)$$

Wir werden bei der Bianchi-2 Identität und später beim Levi-Civita Zusammenhang auf den Ricci-Tensor zurückkommen.

15.8 Élie Cartan (1869 - 1951)

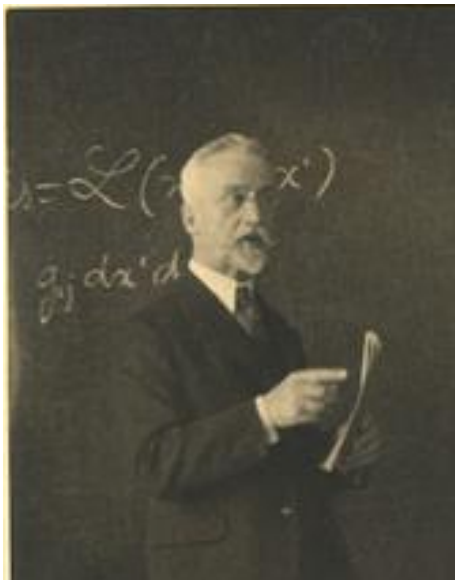


Abbildung 15.4: Élie Cartan im Math. Seminar Hamburg, unbekannt, CC-BY-SA-2.5. Bildausschnitt des Originals. (Math. Inst. Oberwolfach) [http://de.wikipedia.org/wiki/Élie_Cartan]

Élie Cartan wurde 1869 als Sohn eines Schmieds in Dolomieu im Departement Isère in Frankreich geboren. Er fiel seinen Lehrern bereits in der Grundschule auf, so daß er ein Stipendium zum Besuch des Gymnasiums in Lyon und anschließend ab 1888 zum Studium an der École Normale Supérieure in Paris erhielt. Dort promovierte er 1894 mit einer Arbeit über Lie-Algebren und Lie-Gruppen. Dieses Thema beschäftigte ihn danach noch viele Jahre und letztlich konnte er eine vollständige Klassifikation der komplexen, einfachen Lie-Gruppen erzielen. Nach seiner Promotion unterrichtete er zunächst an der Universität von Montpellier und von 1896 bis 1903 an der Universität von Lyon. Im Jahr 1903 erhielt er eine Professur an der Universität von Nancy und ab 1909 lehrte er in Paris an der Sorbonne auf verschiedenen Lehrstühlen. In der Zeit des Ersten Weltkriegs arbeitete er im Hospital der Ecole Normale Supérieure. Im Jahr 1940 emeritierte er und verstarb 1951 nach einer langen, schweren Krankheit.

Élie Cartan war seit 1903 mit Marie-Luise Bianconi verheiratet und führte ein ruhiges

und glückliches Familienleben. Das Ehepaar Cartan hatte vier Kinder, die alle ebenfalls erwähnenswert sind:

- Henri Cartan (1904-2008), ein bedeutender Mathematiker und Gründungsmitglied der berühmten Gruppe *Nicolas Bourbaki*, die sich um einen streng axiomatischen Aufbau der Mathematik auf den Spuren Hilberts bemühte. Henri Cartan war Doktorvater vieler berühmter französischer Mathematiker (u.a. Dolbeaut, Koszul, Thom), und privat ein guter Pianist,
- Jean Cartan (1906-1932), ein außergewöhnlicher Komponist, der leider schon mit 25 Jahren an Tuberkulose verstarb,
- Louis Cartan (1909-1943), ein Physiker, der sich im 2. Weltkrieg der Resistance anschloß und von den Nazis 1943 ermordet wurde,
- Hélène Cartan (1917-1952), eine begabte Mathematikerin und Pianistin, die leider auch viel zu früh an einem schweren Verlauf einer Tuberkulose verstarb.

Élie Cartans wichtigste Arbeiten behandeln die Themen:

Lie-Algebren und deren Klassifizierung (1894), Lie-Gruppen und deren Topologie und

Darstellungen (1914), partielle Differentialgleichungen, integrable Systeme und Integral-Invarianten, Differentialgeometrie und dabei insb. Strukturgruppen und die Klassifizierung global irreduzibler symmetrischer Riemannscher Räume (1926-27), begleitende Vielbeine (Rahmenfelder, moving frames, repère mobile) und Zusammenhänge. Besonders erwähnenswert aus der Sicht der Physik ist sicherlich Cartans Einführung der Spinoren im Jahr 1913 und seine Erweiterung von Einsteins *Allgemeiner Relativitätstheorie* um die Torsion im Jahr 1921, die heute so genannte *Einstein-Cartan-Theorie* (*EC-Theorie*).

Cartan war ein sehr bescheidener und humorvoller Mensch und vielleicht ist dies ein Grund dafür, daß seine Zeitgenossen erst nach Jahrzehnten die Bedeutung seiner Forschungen und didaktischen Innovationen, wie etwa den Differentialformen-Kalkül, erkennen und wertschätzen konnten. Heute begegnet uns der Name Cartan überall in der Theorie der Lie-Gruppen, partiellen Differentialgleichungen und der Differentialgeometrie.

Cartan war neben seinen Forschungen auch ein begabter und engagierter akademischer Lehrer (im Gegensatz etwa zu Poincaré oder Einstein). Ein auch heute noch mit Gewinn zu lesendes Buch und ein Beispiel für Cartans klare und schöne Darstellung komplexer Zusammenhänge sind seine Vorlesungen über Spinoren, die zuerst auf französisch (Cartan (1938)) und später auf englisch (Cartan (1966)) erschienen sind.

Zu seinen zahlreichen bedeutenden Schülern gehörte auch Shiing-Shen Chern (s.u. der Nachruf auf Élie Cartan von Chern und Chevalley).

[Quellen: en.wikipedia: Élie_Cartan, O'Connor u. Robertson (2013), Chern u. Chevalley (1952), Audin (2008)]

15.9 Die Cartansche Zusammenhangsform

Élie Cartan hat in der Differentialgeometrie anstelle der Beschreibung der Geometrie durch Tensoren eine elegante Beschreibung durch Differentialformen eingeführt, die insbesondere die Behandlung der Geometrie in Lie-Gruppen und Faserbündeln transparenter gestaltet. Dazu führte Cartan die Zusammenhangs-1-Form, die Torsions-2-Form und die Krümmungs-2-Form ein, die wir hier im Kontext der Riemannschen Geometrie betrachten:

$$\omega^a_b := \omega^a_{cb} \theta^c, \quad (15.9.1)$$

$$T^a := \frac{1}{2} T^a_{bc} \theta^b \wedge \theta^c, \quad (15.9.2)$$

$$R^a_b := \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d. \quad (15.9.3)$$

Diese Zusammenhangs-1-Form erfüllt die beiden Cartanschen Strukturgleichungen:

Satz 15.9.1 (Cartan Strukturgleichung)

$$T^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b, \quad (15.9.4)$$

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b. \quad (15.9.5)$$

Beweis: Zunächst zur Torsions-2-Form:

$$\begin{aligned} T^a(e_b, e_c) &= \frac{1}{2} T^a_{de} \theta^d \wedge \theta^e(e_b, e_c) \\ &= \frac{1}{2} T^a_{de} (\theta^d(e_b) \theta^e(e_c) - \theta^d(e_c) \theta^e(e_b)) \\ &= \frac{1}{2} (T^a_{bc} - T^a_{cb}) = T^a_{bc}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichung ergibt sich:

$$(d\theta^a + \omega^a_e \wedge \theta^e)(e_b, e_c) = d\theta^a(e_b, e_c) + (\omega^a_{de} \theta^d \wedge \theta^e)(e_b, e_c).$$

Für die äußere Ableitung einer 1-Form hatten wir in 15.2.12 die hilfreiche Formel gefunden:

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]).$$

Damit und mit 15.6.2 ergibt sich das gesuchte Ergebnis:

$$\begin{aligned} (d\theta^a + \omega^a_e \wedge \theta^e)(e_b, e_c) &= e_b[\delta_c^a] - e_c[\delta_b^a] - \theta^a([e_b, e_c]) + \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} \\ &= \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} - c_{bc}^a = T^a_{bc}. \end{aligned}$$

Nun zur Krümmungs-2-Form:

$$\begin{aligned} R^a_b(e_c, e_d) &= \frac{1}{2} R^a_{bef} \theta^e \wedge \theta^f(e_c, e_d) \\ &= \frac{1}{2} R^a_{bef} (\theta^e(e_c) \theta^f(e_d) - \theta^e(e_d) \theta^f(e_c)) \\ &= \frac{1}{2} (R^a_{bcd} - R^a_{bdc}) = R^a_{bcd}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} (d\omega^a_b + \omega^a_e \wedge \omega^e_b)(e_c, e_d) &= (d(\omega^a_{eb} \theta^e) + \omega^a_{fe} \omega^e_{gb} (\theta^f \wedge \theta^g - \theta^g \wedge \theta^f))(e_c, e_d) \\ &= d(\omega^a_{eb} \theta^e)(e_c, e_d) + \omega^a_{ce} \omega^e_{db} - \omega^a_{de} \omega^e_{cb}. \end{aligned}$$

Wie oben mit 15.2.12 und mit 15.7.2 folgt für die äußere Ableitung einer 1-Form:

$$(d\omega^a_b + \omega^a_e \wedge \omega^e_b)(e_c, e_d) = e_c[\omega^a_{eb} \theta^e(e_d)] - e_d[\omega^a_{eb} \theta^e(e_c)] - \omega^a_{eb} \theta^e([e_c, e_d])$$

$$\begin{aligned}
& + \omega^a_{ce} \omega^e_{db} - \omega^a_{de} \omega^e_{cb} \\
& = e_c[\omega^a_{db}] - e_d[\omega^a_{cb}] - \omega^a_{eb} c_{cd}^e + \omega^a_{ce} \omega^e_{db} - \omega^a_{de} \omega^e_{cb} \\
& = R^a_{bcd} . \quad \square
\end{aligned}$$

Wenn man auf die beiden Cartanschen Strukturgleichungen 15.9.4 und 15.9.5 nochmals die äußere Ableitung d anwendet, so erhält man die beiden Bianchi-Identitäten:

$$dT^a + \omega^a_b \wedge T^b = R^a_b \wedge \theta^b , \quad (15.9.6)$$

$$dR^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - R^a_c \wedge \omega^c_b = 0 . \quad (15.9.7)$$

Beweis: Zunächst Bianchi-1:

$$\begin{aligned}
dT^a & = d(d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b) = d(\omega^a_b \wedge \theta^b) \\
& = d\omega^a_b \wedge \theta^b - \omega^a_b \wedge d\theta^b \\
& = R^a_b \wedge \theta^b - \omega^a_c \wedge \omega^c_b \wedge \theta^b - \omega^a_b \wedge (T^b - \omega^b_c \wedge \theta^c) \\
& = R^a_b \wedge \theta^b - \omega^a_c \wedge \omega^c_b \wedge \theta^b - \omega^a_b \wedge T^b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \wedge \theta^b \\
& = R^a_\beta \wedge \theta^b - \omega^a_b \wedge T^b .
\end{aligned}$$

Nun Bianchi-2:

$$\begin{aligned}
dR^a_b & = d(d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b) = d(\omega^a_c \wedge \omega^c_b) \\
& = d\omega^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_c \wedge d\omega^c_b \\
& = R^a_c \wedge \omega^c_b - \omega^a_d \wedge \omega^d_c \wedge \omega^c_b - (\omega^a_c \wedge R^c_b - \omega^a_c \wedge \omega^d_c \wedge \omega^d_b) \\
& = -\omega^a_c \wedge R^c_b + R^a_c \wedge \omega^c_b . \quad \square
\end{aligned}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß man diese beiden Bianchi-Identitäten im torsionsfreien Fall folgendermaßen formulieren kann:

$$1. \quad T = 0 \quad \Rightarrow \quad R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 , \quad (15.9.8)$$

$$2. \quad \omega^a_{bc} = \omega^a_{cb} \quad \Rightarrow \quad (\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Z R(X, Y) + \nabla_Y R(Z, X))V = 0 . \quad (15.9.9)$$

Hinreichend für die Voraussetzung eines symmetrischen Zusammenhang $\omega^a_{bc} = \omega^a_{cb}$ ist $T = 0$ und das Vorliegen einer *holonomen* Basis (!), d.h. einer Koordinatenbasis mit $c_{bc}^a = 0$ (siehe 15.6.2).

In Komponentenschreibweise in einer Koordinatenbasis mit der Antisymmetrisierungsklammer $W_{[bc]} := \frac{1}{2!}(W_{bc} - W_{cb})$, etc., ist dies:

$$1. \quad R^\kappa_{[\lambda\mu\nu]} = 0, \text{ d.h.} \quad (15.9.10)$$

$$\begin{aligned} R^\kappa_{[\lambda\mu\nu]} &:= \frac{1}{3!}(R^\kappa_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa_{\lambda\nu\mu} + R^\kappa_{\nu\lambda\mu} - R^\kappa_{\nu\mu\lambda} + R^\kappa_{\mu\nu\lambda} - R^\kappa_{\mu\lambda\nu}) \\ &= \frac{1}{3}(R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + R^\kappa_{\nu\lambda\mu} + R^\kappa_{\mu\nu\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad R^\kappa_{\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0, \text{ d.h.} \quad (15.9.11)$$

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda[\mu\nu;\xi]} &:= \frac{1}{3!}((\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu} - (\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\nu\mu} + (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\xi\mu} - (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\mu\xi} \\ &\quad + (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\nu\xi} - (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\xi\nu}) \\ &= \frac{1}{3}((\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\xi\mu} + (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\nu\xi}) = 0. \end{aligned}$$

Beweis: Jeder Tensor y_{ik} kann in die Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teils zerlegt werden, denn

$$y_{ik} := y_{(ik)} + y_{[ik]} := \frac{1}{2!}(y_{ik} + y_{ki}) + \frac{1}{2!}(y_{ik} - y_{ki}).$$

In einer 2-Form $y_{ik}\theta^i \wedge \theta^k$ fällt der symmetrische Teil des Koeffizienten $y_{(ik)}$ trivialerweise fort, denn

$$y_{ik}\theta^i \wedge \theta^k = (y_{(ik)} + y_{[ik]})(\theta^i\theta^k - \theta^k\theta^i) = y_{[ik]}(\theta^i\theta^k - \theta^k\theta^i) = 2y_{[ik]}\theta^i\theta^k.$$

Dies gilt ebenso für beliebige n -Formen: wenn eine n -Form $y_{i_1\dots i_n}\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_n} = 0$ ist, dann ist damit auch der antisymmetrische Anteil $y_{[i_1\dots i_n]} = 0$.

Nun zu Bianchi-1 in einer Koordinatenbasis. Aus 15.9.6 folgt:

$$T = 0 \quad \Rightarrow \quad R^\kappa_{\lambda} \wedge dx^\lambda = \frac{1}{2}R^\kappa_{\lambda\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R^\kappa_{[\lambda\mu\nu]} = 0.$$

Nun zu Bianchi-2 in einer Koordinatenbasis. Aus 15.9.7 folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial R^\kappa_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\xi} dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu + \omega^\kappa_{\xi\pi} dx^\xi \wedge R^\pi_{\lambda\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu - R^\kappa_{\pi\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \omega^\pi_{\xi\lambda} dx^\xi \\ &= \left(\frac{\partial R^\kappa_{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\xi} + \omega^\kappa_{\xi\pi} R^\pi_{\lambda\mu\nu} - R^\kappa_{\pi\mu\nu} \omega^\pi_{\xi\lambda} \right) dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \quad (15.9.12)$$

Da wir einen symmetrischen Zusammenhang vorausgesetzt haben gilt:

$$\begin{aligned}(\omega^\pi_{\xi\mu} R^\kappa_{\lambda\pi\nu}) dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= 0, \\(\omega^\pi_{\xi\nu} R^\kappa_{\lambda\mu\pi}) dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= 0.\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen subtrahieren wir von 15.9.12 und erhalten die kovariante Ableitung von R:

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu} dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu &= (\partial_\xi R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + \omega^\kappa_{\xi\pi} R^\pi_{\lambda\mu\nu} - \omega^\pi_{\xi\lambda} R^\kappa_{\pi\mu\nu} \\&\quad - \omega^\pi_{\xi\mu} R^\kappa_{\lambda\pi\nu} - \omega^\pi_{\xi\nu} R^\kappa_{\lambda\mu\pi}) dx^\xi \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.\end{aligned}$$

Damit muß der antisymmetrische Teil bzgl. ξ, μ, ν von $(\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ gleich 0 sein, also:

$$R^\kappa_{\lambda[\mu\nu;\xi]} = 0. \quad (15.9.13)$$

Ausführlich geschrieben ist das:

$$\frac{1}{3!} [(\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu} - (\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\nu\mu} + (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\xi\mu} - (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\mu\xi} + (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\nu\xi} - (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\xi\nu}] = 0,$$

und daraus folgt

$$(\nabla_\xi R)^\kappa_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_\nu R)^\kappa_{\lambda\xi\mu} + (\nabla_\mu R)^\kappa_{\lambda\nu\xi} = 0, \quad \text{bzw.}$$

$$(\nabla_X R(Y, Z) + \nabla_Z R(X, Y) + \nabla_Y R(Z, X))V = 0. \quad \square$$

Aus der Bianchi-2 Identität für R^a_{bcd} bei einem symmetrischen Zusammenhang, d.h. $\omega^a_{bc} = \omega^a_{cb}$ (hinreichend dafür ist ein torsionsfreier Zusammenhang in einer Koordinatenbasis, siehe 15.6.2) folgt die entsprechende Identität für den Ricci-Tensor:

$$\begin{aligned}R^a_{b[ad;f]} &= \frac{1}{3} ((\nabla_f R)^a_{bad} + (\nabla_d R)^a_{bfa} + (\nabla_a R)^a_{bdf}) \\&= \frac{1}{3} ((\nabla_f Ric)_{bd} - (\nabla_d R)^a_{baf} + (\nabla_a R)^a_{bdf}) \\&= \frac{1}{3} ((\nabla_f Ric)_{bd} - (\nabla_d Ric)_{bf} + (\nabla_a R)^a_{bdf}) = 0.\end{aligned} \quad (15.9.14)$$

15.10 Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metrik

Der Tangentialraum $T_p M$ und der Kotangentialraum $T_p^* M$ sind endlichdimensionale Vektorräume, die häufig zusätzlich mit einem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet werden:

$$X, Y \in T_p M, \quad X = X^\mu \partial_\mu, \quad Y = Y^\nu \partial_\nu \quad X \cdot Y := \sum_{\mu=1}^m X^\mu Y^\mu = \delta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu .$$

In der Riemannschen Geometrie verwendet man anstelle dieses Skalarproduktes die allgemeinere Struktur einer Riemannschen Metrik oder einer pseudo-Riemannschen Metrik:

Definition 15.10.1 Seien $p \in M$, $X, Y \in T_p M$, dann heißt $g_p : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemannsche Metrik am Punkt p , wenn g_p bilinear, symmetrisch und positiv definit ist, d.h.:

$$\begin{aligned} g_p(c_1 X + c_2 Y, Z) &= c_1 g_p(X, Z) + c_2 g_p(Y, Z) , \\ g_p(Z, c_1 X + c_2 Y) &= c_1 g_p(Z, X) + c_2 g_p(Z, Y) , \\ g_p(X, Y) &= g_p(Y, X) , \\ g_p(X, X) &\geq 0 , \quad g_p(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0 . \end{aligned}$$

Seien $p \in M$, $X, Y \in T_p M$, dann heißt $g_p : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine pseudo-Riemannsche Metrik, wenn g_p bilinear, symmetrisch und nicht entartet ist, d.h.:

$$\begin{aligned} g_p(c_1 X + c_2 Y, Z) &= c_1 g_p(X, Z) + c_2 g_p(Y, Z) , \\ g_p(Z, c_1 X + c_2 Y) &= c_1 g_p(Z, X) + c_2 g_p(Z, Y) , \\ g_p(X, Y) &= g_p(Y, X) , \\ g_p(X, Y) &= 0 \text{ für alle } Y \Rightarrow X = 0 . \end{aligned}$$

Damit ist g_p ein kovarianter Tensor zweiter Stufe am Punkt $p \in M$ und kann geschrieben werden als $g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu$.

Weiter seien die Koeffizienten $g_{\mu\nu}(p) \in C^\infty$ für alle $p \in M$, so daß $g := g_p \in \mathcal{T}_2^0(M)$ ein kovariantes Tensorfeld auf M ist.

Mit einer Metrik kann man Winkel und Längen in $p \in M$ definieren.

Definition 15.10.2 Seien $X, Y \in T_p M$ und $g_p : T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemannsche oder pseudo-Riemannsche Metrik, dann wird der Winkel φ zwischen X und Y in $p \in M$ definiert als:

$$\cos \varphi := \frac{g_p(X, Y)}{[g_p(X, X)g_p(Y, Y)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_{\mu\nu}(p)X^\mu Y^\nu}{[(g_{\mu\nu}(p)X^\mu X^\nu)(g_{\mu\nu}(p)Y^\mu Y^\nu)]^{\frac{1}{2}}} . \quad (15.10.1)$$

Vorsicht: dies bedeutet nun aber noch nicht, daß der Winkel φ bei einer Parallelverschiebung von X und Y in M konstant bleibt. Dies ist erst beim sog. metrisch-affinen Zusammenhang der Fall, den wir im nächsten Kapitel einführen werden.

Seien $c : (a, b) \rightarrow M$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, eine glatten Kurve in M , und $X = \left\{ \frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(M) \mid c(t) \in C^\infty(M) \right\}$ das Tangentialvektorfeld an die Kurve $c(t)$, dann definiert man die Länge eines Kurvenabschnitts als:

$$X = \frac{d}{dt}|_{c(t)} = X^\mu \partial_\mu|_{c(t)} = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt} \partial_\mu|_{c(t)} \Rightarrow$$

$$s := \int_{t_1}^{t_2} [g(X, X)]^{\frac{1}{2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} [g_{\mu\nu}(c(t)) X^\mu(t) X^\nu(t)]^{\frac{1}{2}} dt. \quad (15.10.2)$$

$g_{\mu\nu}(p)$ ist eine reelle, symmetrische Matrix und kann daher mittels einer orthogonalen Transformation diagonalisiert werden. Im Fall einer Riemannschen Metrik ist g_p positiv definit und damit sind auch alle Eigenwerte von $g_{\mu\nu}(p)$ positiv definit. Mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation und einer anschließenden Skalentransformation kann also $g_{\mu\nu}(p)$ in die *Euklidische Metrik* $\delta := \text{diag}(1, \dots, 1)$ überführt werden. Im Fall einer pseudo-Riemannschen Metrik kann $g_{\mu\nu}(p)$ auch negative Eigenwerte aufweisen. Wenn $g_{\mu\nu}(p)$ genau einen negativen Eigenwert hat spricht man von einer *Lorentz-Metrik*, die insbesondere in der Physik zur Beschreibung der lokalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit in Form der speziellen Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung ist. Mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation und einer anschließenden Skalentransformation kann $g_{\mu\nu}(p)$ in die *Minkowski-Metrik* $\eta := \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ überführt werden kann.

Wenn die Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g ausgestattet ist, so kann man an jedem Punkt $p \in M$ im Tangentialraum $T_p(M)$ auch mittels einer linearen Abbildung von einer Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer *orthonormalen Nichtkoordinatenbasis* $\{e_a\}$, auch *nicht-holonome* Basis genannt, übergehen.

Sei $e_a^\mu \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $\det(e_a^\mu) > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m -dimensionale Abbildung und e^μ_a die entsprechende inverse Abbildung, also $e^\mu_a e_a^\nu = \delta^\nu_\mu$ und $e^\mu_a e_b^\mu = \delta^a_b$. Die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ wird jetzt definiert als

$$e_a := e_a^\mu \partial_\mu. \quad (15.10.3)$$

Die Matrix e_a^μ besteht also gerade aus den Koordinaten der Basisvektoren e_a in der Koordinatenbasis der ∂_μ und heißt das *Vielbein* (der *Rahmen*, *frame*, *repère*), bzw. bei $m = 2$ *Zweibein*, bei $m = 3$ *Dreibein* oder bei $m = 4$ *Vierbein* (*Tetrade*).

Wenn die $e_a^\mu(p) \in C^\infty(M)$ sind, so heißt das Feld der $e_a^\mu \in \mathcal{T}_1^1(M)$ das *begleitende Vielbein* (*Rahmenfeld*, *moving frame*, *repère mobile*).

Weiter verlangt man von e_a^μ noch, daß die $\{e_a\}$ orthonormal in Bezug auf g seien, d.h.

$$g_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (15.10.4)$$

Damit läßt sich der metrische Tensor g schreiben als

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \theta^a \otimes \theta^b = \begin{cases} \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (15.10.5)$$

Für die entsprechenden Determinanten gilt also:

$$\sqrt{\pm \det(g_{\mu\nu})} = |\det((e_a^\mu)^{-1})| = |\det(e_a^\mu)|, \quad \begin{cases} + & \text{für Riemann-Metrik,} \\ - & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (15.10.6)$$

Wenn m die Dimension der Mannigfaltigkeit M (und damit auch die Dimension von Tangential- und Kotangentialraum) ist, dann hat ein Vielbein $e_a^\mu(p)$ am Punkt $p \in M$ gerade m^2 Variable, die Metrik $g_{\mu\nu}(p)$ als eine symmetrische Matrix aber nur $\frac{1}{2}m(m+1)$ Variable. Also gibt es $m^2 - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}m(m-1)$ Nichtkoordinatenbasen, die sich voneinander nur durch eine lineare Transformation $\Lambda^a_b(p)$, eine *lokale Eichtransformation*, unterscheiden und die Metrik invariant lassen:

$$\theta'^a(p) := \Lambda^a_b(p) \theta^b(p). \quad (15.10.7)$$

$$\begin{aligned} \delta_{bd} = \Lambda^a_b \delta_{ac} \Lambda^c_d &\Rightarrow \delta^b_d = \Lambda^{ab} \delta_{ac} \Lambda^c_d = \Lambda^{ab} \Lambda_{ad} = \Lambda_a^b \Lambda^a_d = (\Lambda^\dagger)^b_a \Lambda^a_d \\ &\Rightarrow \Lambda^a_b \in SO(m) \quad \text{für Riemann-Metrik, bzw.} \end{aligned} \quad (15.10.8)$$

$$\eta_{bd} = \Lambda^a_b \eta_{ac} \Lambda^c_d \Rightarrow \Lambda^a_b \in SO(1, m-1) \quad \text{für Lorentz-Metrik.} \quad (15.10.9)$$

Aus 15.10.7 folgt:

$$\theta'^a(e'_b) = \theta^a(e_b) = \delta^a_b \Rightarrow e'_a = (\Lambda^{-1})^b_a e_b \quad (15.10.10)$$

Damit transformieren sich die Torsions-2-Form und die Krümmungs-2 Form als Tensoren:

$$T'^a = \Lambda^a_b T^b \quad \text{und} \quad R'^a_b = \Lambda^a_c R^c_d (\Lambda^{-1})^d_b. \quad (15.10.11)$$

Die Zusammenhangs-1-Form transformiert sich wegen 15.9.4 folgendermaßen:

$$T'^a = \Lambda^a_b T^b \Rightarrow$$

$$d\theta^a + \omega'^a_b \wedge \theta^b = \Lambda^a_b (d\theta^b + \omega^b_c \wedge \theta^c)$$

$$d(\Lambda^a_b \theta^b) + \omega'^a_b \wedge (\Lambda^b_c \theta^c) = \Lambda^a_b (d\theta^b + \omega^b_c \wedge \theta^c)$$

$$(d\Lambda^a_c) \theta^c + \Lambda^a_b d\theta^b + \omega'^a_b \wedge \theta^c \Lambda^b_c = \Lambda^a_b d\theta^b + \Lambda^a_b \omega^b_c \wedge \theta^c$$

$$\omega'^a_b \Lambda^b_c = \Lambda^a_b \omega^b_c - (d\Lambda^a_c)$$

$$\omega'^a_d = \omega'^a_b \Lambda^b_c (\Lambda^{-1})^c_d = \Lambda^a_b \omega^b_c (\Lambda^{-1})^c_d - (d\Lambda^a_c) (\Lambda^{-1})^c_d \quad (15.10.12)$$

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} - d\Lambda \cdot \Lambda^{-1} . \quad (15.10.13)$$

Damit transformiert sich die Zusammenhangs-1-Form nichtlinear und ist also kein Tensor! Jedoch transformiert sich die Differenz zweier Zusammenhänge, also z.B. die Variation $\delta\omega$, wie ein Tensor.

15.11 Der metrisch-affine Zusammenhang

Der *metrisch-affine Zusammenhang* wird häufig auch als *Metrik-kompatibler Zusammenhang*, oder kurz als *metrischer Zusammenhang* bezeichnet. Gemeint ist damit, daß man von der Metrik verlangt, daß sie bei Paralleltransport *kovariant konstant* bleibt, daß also somit Winkel beim Paralleltransport erhalten bleiben:

$$\nabla_\lambda g \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (15.11.1)$$

Daraus folgt mit $X, Y, Z \in T_p M$ und der Leibniz-Regel 15.5.14:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g(X, Y) &= \nabla_\lambda g(X, Y) = (\nabla_\lambda g)(X, Y) + g(\nabla_\lambda X, Y) + g(X, \nabla_\lambda Y) \\ &= g(\nabla_\lambda X, Y) + g(X, \nabla_\lambda Y) , \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (15.11.2)$$

$$Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) . \quad (15.11.3)$$

Wenn X und Y entlang von $Z = Z^\lambda \partial_\lambda$ parallel verschoben werden, so gilt per Definition der Parallelverschiebung $\nabla_Z X = \nabla_Z Y = 0$ und damit bleibt $g(X, Y)$ und also der Winkel zwischen X und Y erhalten.

Diese Eigenschaft kennen wir aus der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und auch aus Einsteins *Allgemeiner Relativitätstheorie*. Gewisse moderne erweiterte Gravitationstheorien, die von einer Körnigkeit und möglichen Fehlstellen und Versetzungen der

Raumzeit (analog zu einem Festkörper) ausgehen, geben die Forderung eines Metrikkompatiblen Zusammenhangs auf.

Die Metrik in einer *nichtholonomen* Basis (!) ist gemäß 15.10.4 $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ oder $\hat{g}_{ab} = \eta_{ab}$ für eine Riemannsche oder Lorentzsche Metrik. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \partial_a g(e_b, e_c) &= \partial_a \hat{g}_{bc} = \begin{cases} \partial_a \delta_{bc} = 0 & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \partial_a \eta_{bc} = 0 & \text{für Lorentz-Metrik,} \end{cases} \\ \partial_a g(e_b, e_c) &= \nabla_a g(e_b, e_c) = g(\nabla_a e_b, e_c) + g(e_b, \nabla_a e_c) \\ &= g(\omega_{ab}^d e_d, e_c) + g(e_b, \omega_{ac}^d e_d) \\ &= \hat{g}_{dc} \omega_{ab}^d + \hat{g}_{bd} \omega_{ac}^d = 0 \quad \Rightarrow \\ (\hat{g}_{cd} \omega_{ab}^d + \hat{g}_{bd} \omega_{ac}^d) \theta^a &= \hat{g}_{cd} \omega_b^d + \hat{g}_{bd} \omega_c^d = \omega_{cb} + \omega_{bc} = 0 \quad \Rightarrow \\ \omega_{bc} &= -\omega_{cb}, \text{ bzw. } \omega_{bac} \theta^a = -\omega_{cab} \theta^a. \end{aligned} \quad (15.11.4)$$

Bei der Transformation dieser Gleichung in eine holonome Basis (Koordinatenbasis) muß man jedoch das Transformationsverhalten 15.10.12, bzw. 15.10.13, berücksichtigen, da ω_c^b kein Tensor ist.

Aus der Antisymmetrie von ω_{bc} folgt die Antisymmetrie der kovarianten Krümmungs-2-Form:

$$R_{ab} := g_{ae} R_b^e = -R_{ba}, \quad (15.11.5)$$

bzw. eine zusätzliche Antisymmetrie des kovarianten Krümmungstensors:

$$R_{abcd} := g_{ae} R_{bcd}^e = -R_{bacd}. \quad (15.11.6)$$

Beweis: Aus 15.9.5 folgt:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \hat{g}_{ae} R_b^e = \hat{g}_{ae} d\omega_b^e + \hat{g}_{ae} \omega_c^e \wedge \omega^c_b \\ &= d(\hat{g}_{ae} \omega_b^e) + \hat{g}_{ae} \omega_c^e \wedge \hat{g}^{cf} \hat{g}_{fe} \omega_b^e \\ &= d\omega_{ab} + \omega_{ac} \wedge \hat{g}^{cf} \omega_{fb} \\ &= -d\omega_{ba} - \hat{g}^{cf} \omega_{fb} \wedge \omega_{ac} = -d\omega_{ba} - \hat{g}^{cf} \omega_{bf} \wedge \omega_{ca} \\ &= -d\omega_{ba} - \omega_{bf} \wedge \hat{g}^{fc} \omega_{ca} = -(d\omega_{ba} + \omega_{bf} \wedge \omega_a^f) \\ &= -\hat{g}_{be} (d\omega_a^e + \omega_f^e \wedge \omega_a^f) = -\hat{g}_{be} R_a^e = -R_{ba}. \end{aligned}$$

Aus 15.9.3 folgt:

$$R_{ab} = R_{abcd} \theta^c \wedge \theta^d \quad \Rightarrow \quad R_{abcd} = -R_{bacd}. \quad \square$$

Weil R_{ab} wegen 15.10.11 ein Tensor ist gilt diese Symmetrie der Krümmungs-2-Form, bzw. des Krümmungstensors, in jeder Basis (also auch in einer Koordinatenbasis).

Sehr gebräuchlich ist die folgende Darstellung der Zusammenhangskomponenten durch die Metrikkomponenten in einer Koordinatenbasis:

Satz 15.11.2

$$\omega^\kappa_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^\kappa_{\mu\nu} \quad (15.11.7)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} := \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (15.11.8)$$

und dem Kontorsionstensor

$$K^\kappa_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (T^\kappa_{\mu\nu} + T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T_\nu{}^\kappa{}_\mu), \quad (15.11.9)$$

wobei $T^\kappa_{\mu\nu}$ der Torsionstensor in einer Koordinatenbasis ist.

Beweis:

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = (\nabla_{x^\lambda} g)_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \omega^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0. \quad (15.11.10)$$

Eine zyklische Vertauschung der Indizes λ, μ, ν ergibt

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \omega^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} = 0, \quad (15.11.11)$$

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \omega^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} = 0, \quad (15.11.12)$$

und mit einer Addition von 15.11.11 und 15.11.12 und Subtraktion von 15.11.10 unter Verwendung von $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ und 15.6.2 und

$$\omega^\kappa_{(\mu\nu)} := \frac{1}{2} (\omega^\kappa_{\mu\nu} + \omega^\kappa_{\nu\mu}) \quad \text{und} \quad \omega^\kappa_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2} (\omega^\kappa_{\mu\nu} - \omega^\kappa_{\nu\mu}) = \frac{1}{2} T^\kappa_{\mu\nu} \quad (15.11.13)$$

folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \omega^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} \\ &\quad + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \omega^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa_{\nu\mu} g_{\lambda\kappa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \omega^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \omega^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} \\
= & (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
& - \omega^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \omega^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \omega^\kappa_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \omega^\kappa_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} + \omega^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \omega^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} \\
= & (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
& - (\omega^\kappa_{\mu\nu} + \omega^\kappa_{\nu\mu}) g_{\kappa\lambda} + (\omega^\kappa_{\lambda\mu} - \omega^\kappa_{\mu\lambda}) g_{\kappa\nu} + (\omega^\kappa_{\lambda\nu} - \omega^\kappa_{\nu\lambda}) g_{\kappa\mu} \\
= & (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - 2\omega^\kappa_{(\mu\nu)} g_{\kappa\lambda} + T^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + T^\kappa_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} \quad \Rightarrow \\
\omega_{\lambda(\mu\nu)} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad \Rightarrow \\
\omega^\kappa_{(\mu\nu)} = & \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad \Rightarrow \\
= & \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T_\mu{}^\kappa{}_\nu) \quad \Rightarrow \\
\omega^\kappa_{\mu\nu} = \omega^\kappa_{(\mu\nu)} + \omega^\kappa_{[\mu\nu]} = & \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}(T_\mu{}^\kappa{}_\nu + T_\nu{}^\kappa{}_\mu + T^\kappa_{\mu\nu}) \\
= & \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^\kappa_{\mu\nu}. \quad \square
\end{aligned}$$

15.12 Der Levi-Civita Zusammenhang

Ein torsionsfreier metrisch-affiner Zusammenhang in einer Koordinatenbasis heißt Levi-Civita Zusammenhang. Die Levi-Civita-Zusammenhangskoeffizienten werden üblicherweise als $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ bezeichnet. Dieser Zusammenhang liegt der *Euklidischen Geometrie* ebenso wie *Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie* zugrunde. Mit 15.11.7, 15.11.8, 15.11.9 folgt:

$$T^\kappa_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad K^\kappa_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\kappa_{\mu\nu} := \omega^\kappa_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (15.12.1)$$

Die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ sind damit gerade die Christoffelsymbole und hängen somit also nur von der Metrik ab.

Es können in einer Mannigfaltigkeit viele verschiedene affine Zusammenhänge konstruiert werden. Der Levi-Civita Zusammenhang als metrisch-affiner Zusammenhang in

einer Koordinatenbasis ist durch die beiden Forderungen der Torsionsfreiheit und der Symmetrie der Zusammenhangskomponenten $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu}$ jedoch eindeutig bestimmt, denn mit 15.11.13 folgt:

$$\Gamma^\kappa_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}T^\kappa_{\mu\nu} = 0, \quad (15.12.2)$$

$$\Gamma^\kappa_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{1}{2}(T^\kappa_{\nu\mu} + T^\kappa_{\mu\nu}) = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\}, \quad (15.12.3)$$

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (15.12.4)$$

Für den Krümmungstensor bei einem Levi-Civita Zusammenhang gilt mit den Vielbeinen $e^a_\mu e_a^\nu = \delta^\nu_\mu$ und $e^a_\mu e_b^\mu = \delta^a_b$ und $c_{\mu\nu}^\pi = 0$ und 15.7.2:

$$\begin{aligned} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} &= e_a^\kappa e^b_\lambda e^c_\mu e^d_\nu R^a_{bcd} \\ &= e_a^\kappa e^b_\lambda e^c_\mu e^d_\nu [e_c \omega^a_{db} - e_d \omega^a_{cb} + \omega^e_{db} \omega^a_{ce} - \omega^e_{cb} \omega^a_{de} - c_{cd}^e \omega^a_{eb}] \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + e_a^\kappa e^b_\lambda e^c_\mu e^d_\nu [\omega^e_{db} \delta^f_e \omega^a_{cf} - \omega^e_{cb} \delta^f_e \omega^a_{df} - c_{cd}^e \delta^f_e \omega^a_{fb}] \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} \\ &\quad + e_a^\kappa e^b_\lambda e^c_\mu e^d_\nu [\omega^e_{db} e^f_\pi e_e^\pi \omega^a_{cf} - \omega^e_{cb} e^f_\pi e_e^\pi \omega^a_{df} - c_{cd}^e e^f_\pi e_e^\pi \omega^a_{fb}] \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\pi_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\pi} - \Gamma^\pi_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\pi} - c_{\mu\nu}^\pi \Gamma^\kappa_{\pi\lambda} \\ &= \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\pi_{\nu\lambda} \Gamma^\kappa_{\mu\pi} - \Gamma^\pi_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\nu\pi}. \end{aligned} \quad (15.12.5)$$

Satz 15.12.1 Für die Koeffizienten des Krümmungstensors $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\kappa'} R^{\kappa'}_{\lambda\mu\nu}$ in einem Levi-Civita Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu \partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\ &\quad + g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (15.12.6)$$

Aus dieser Darstellung folgen die Symmetrien:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}, \quad (15.12.7)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad (15.12.8)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}. \quad (15.12.9)$$

Beweis: Der Beweis stützt sich auf die Kovarianz der Metrik (15.11.10) und die Darstellung der Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ als Funktion der Metrik 15.12.4:

$$\begin{aligned} (\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = 0 &\Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0 \quad \text{bzw.} \\ \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= g_{\kappa\kappa'} R^\kappa_{\lambda\mu\nu} \\ &= g_{\kappa\kappa'} [\partial_\mu \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} + \Gamma^\xi_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\xi} - \Gamma^\xi_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\xi}] . \end{aligned}$$

Für den ersten Term ergibt sich mit der Kovarianz der Metrik:

$$\begin{aligned} g_{\kappa\kappa'} \partial_\mu \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} &= \partial_\mu (g_{\kappa\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda}) - (\partial_\mu g_{\kappa\kappa'}) \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu [g_{\kappa\kappa'} g^{\kappa'\xi} (\partial_\nu g_{\lambda\xi} + \partial_\lambda g_{\nu\xi} - \partial_\xi g_{\nu\lambda})] \\ &\quad - (\Gamma^\xi_{\mu\kappa} g_{\xi\kappa'} + \Gamma^\xi_{\mu\kappa'} g_{\kappa\xi}) \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} , \end{aligned}$$

und analog ergibt sich für den zweiten Term mit $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$g_{\kappa\kappa'} \partial_\nu \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\nu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} .$$

Damit folgt für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\nu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\lambda}) - g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\lambda g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) + g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} + g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\nu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} \\ &\quad + g_{\kappa\kappa'} (\Gamma^\xi_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\xi} - \Gamma^\xi_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\xi}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\mu \partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\nu \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\ &\quad + g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\nu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} - g_{\xi\kappa'} \Gamma^\xi_{\mu\kappa} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} , \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} -g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} + g_{\kappa\kappa'} \Gamma^\xi_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\xi} &= -g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\mu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\lambda} + g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\nu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\kappa'} = 0 , \\ +g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\nu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\kappa'} \Gamma^\xi_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\xi} &= +g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\nu\kappa'} \Gamma^{\kappa'}_{\mu\lambda} - g_{\kappa\xi} \Gamma^\xi_{\mu\lambda} \Gamma^{\kappa'}_{\nu\kappa'} = 0 . \end{aligned}$$

Die Antisymmetrie der Koeffizienten des Krümmungstensors in den beiden letzten Indizes, also $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ folgte ja bereits aus der Definition des Krümmungstensors (siehe 15.7.3).

Die beiden zusätzlichen Symmetrien 15.12.8 und 15.12.9 gelten nur in einem Levi-Civita Zusammenhang, denn sie stützen sich auf die obige Darstellung von $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ und auf $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa}$ und $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\kappa\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa} - \partial_{\nu}\partial_{\kappa}g_{\mu\lambda} + \partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\nu\lambda}^{\xi}\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa'} - g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\mu\lambda}^{\xi}\Gamma_{\nu\kappa}^{\kappa'} \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa} - \partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa} + \partial_{\nu}\partial_{\kappa}g_{\mu\lambda}) \\
&\quad - (g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\nu\kappa}^{\kappa'}\Gamma_{\mu\lambda}^{\xi} - g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\mu\kappa}^{\kappa'}\Gamma_{\nu\lambda}^{\xi}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa} - \partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa} + \partial_{\nu}\partial_{\kappa}g_{\mu\lambda}) \\
&\quad - (g_{\kappa'\xi}\Gamma_{\nu\kappa}^{\xi}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa'} - g_{\kappa'\xi}\Gamma_{\mu\kappa}^{\xi}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa'}) \\
&= -R_{\kappa\lambda\mu\nu} .
\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}(\partial_{\kappa}\partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa}\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\partial_{\nu}g_{\kappa\mu} + \partial_{\lambda}\partial_{\mu}g_{\kappa\nu}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\lambda\mu}^{\xi}\Gamma_{\kappa\nu}^{\kappa'} - g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\kappa\mu}^{\xi}\Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa'} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\lambda}\partial_{\mu}g_{\kappa\nu} - \partial_{\kappa}\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\partial_{\nu}g_{\kappa\mu} + \partial_{\kappa}\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\kappa\nu}^{\kappa'}\Gamma_{\lambda\mu}^{\xi} - g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\kappa\mu}^{\xi}\Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa'} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa} - \partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa} + \partial_{\nu}\partial_{\kappa}g_{\mu\lambda}) \\
&\quad + g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\nu\kappa}^{\xi}\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa'} - g_{\xi\kappa'}\Gamma_{\mu\kappa}^{\xi}\Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa'} \\
&= R_{\kappa\lambda\mu\nu} .
\end{aligned}$$

□

Korollar 15.12.3 *Wenn es in jedem Punkt p der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M stets m nichtverschwindende, linear unabhängige Tangentialvektoren aus T_pM gibt, dann ist der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$.*

Beweis: Wenn die Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g ausgestattet ist, so kann man an jedem Punkt $p \in M$ im Tangentialraum $T_p(M)$ auch mittels einer linearen Abbildung von einer *nichtverschwindenden* Koordinatenbasis $\{\partial_\mu\}$ zu einer orthonormalen Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ übergehen (siehe 15.10.3, 15.10.4):

sei $e_a^\mu \in GL(m, \mathbb{R})$ mit $\det(e_a^\mu) > 0$ eine lineare, reelle, invertierbare und orientierungserhaltende m -dimensionale Abbildung, dann wird die Nichtkoordinatenbasis $\{e_a\}$ definiert als

$$e_a := e_a^\mu \partial_\mu .$$

Weiter verlangt man von e_a^μ noch, daß die $\{e_a\}$ orthonormal in Bezug auf g sein sollen, d.h.

$$g_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases}$$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \theta^a \otimes \theta^b = \begin{cases} \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b & \text{für Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b & \text{für Lorentz-Metrik.} \end{cases}$$

Wegen 15.12.4 sind dann die Christoffelsymbole $\Gamma^a_{bc} = 0$ und wegen 15.12.6 ist auch der Riemannsche Krümmungstensor $R_{abcd} = 0$. \square

Ein Standardbeispiel für eine randlose, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit verschwindender Krümmung ist der Torus $T^2 := S^1 \times S^1$. Man kann T^2 folgendermaßen parametrisieren

$$T(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} (1 - r \cdot \cos(\varphi)) \cos(\vartheta) \\ (1 - r \cdot \cos(\varphi)) \sin(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi. \quad (15.12.10)$$

Die beiden Vektorfelder

$$\frac{\partial T(\varphi, \vartheta)}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ r \cdot \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial T(\varphi, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} (1 - r \cdot \cos(\varphi))(-\sin(\vartheta)) \\ (1 - r \cdot \cos(\varphi)) \cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

verschwinden auf T^2 nicht und damit kann man zu einer orthonormalen Nichtkoordinatenbasis übergehen und erhält eine flache Metrik mit verschwindender Krümmung. Dies gilt analog auch für m -dimensionale Tori T^m .

Mit Hilfe dieser Symmetrien läßt sich nun leicht die Zahl der unabhängigen Komponenten $F(n)$ des Krümmungstensors angeben:

- der allgemeinste Krümmungstensor mit $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$: $F(n) = n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Für $n = 4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 96 unabhängige Komponenten.
- ein torsionsfreier und ansonst allgemeiner Krümmungstensor erfüllt zusätzlich Bianchi-1 (15.9.10). Wenn 2 Indizes in $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ gleich sind, so ist Bianchi-1 aufgrund der Symmetrien automatisch erfüllt, liefert also keine zusätzlichen Nebenbedingungen, denn $R_{\kappa\kappa\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\kappa} = 0$ und $R_{\kappa\lambda\kappa\nu} + R_{\kappa\lambda\nu\kappa} = 0$. Dies ist bei $n < 4$ immer der Fall. Für $n \geq 4$ liefert Bianchi-1 zusätzliche Nebenbedingungen, und zwar gerade die Anzahl der Auswahl 4 verschiedener Indizes aus der Menge der n möglichen Indizes, also

$$\binom{n}{4} = \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n).$$

$$F(n) = n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \binom{n}{4}.$$

Für $n = 4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 95 unabhängige Komponenten.

- ein Krümmungstensor bei einem Levi-Civita-Zusammenhang führt für $n < 4$ zu

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} i = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n)$$

bzw. für $n \geq 4$ zu

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} i - \binom{n}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \tag{15.12.11}$$

Für $n = 4$ ergeben sich für $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ also gerade 20 unabhängige Komponenten.

Der Ricci-Tensor $Ric_{\lambda\nu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu}$ ist in einem Levi-Civita Zusammenhang wegen $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ ebenfalls symmetrisch: $Ric_{\lambda\nu} = Ric_{\nu\lambda}$. Für $n = 4$ ergeben sich für $Ric_{\lambda\nu}$ also gerade 10 unabhängige Komponenten.

Auch läßt sich der Ricci-Tensor $Ric_{\lambda\nu}$ nochmals zum sog. Ricci-Skalar \mathcal{R} kontrahieren:

$$\mathcal{R} := Ric^{\nu}{}_{\nu} = g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu}. \tag{15.12.12}$$

Wenn man die Ricci-Identität 15.9.14 kontrahiert, so folgt mit der Kovarianz der Metrik $\nabla_{\xi}g^{\nu\lambda} = g^{\nu\lambda}\nabla_{\xi}$:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\lambda}[(\nabla_{\xi} Ric)_{\lambda\nu} - (\nabla_{\nu} Ric)_{\lambda\xi} + (\nabla_{\kappa} R)^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi}] \\ &= g^{\nu\lambda}[(\nabla_{\xi} Ric)_{\lambda\nu} - (\nabla_{\nu} Ric)_{\lambda\xi} - (\nabla_{\kappa} R)_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\nu\xi}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_\xi(g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu}) - (\nabla_\nu Ric)^\nu_\xi - (\nabla_\kappa R)^{\nu\kappa}_{\nu\xi} \\
&= \nabla_\xi(\mathcal{R}) - (\nabla_\nu Ric)^\nu_\xi - (\nabla_\kappa Ric)^\kappa_\xi \\
&= \nabla_\nu(\mathcal{R}\delta^\nu_\xi) - (\nabla_\nu Ric)^\nu_\xi - (\nabla_\nu Ric)^\nu_\xi \\
&= \nabla_\nu[\mathcal{R}\delta - 2Ric]^\nu_\xi .
\end{aligned} \tag{15.12.13}$$

Weil die Divergenz dieser Kombination aus Ricci-Tensor und Ricci-Skalar verschwindet hat Einstein diesen, später nach ihm als *Einstein-Tensor* benannten Tensor in einer vierdimensionalen Raumzeit an den divergenzfreien Energieimpuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ gekoppelt und so zur Grundlage seiner *Allgemeinen Gravitationstheorie* gemacht:

$$G^{\mu\nu} := Ric^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} \stackrel{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(g) . \tag{15.12.14}$$

Die Konstante vor dem Energieimpuls-Tensor mit der Gravitationskonstanten G und der Lichtgeschwindigkeit c ist gerade so gewählt, daß sich im nichtrelativistischen Grenzfall wieder die klassische Newtonsche Physik ergibt. Eine etwaige additive *kosmologische Konstante* $g^{\mu\nu}\Lambda$ auf der linken Seite verschiebt man heute zumeist auf die rechte Seite der Gleichung und interpretiert sie als Vakuum-Anteil des Energieimpuls-Tensors:

$$T^{\mu\nu}(g) = T^{\mu\nu}_{klassisch}(g) + T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) , \quad T^{\mu\nu}_{Vakuum}(g) := -\frac{c^4}{8\pi G} g^{\mu\nu}\Lambda . \tag{15.12.15}$$

Ricci-Tensor und Ricci-Skalar hängen über die Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ nur von der Metrik $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen ab (15.12.4). Da der Ricci-Tensor und der Energieimpuls-Tensor symmetrisch sind und beide Funktionen des metrischen Tensors g und dessen Ableitungen sind, erhält man also im Vierdimensionalen 10 gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen für das Metrikfeld $g^{\mu\nu}$. Wenn $Ric^{\mu\nu} = 0$ ist, d.h. eine *Ricci-flache* Raumzeit vorliegt, so sind die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen einfach die Vakuumlösungen $T^{\mu\nu}(g) = 0$.

15.13 Riemannsche Normalkoordinaten und Exponentialabbildung

Bereits Gauß hatte in \mathbb{E}^3 ein Koordinatensystem eingeführt, in welchem $e_z \in T_p\mathbb{E}^3$ ein Einheitsvektor entlang einer Geodäten ist und gezeigt, daß zwei zu e_z orthogonale Vektoren e_x und e_y bei einer Parallelverschiebung entlang der Geodäten auch orthogonal zu e_z bleiben (Gauß Lemma).

Riemann hat diesen Gedanken dann für einen m -dimensionalen Raum verallgemeinert. Mit den heutigen Bezeichnungsweise können wir Riemanns Gedanken folgendemmaßen darstellen. Für einen metrisch-affinen Zusammenhang haben wir gefunden, daß der

Winkel zwischen zwei Vektoren X und Y erhalten bleibt, wenn X und Y entlang eines dritten Vektors $Z = Z^\lambda \partial_\lambda$ parallel verschoben werden, denn per Definition der Parallelverschiebung $\nabla_Z X = \nabla_Z Y = 0$ folgt mit 15.11.3

$$Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = 0 ,$$

und damit bleibt $g(X, Y)$ und also auch der Winkel zwischen X und Y erhalten.

Die Geodätengleichung in lokalen Koordinaten $x(t)$ lautet nach 12.0.6:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 .$$

Diese nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiten Grades hat nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte $p = x(0) \in M$ und $k = \frac{d}{dt}x(0) \in T_p M$ in einer geeigneten Umgebung von p eine eindeutige Lösung $x_k(t)$ (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). Bei einer affinen Transformation $t' = at + b$ geht die Geodäte in sich selbst über und speziell gilt $x_{ak}(t) = x_k(at)$, bzw. $x_k(t) = x_{kt}(1)$.

Die Abbildung der Geraden durch den Ursprung kt in die Geodäte $x_k(t) = x_{e_k}(kt)$ nennt man auch die *geodäische Exponential-Abbildung*:

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad \exp_p(kt) := x_k(t) = x_{kt}(1) .$$

Mehr zu den Gründen für die Begriffsbildung Exponential-Abbildung folgt unten. Zunächst sollen jedoch die Riemannschen Normalkoordinaten erläutert werden. An der Stelle $p \in M$, bzw. $t = 0$, gilt für das Differential der Exponential-Abbildung

$$\exp_* \left(\frac{d}{dt} kt \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} x_k(t) \Big|_p = k , \quad \text{d.h.} \quad \exp_* : k \rightarrow k .$$

Also ist \exp_p in einer Umgebung von p ein Diffeomorphismus und kann invertiert werden:

$$y_k(t) := \exp_p^{-1}(x_k(t)) = kt .$$

Diese $y_k(t)$ stellen jetzt die Riemannschen Normalkoordinaten dar. Wählen wir für k einen Satz orthonormaler Vektoren $e_i \in T_p M$, dann sind auch die $\exp_*^{-1}(e_i) = e_i$ orthonormal und wir erhalten für die Metrik am Punkt $t = 0$ im y -Koordinatensystem

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} .$$

Die Geodätengleichung im y -Koordinatensystem bei $t = 0$ liefert nun

$$\frac{d^2 y^\lambda}{dt^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(0) = 0 ,$$

und in einem torsionsfreien metrisch-affinen Zusammenhang, d.h. einem Levi-Civita Zusammenhang, können wir daraus mit 15.12.4 weiter folgern:

$$\frac{d}{dy^\mu} g_{ij}(0) = 0 .$$

Warum spricht man bei der oben eingeführten Abbildung $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ von einer Exponentialabbildung? Eine Untergruppe der affinen Gruppe auf der Geodäte $x_k(t)$ sind Translationen, und diese stellen eine abelsche 1-Parametergruppe dar, denn sei L_t eine Links-Translation auf der Geodäte $x_k(t)$, dann gilt:

$$L_t : M \rightarrow M \quad \text{mit} \quad p = x_k(0), \quad q = x_k(s) \in M, \quad L_t q = L_t x_k(s) := x_k(s+t) \quad \Rightarrow$$

$$L_{s+t} p = x_k(s+t) = L_t x_k(s) = L_t L_s x_k(0) = L_t L_s p,$$

$$L_0 p = L_0 x_k(0) = x_k(0) = p \quad \Rightarrow \quad L_0 = \mathbb{1}.$$

$$L_{-t} L_t p = L_{-t} L_t x_k(0) = x_k(0) \quad \Rightarrow \quad L_{-t} = (L_t)^{-1}.$$

Nun ist der Tangentialvektor an die Geodäte an der Stelle $p = x_k(0)$ ja gerade

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 = k = k^\mu \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_0$$

und damit ergibt sich $x_k(t)$ zu

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_k(0) + t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 x_k(t) \right) + \frac{t^2}{2!} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0^2 x_k(t) \right) + \dots \\ &= \left[1 + tk + \frac{t^2}{2!} k^2 + \dots \right] x_k(t)|_0 \\ &= \exp(kt) x_k(t)|_0 = \exp(kt) p =: \exp_p(kt). \end{aligned}$$

Damit ist $\exp_p(kt) : M \rightarrow M$ ein Differentialoperator auf der Geodäte.

Als Standardbeispiel für die Exponentialabbildung dient üblicherweise die Lie-Gruppe der reellen n -dimensionalen Matrizen $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Sie wird erzeugt durch die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := T_e G$. Sei jetzt $x_A(t)$ mit $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G , d.h. $x_A : \mathbb{R} \rightarrow G$ und $A = \left. \frac{d}{dt} x_A(t) \right|_0$, dann gilt wie oben

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_A(0) + t \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 x_A(t) \right) + \frac{t^2}{2!} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0^2 x_A(t) \right) + \dots \\ &= \left[\mathbb{1} + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots \right] = \exp(At). \end{aligned}$$

15.14 Geometrie in einer 2-dim. Riemannschen Mannigfaltigkeit

Die Zusammenhang-1-Form in einer allgemeinen, d.h. nichtholonomen, Orthonormalbasis ist nach 15.9.1 $\hat{\omega}^a_b = \hat{\omega}^a_{cb}\theta^c$. Wir bezeichnen in diesem Abschnitt die nichtholonomen Variablen mit einem Zirkumflex $\hat{\omega}$ zur Unterscheidung von den entsprechenden holonomen Variablen ohne Zirkumflex. In einem metrisch-affinen Zusammenhang gilt $\hat{\omega}_{ab} = -\hat{\omega}_{ba}$ (15.11.4). In 2 Dimensionen folgt also:

$$\hat{\omega}_{11} = \hat{\omega}_{22} = 0, \quad \hat{\omega}_{12} = -\hat{\omega}_{21}. \quad (15.14.1)$$

Die Metrik in einer nichtholonomen Orthonormalbasis einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist gemäß 15.10.4 einfach $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ und daraus folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^1_1 &= \delta^{1e}\hat{\omega}_{e1} = 0, \quad \hat{\omega}^2_2 = 0, \\ \hat{\omega}^1_2 &= \delta^{1e}\hat{\omega}_{e2} = \hat{\omega}_{12} = -\hat{\omega}_{21} = -\hat{\omega}^2_1. \end{aligned}$$

Aus der Cartanschen Strukturgleichung für die Krümmungs-2-Form (15.9.5) folgt sofort, daß diese im 2-dimensionalen eine exakte Form ist:

$$\hat{R}^a_b = d\hat{\omega}^a_b + \hat{\omega}^a_c \wedge \hat{\omega}^c_b = d\hat{\omega}^a_b, \quad (15.14.2)$$

denn

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^1_c \wedge \hat{\omega}^c_1 &= \hat{\omega}^1_1 \wedge \hat{\omega}^1_1 + \hat{\omega}^1_2 \wedge \hat{\omega}^2_1 = -\hat{\omega}^1_2 \wedge \hat{\omega}^1_2 = 0, \\ \hat{\omega}^2_c \wedge \hat{\omega}^c_2 &= -\hat{\omega}^2_1 \wedge \hat{\omega}^2_1 = 0, \quad \hat{\omega}^1_c \wedge \hat{\omega}^c_2 = 0. \end{aligned}$$

Also liegt es nahe nach dem Stokeschen Satz (siehe: 21.1.1) zu folgern, daß das Integral von \hat{R}^a_b über eine orientierbare geschlossene (d.h. kompakte und randlose) Mannigfaltigkeit M gleich Null sein sollte:

$$\int_M \hat{R}^a_b = \int_M d\hat{\omega}^a_b = \int_{\partial M=\emptyset} \hat{\omega}^a_b = 0.$$

Aber **Vorsicht!** Wenn etwa die Mannigfaltigkeit eine 2-dim. Kugeloberfläche ist, d.h. $M = S^2$, dann steht diese Aussage im Widerspruch zum Satz von Gauß-Bonnet, den wir im nächsten Kapitel beweisen werden. Wo liegt der Gedankenfehler? Es gibt bei der 2-dim. Kugeloberfläche keine Orthonormalbasis, welche die ganze Kugeloberfläche abdeckt, zumindest zwei verschiedene Orthonormalbasen sind erforderlich und das führt dann zu

$$\int_{S^2} \hat{R}^a_b \neq 0.$$

Dies ist ein schönes Beispiel für die Notwendigkeit sorgfältiger topologischer Betrachtungen beim Übergang von lokalen zu globalen Aussagen.

Da die Zusammenhang-1-Form $\hat{\omega}^a_b$ nur durch die eine von Null verschiedene Komponente $\hat{\omega}^1_2 = -\hat{\omega}^2_1$ bestimmt ist, wird also auch die Krümmungs-2-Form wegen $\hat{R}^a_b = d\hat{\omega}^a_b$ nur durch $\hat{R}^1_2 = -\hat{R}^2_1$ eindeutig charakterisiert.

Der Übergang von \hat{R}^1_2 in einer nichtholonomen Orthonormalbasis zu R^1_2 in einer holonomen Orthonormalbasis geschieht mit dem Zweibein $e_a^\kappa \in SO(2)$:

$$e_a^\kappa = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (15.14.3)$$

Ab hier setzen wir zusätzlich voraus, daß der Zusammenhang torsionsfrei ist, daß also die Symmetrieeigenschaften 15.12.8, 15.12.9 für $R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ erfüllt sind.

$$\begin{aligned} \hat{R}^1_2 &= \delta^{1c} \hat{R}_{c2} = \hat{R}_{12} \\ &= e_1^\kappa e_2^\lambda R_{\kappa\lambda} = e_1^\kappa e_2^\lambda \frac{1}{2} R_{\kappa\lambda\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu = e_1^\kappa e_2^\lambda R_{\kappa\lambda 12} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= (\cos \varphi) e_2^\lambda R_{1\lambda 12} \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin \varphi) e_2^\lambda R_{2\lambda 12} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= (\cos \varphi)(-\sin \varphi) R_{1112} \theta^1 \wedge \theta^2 + (\cos \varphi)^2 R_{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &\quad - (\sin \varphi)^2 R_{2112} \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin \varphi)(\cos \varphi) R_{2212} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= (\cos \varphi)^2 R_{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 + (\sin \varphi)^2 R_{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= R_{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 = K_G \cdot g \theta^1 \wedge \theta^2, \end{aligned} \quad (15.14.4)$$

mit $K_G := R^1_2 =$ Gaußscher Krümmung und $g := \det(g_{\mu\nu})$, denn

$$\begin{aligned} R_{1212} &= g_{1\kappa} g_{2\lambda} R^{\kappa\lambda}_{12} \\ &= g_{11} g_{21} R^{11}_{12} + g_{11} g_{22} R^{12}_{12} + g_{12} g_{21} R^{21}_{12} + g_{12} g_{22} R^{22}_{12} \\ &= (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) R^{12}_{12} = R^{12}_{12} \cdot g = K_G \cdot g. \end{aligned} \quad (15.14.5)$$

Für den Ricci-Tensor folgt:

$$\begin{aligned} Ric_{\lambda\nu} &= R^\kappa_{\lambda\kappa\nu} = g^{\kappa\kappa'} R_{\kappa'\lambda\kappa\nu} \quad \Rightarrow \\ Ric_{11} &= g^{11} R_{1111} + g^{12} R_{2111} + g^{21} R_{1121} + g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{2121}, \\ Ric_{22} &= g^{11} R_{1212} + g^{12} R_{2212} + g^{21} R_{1222} + g^{22} R_{2222} = g^{11} R_{1212}, \\ Ric_{12} &= g^{11} R_{1112} + g^{12} R_{2112} + g^{21} R_{1122} + g^{22} R_{2122} = g^{12} R_{2112}, \end{aligned}$$

$$Ric_{21} = Ric_{12} .$$

$$Ric_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} \cdot R_{1212} , \quad (15.14.6)$$

und für den Ricci-Skalar:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= Ric^\nu{}_\nu = g^{\nu\lambda} Ric_{\lambda\nu} \\ &= g^{11} Ric_{11} + g^{12} Ric_{21} + g^{21} Ric_{12} + g^{22} Ric_{22} \\ &= (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21} - g^{21}g^{12} + g^{22}g^{11}) \cdot R_{1212} \\ &= 2g^{-1} \cdot R_{1212} = 2g^{-1} \cdot g \cdot K_G = 2K_G , \end{aligned} \quad (15.14.7)$$

und für den Einstein-Tensor:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \\ &= \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} \cdot R_{1212} - \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g} \cdot R_{1212} = 0 , \end{aligned} \quad (15.14.8)$$

denn mit $g_{\mu\lambda} \cdot g^{\lambda\nu} = \mathbb{1}^\mu{}_\nu$ folgt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \frac{1}{g} , \quad \text{bzw.} \quad (15.14.9)$$

$$\begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{g} . \quad (15.14.10)$$

und damit wird der Einstein-Tensor gerade Null. Die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen in 2-Dimensionen entsprechen also stets den Vakuum-Einstein-Gleichungen, ohne daß dazu die Raumzeit *Ricci-flach*, d.h. $Ric_{\mu\nu} = 0$, sein müßte:

$$G_{\mu\nu} = 0 = T_{\mu\nu} . \quad (15.14.11)$$

Beispiel: Die 2-dim. Kugeloberfläche S^2 :

Man verwendet sinnvollerweise Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} := (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta),$$

mit den Einheitsvektoren

$$\partial_r = \sin \vartheta \cos \varphi \partial_x + \sin \vartheta \sin \varphi \partial_y + \cos \vartheta \partial_z,$$

$$\partial_\vartheta = \cos \vartheta \cos \varphi \partial_x + \cos \vartheta \sin \varphi \partial_y - \sin \vartheta \partial_z,$$

$$\partial_\varphi = -\sin \vartheta \sin \varphi \partial_x + \sin \vartheta \cos \varphi \partial_y,$$

und der 3-dim. Metrik $^{(3)}g_{\mu\nu}$, bzw. der 2-dim. Oberflächen-Metrik $^{(2)}g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (dr \sin \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta d\vartheta \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi)^2 \\ &\quad + (dr \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta d\vartheta \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi)^2 \\ &\quad + (dr \cos \vartheta - r \sin \vartheta d\vartheta)^2 \\ &= dr^2 (\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) \\ &\quad + d\vartheta^2 (r^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta) \\ &\quad + d\varphi^2 (r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \\ &\quad + dr d\vartheta (2r \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + 2r \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - 2r \sin \vartheta \cos \vartheta) \\ &\quad + dr d\varphi (-2r \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + 2r \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi) \\ &\quad + d\vartheta d\varphi (-2r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi + 2r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi) \\ &= (dr, d\vartheta, d\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für die 3-dim. Metrik $^{(3)}g_{\mu\nu}$ und der 2-dim. Oberflächen-Metrik $^{(2)}g_{\mu\nu}$ der Kugel in Polarkoordinaten

$$^{(3)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad ^{(2)}g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix},$$

$${}^{(3)}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}, \quad {}^{(2)}g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}.$$

Mittels der Metrik ${}^{(2)}g_{\mu\nu}$ können wir die Christoffelsymbole $\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}$ und daraus mit 15.12.6 den Riemann-Tensor R_{1212} , die Gauß-Krümmung $K = R^{12}_{12}$, den Ricci-Tensor $Ric_{\lambda\nu}$ und den Ricci-Skalar \mathcal{R} der Kugeloberfläche S^2 berechnen. Hierbei verwenden wir der Übersichtlichkeit halber in den Tensorindizes $\{1, 2\}$ für $\{\vartheta, \varphi\}$. Mit 14.4.2 folgt:

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}(u) = \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}(u) = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(u) \left[\frac{\partial g_{\nu\lambda}(u)}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}(u)}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}(u)}{\partial u^{\lambda}} \right] \Rightarrow$$

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{1\lambda}[\partial_2 g_{1\lambda} + \partial_1 g_{2\lambda} - \partial_{\lambda} g_{21}] = \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi}(r^2) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2\lambda}[\partial_2 g_{1\lambda} + \partial_1 g_{2\lambda} - \partial_{\lambda} g_{21}] = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_{\vartheta}(r^2 \sin^2 \vartheta) \\ &= \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}, \end{aligned}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{1\lambda}[\partial_1 g_{1\lambda} + \partial_1 g_{1\lambda} - \partial_{\lambda} g_{11}] = g^{11}\partial_1 g_{11} - \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta}(r^2) = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{2\lambda}[\partial_1 g_{1\lambda} + \partial_1 g_{1\lambda} - \partial_{\lambda} g_{11}] = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{11} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi}(r^2) = 0,$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{1\lambda}[\partial_2 g_{2\lambda} + \partial_2 g_{2\lambda} - \partial_{\lambda} g_{22}] = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \partial_{\vartheta}(r^2 \sin^2 \vartheta) = -\sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{2\lambda}[\partial_2 g_{2\lambda} + \partial_2 g_{2\lambda} - \partial_{\lambda} g_{22}] = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{22} = -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi}(r^2 \sin^2 \vartheta) = 0.$$

Mit 15.12.6 folgt für R_{1212} :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}(\partial_1 \partial_2 g_{21} - \partial_1 \partial_1 g_{22} - \partial_2 \partial_2 g_{11} + \partial_2 \partial_1 g_{12}) + g_{\xi\kappa} \Gamma^{\xi}_{21} \Gamma^{\kappa}_{12} - g_{\xi\kappa} \Gamma^{\xi}_{11} \Gamma^{\kappa}_{22} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{\vartheta} \partial_{\vartheta} r^2 \sin^2 \vartheta + g_{11} \Gamma^1_{21} \Gamma^1_{12} + g_{22} \Gamma^2_{21} \Gamma^2_{12} - g_{11} \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22} - g_{22} \Gamma^2_{11} \Gamma^2_{22} \\ &= -r^2 \partial_{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} = -r^2 \cos^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta \\ &= r^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Für die Gauß-Krümmung $K_G = R^{12}_{12}$ ergibt sich also mit 15.14.5:

$$K_G = R^{12}_{12} = \frac{1}{g} R_{1212} = \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{r^4 \sin^2 \vartheta} = \frac{1}{r^2}.$$

Mit 15.14.6 folgt für den Ricci-Tensor:

$$\begin{aligned} Ric_{\lambda\nu} &= \begin{pmatrix} g^{22} & -g^{12} \\ -g^{21} & g^{11} \end{pmatrix} \cdot R_{1212} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} r^2 \sin^2 \vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2} g_{\lambda\nu}. \end{aligned}$$

Und mit 15.14.7 ergibt sich der Ricci-Skalar zu:

$$\mathcal{R} = 2K_G = \frac{2}{r^2}. \quad \square$$

15.15 Gauß-Krümmung in m Dimensionen

Wir hatten in Kapitel 14.3 gesehen, daß Gauß die nach ihm benannte Krümmung ursprünglich mittels seiner *Normalenabbildung* definiert hat. Diese Normalenabbildung $\tilde{n} : M \rightarrow S^2$ mit $\tilde{n}(x) := \mathbf{n}(x)$, die jedem Punkt $x \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $\mathbf{n}(x)$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^2 zuordnet, läßt sich nun ohne Probleme auf den m -dimensionalen Fall verallgemeinern.

Sei M eine m -dimensionale Hyperfläche in \mathbb{E}^{m+1} und $\tilde{n} : M \rightarrow S^m$ mit $\tilde{n}(x) := \mathbf{n}(x)$ die verallgemeinerte Gaußsche Normalenabbildung. Die *Zweite Fundamentalform von Gauß* beschreibt die Änderung des Tangentialraums von M , bzw. des Normalenvektors im umgebenden Raum \mathbb{E}^{m+1} bei einer Änderung des Punktes $x(u)$ (14.2.10):

$$K_{ij}(u) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} e_j(u) \mid \mathbf{n}(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} x(u) \mid \mathbf{n}(u) \right\rangle, \quad i, j \in 1, \dots, m. \quad (15.15.1)$$

Die Gaußsche Krümmung $K_G(u)$ am Punkt $u \in \mathbb{E}^m$ wird dann definiert als (14.3.2):

$$K_G(u) := \det(K^i_j(u)) = \frac{\det(K_{ij}(u))}{\det(g_{kl}(u))}. \quad (15.15.2)$$

Wie im 2-dimensionalen Fall gilt auch im m -dimensionalen Fall für eine kleine Umgebung U um den Punkt $u \in \mathbb{E}^m$:

Satz 15.15.1

$$\tilde{n}^* \text{vol}_{S^m} = K_G(u) \text{vol}_M, \quad \text{bzw.} \quad (15.15.3)$$

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{n}(U))}{\text{vol}(U)} = \lim_{U \rightarrow 0} \frac{\int_U \text{vol}_{S^m}}{\int_U \text{vol}_M} = K_G. \quad (15.15.4)$$

Beweis:

Wir gehen wegen $T_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1}) \sim \mathbb{E}^{m+1}$ wieder vom Tangentialraum $T_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1})$ an $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ im Punkt $x(u) \in \mathbb{E}^{m+1}$ mit

$$T_{x(u)}(\mathbb{E}^3) = \left\{ \frac{\partial x^k(u)}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^k}, i = 1 \dots m, k = 1, \dots, m+1 \right\}$$

zum Tangentialraum

$$\tilde{T}_{x(u)}(\mathbb{E}^{m+1}) = \mathbb{E}^{m+1} = \{e_i(u) = x_{u^i} = \frac{\partial x(u)}{\partial u^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(u)}{\partial u^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^{m+1}(u)}{\partial u^i} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m\}$$

über. Nun führen wir die zu $\{e_i(u)\}$ duale Basis des Kotangentialraums $\tilde{T}_{x(u)}^*(\mathbb{E}^{m+1})$ ein mit

$$\tilde{T}_{x(u)}^*(\mathbb{E}^{m+1}) = \mathbb{E}^{m+1} = \{de^i(u) \mid de^i(e_j)|_u = \delta_j^i\}.$$

Seien also die $m+1$ Basisvektoren $e_1, \dots, e_m, \mathbf{n}$ auf \mathbb{E}^{m+1} in einer positiven Orientierung gegeben. Seien weiter M und S^m beide in den gleichen Raum \mathbb{E}^{m+1} eingebettet, dann kann man die Tangentialräume $T_x M$ und $T_{\tilde{n}(x)} S^m$ miteinander identifizieren. Damit sind dann auch die entsprechenden Flächenformen bei x , bzw. $\tilde{n}(x)$ identisch:

$$\omega := \text{vol}_{S^m} = \text{vol}_M = \sqrt{g} \frac{1}{m!} \epsilon_{i_1 \dots i_m} de^{i_1} \wedge \dots \wedge de^{i_m} = \sqrt{g} de^{i_1} \dots de^{i_m}.$$

Für die Tangentialabbildung \tilde{n}_* gilt dann:

$$\tilde{n}_*(e_i) = \tilde{n}_*(x_{u^i}) = \tilde{n}_*\left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^i}.$$

Für den Rücktransport (pullback) der Flächenform $\omega = \text{vol}_{S^m}$ von S^m nach M ergibt sich mit 14.2.16:

$$\begin{aligned} \tilde{n}^* \text{vol}_{S^m}(e_1, \dots, e_m) &= \tilde{n}^* \omega(e_1, \dots, e_m) = \omega(\tilde{n}_* x_{u^1}, \dots, \tilde{n}_* x_{u^m}) = \omega\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^m}\right) \\ &= \omega(-K_1^{k^1} x_{u^{k^1}}, \dots, -K_m^{k^m} x_{u^{k^m}}) \\ &= (-1)^m K_1^{k^1} \dots K_m^{k^m} \omega(e_{k^1}, \dots, e_{k^m}) \\ &= (-1)^m K_1^{k^1} \dots K_m^{k^m} \epsilon_{k^1 \dots k^m} \omega(e_1, \dots, e_m) \\ &= (-1)^m \det(K^i_j) \omega(e_1, \dots, e_m) \\ &= (-1)^m \frac{\det(K_{ij})}{\det(g)} \omega(e_1, \dots, e_m) = (-1)^m K_G(u) \text{vol}_M(e_1, \dots, e_m). \end{aligned}$$

Für ungerades m kann man mittels $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ die Orientierung der Basis wechseln und erhält

$$\tilde{n}^* \text{vol}_{S^m} = K_G(u) \text{vol}_M .$$

Sei nun $U \subset M$, dann folgt wie behauptet

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{n}(U))}{\text{vol}(U)} = \lim_{U \rightarrow 0} \frac{\int_U \text{vol}_{S^m}}{\int_U \text{vol}_M} = K_G . \quad \square$$

Wenn nun die Dimension m der Hyperfläche M geradzahlig ist, so kann man eine wichtige Verbindung der Gaußschen Krümmung mit dem Riemannschen Krümmungstensor herstellen und damit das Gaußschen *Theorema Egregium* auch für diesen m -dimensionalen Fall verallgemeinern. Dies geschieht folgendermaßen.

Wegen der Geradzahligkeit von m kann man die Determinante von K in ein Produkt von 2×2 Determinanten faktorisieren und diese 2×2 Determinanten mit einer Komponente des Riemannschen Krümmungstensors der entsprechenden Unterräume identifizieren. Diese Darstellung der Gaußschen Krümmung ist im Zusammenhang mit verallgemeinerten Indexsätzen von großer Bedeutung. Wir folgen Spivak (1979), IV, S. 98 ff.

Satz 15.15.3 *Sei $p \in M$ und $\dim M = m$ geradzahlig, dann gilt*

$$K_G(p) = \frac{1}{2^{m/2} m!} \sum_{\substack{i_1 \dots i_m = 1 \\ j_1 \dots j_m = 1}}^m R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cdots R_{i_{m-1} i_m j_{m-1} j_m} \frac{\epsilon^{i_1 \dots i_m}}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\epsilon^{j_1 \dots j_m}}{\sqrt{\det(g)}} . \quad (15.15.5)$$

Beweis: Sei $V := T_p(M)$ ein m -dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{e_i\}$, $V^* := T_p^* M$ der zu V entsprechende Dualraum mit Basis $\{e^j\}$, $K : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, $K^* : V^* \rightarrow V^*$ der Rücktransport von K , dann ist nach 11.2.5

$$\det(K) \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^m = K^*(e^1 \wedge \dots \wedge e^m) = K^*(e^1) \wedge \dots \wedge K^*(e^m) .$$

Jetzt ist

$$K(e_i) = \sum_{j=1}^m K_i^j e_j \quad \Rightarrow \quad K^*(e^i) = \sum_{j=1}^m K_j^i e^j ,$$

und damit folgt für $\det(b)$

$$\begin{aligned} \det(K) \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^m &= [K^*(e^1) \wedge K^*(e^2)] \wedge \dots \wedge [K^*(e^{m-1}) \wedge K^*(e^m)] \\ &= \left[\left(\sum_{j_1=1}^m K_{j_1}^1 e^{j_1} \right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^m K_{j_2}^2 e^{j_2} \right) \right] \wedge \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{j_1 < j_2 = 1}^m (K_{j_1}^1 K_{j_2}^2 - K_{j_1}^2 K_{j_2}^1) e^{j_1} \wedge e^{j_2} \right] \wedge \dots \\
&= \left[\frac{1}{2} \sum_{j_1 j_2 = 1}^m (K_{j_1}^1 K_{j_2}^2 - K_{j_1}^2 K_{j_2}^1) e^{j_1} \wedge e^{j_2} \right] \wedge \dots \\
&= \frac{1}{2^{m/2}} \left[\sum_{j_1 \dots j_m = 1}^m (K_{j_1}^1 K_{j_2}^2 - K_{j_1}^2 K_{j_2}^1) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot (K_{j_{m-1}}^{m-1} K_{j_m}^m - K_{j_{m-1}}^m K_{j_m}^{m-1}) \right] e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_m} \\
&= \frac{1}{2^{m/2}} \left[\sum_{j_1 \dots j_m = 1}^m (K_{j_1}^1 K_{j_2}^2 - K_{j_1}^2 K_{j_2}^1) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot (K_{j_{m-1}}^{m-1} K_{j_m}^m - K_{j_{m-1}}^m K_{j_m}^{m-1}) \right] \cdot \epsilon^{j_1 \dots j_m} \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^m \quad \Rightarrow \\
\det(K) &= \frac{1}{2^{m/2}} \left[\sum_{j_1 \dots j_m = 1}^m (K_{j_1}^1 K_{j_2}^2 - K_{j_1}^2 K_{j_2}^1) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot (K_{j_{m-1}}^{m-1} K_{j_m}^m - K_{j_{m-1}}^m K_{j_m}^{m-1}) \right] \epsilon^{j_1 \dots j_m} \\
&= \frac{1}{2^{m/2} m!} \left[\sum_{\substack{i_1 \dots i_m = 1 \\ j_1 \dots j_m = 1}}^m (K_{j_1}^{i_1} K_{j_2}^{i_2} - K_{j_1}^{i_2} K_{j_2}^{i_1}) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot (K_{j_{m-1}}^{i_{m-1}} K_{j_m}^{i_m} - K_{j_{m-1}}^{i_m} K_{j_m}^{i_{m-1}}) \right] \epsilon^{i_1 \dots i_m} \epsilon^{j_1 \dots j_m} . \\
K_G(p) &= \det(K_j^i(p)) = \frac{\det(K_{ij}(p))}{\det(g_{kl}(p))} \\
&= \frac{1}{2^{m/2} m!} \left[\sum_{\substack{i_1 \dots i_m = 1 \\ j_1 \dots j_m = 1}}^m (K_{i_1 j_1} K_{i_2 j_2} - K_{i_2 j_1} K_{i_1 j_2}) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot (K_{i_{m-1} j_1} K_{i_m j_2} - K_{i_m j_1} K_{i_{m-1} j_2}) \right] \frac{\epsilon^{i_1 \dots i_m} \epsilon^{j_1 \dots j_m}}{\det(g)} .
\end{aligned}$$

Mit der Gauß-Integrabilitätsbedingung 14.4.5 können wir die 2×2 Determinanten der K_{ij} als eine Komponente des Riemannschen Krümmungstensors schreiben ($K_{ij} = K_{ji}$):

$$\begin{aligned}
R_{nkij}(u) &= K_{jk}(u)K_{ni}(u) - K_{ik}(u)K_{nj}(u) \quad \Rightarrow \\
R_{j_2 j_1 i_2 i_1}(u) &= K_{i_1 j_1}(u)K_{j_2 i_2}(u) - K_{i_2 j_1}(u)K_{j_2 i_1}(u)
\end{aligned}$$

$$= K_{i_1 j_1}(u) K_{i_2 j_2}(u) - K_{i_2 j_1}(u) K_{i_1 j_2}(u).$$

Da wir in $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ einen Levi-Civita Zusammenhang vorliegen haben gilt $R_{j_2 j_1 i_2 i_1} = R_{i_1 i_2 j_1 j_2}$ und damit folgt

$$K_G(p) = \frac{1}{2^{m/2} m!} \sum_{\substack{i_1 \dots i_m = 1 \\ j_1 \dots j_m = 1}}^m R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cdots R_{i_{m-1} i_m j_{m-1} j_m} \cdot \frac{\epsilon^{i_1 \dots i_m} \epsilon^{j_1 \dots j_m}}{\det(g)}. \quad \square$$

Wir hatten in 14.4.4 gesehen, daß $R^n_{kij}(u)$ nur von den Christoffelsymbolen und deren ersten Ableitungen abhängt, und damit nach 14.4.2 also nur von $g_{ij}(p)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen. Damit hängt also die Gaußsche Krümmung $K_G(p)$ einer m -dimensionalen Hyperfläche $M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ mit geradzahligem m nur von $g_{ij}(p)$ und deren ersten und zweiten Ableitungen ab und ist eine intrinsische Größe der Hyperfläche M und zugleich eine isometrische Invariante der Fläche, d.h. $K_G(p)$ bleibt unter Metrik-erhaltenden Abbildungen unverändert. Dies ist also eine Verallgemeinerung des berühmten Gaußschen *Theorema Egregium*.

15.16 Äußere Krümmung in m Dimensionen

Der Begriff der *äußeren Krümmung* ist uns bereits bei der Gaußschen Flächentheorie unter den Begriffen *Weingartenabbildung*, bzw. *Zweite Fundamentalform* begegnet (14.2.12, 14.2.13, 14.2.15). Die *äußere Krümmung* beschreibt die Änderung der Normalen einer m -dimensionalen Hyperfläche M in einer höherdimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} . Wir behandeln hier den Fall einer m -dimensionalen Hyperfläche M in einer $(m+1)$ -dimensionalen pseudo-Riemannschen sowie einer echten Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} .

Für Physiker ist diese Verallgemeinerung der Gaußschen Flächentheorie insbesondere für raumartige Hyperflächen in der 3+1 Formulierung der *Allgemeinen Relativitätstheorie* von Bedeutung, denn so kann man aus den Einstein-Gleichungen ein Anfangswert-Problem konstruieren, das dann der Ausgangspunkt für numerische Verfahren zur Lösung der Einstein-Gleichungen ist. Die numerischen Berechnungen der Wellenformen von Gravitationswellen diverser massiver kosmischer Ereignisse, z.B. Verschmelzung zweier schwarzer Löcher, haben so ganz wesentlich zur Entdeckung der Gravitationswellen im Jahr 2015 beigetragen. Eine sehr schöne und klare Darstellung dieses Forschungsgebiets liefert Gourgoulhon (2007), dessen Einführung in die 3 + 1 Geometrie wir hier folgen, wenn auch in einer Verallgemeinerung auf m -dimensionale Hyperflächen in $(m+1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und wiederum in unserer Nomenklatur. Ausführlicher haben wir dies in einem Anhang unseres Buches Schiekel (2019) über Indextheoreme (Atiyah-Singer, etc.) dargestellt.

Daneben hat die 3+1 Geometrie auch Anwendung in der Darstellung der *Allgemeinen Relativitätstheorie* als ein Hamilton-System und die anschließende Quantisierung

in der *Kanonische Quantengravitation* (*Canonical Quantum General Relativity*) und *Schleifenquantengravitation* (*Loop-Quantum-Gravity, LQG*) gefunden.

Sei also \hat{M} eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\Phi : \hat{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mit $M = \Phi(\hat{M})$ eine Einbettung von \hat{M} in \mathcal{N} . Auf der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} gebe es einen Levi-Civita Zusammenhang ∇_μ (15.12), d.h. einen eindeutigen, torsionsfreien und metrikkompatiblen Zusammenhang in einer Koordinatenbasis. Metrikkompatibel heißt hier $\nabla_\mu g = 0$, wobei g wieder die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ auf \mathcal{N} ist. Seien $u, v \in T_p\mathcal{N}$, mit $u = u^\mu \partial_\mu$, $v = v^\nu \partial_\nu$ und $f \in \mathcal{F}(\mathcal{N})$, dann bedeutet torsionsfrei in einer Koordinatenbasis:

$$T(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla_u v - \nabla_v u = 0 & \Rightarrow \quad \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu} , \\ \text{und mit } uf = u^\mu \partial_\mu f = u^\mu \nabla_\mu f = \nabla_u f \text{ folgt} & (15.16.1) \\ (\nabla_u v - \nabla_v u)f = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u)f = 0 . \end{cases}$$

Die m -dimensionale Hyperfläche M sei raumartig. Formaler ausgedrückt heißt das, es gebe auf der $(m+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} eine skalare Funktion t , die 'Zeit', so daß M durch $t = \text{const.}$ definiert werde. Seien jetzt $p \in M$, $e_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\theta^\mu := dx^\mu$, dann steht die 1-Form $dt \in T_p^*\mathcal{N}$, bzw. der Gradient $\vec{\nabla}t \in T_p\mathcal{N}$ als der duale Vektor zu dt , senkrecht auf M :

$$dt := t_\mu \theta^\mu, \quad \vec{\nabla}t := (\vec{\nabla}t)^\mu e_\mu := (g^{\mu\nu} t_\nu) e_\mu, \quad (15.16.2)$$

$$u = u^\nu e_\nu \in T_p M \quad \Rightarrow \quad dt(u) = t_\mu u^\nu \theta^\mu(e_\nu) = 0. \quad (15.16.3)$$

Damit kann man den folgenden Normalenvektor \mathbf{n} auf M definieren:

$$\mathbf{n} := \frac{\vec{\nabla}t}{(-g(\vec{\nabla}t, \vec{\nabla}t))^{1/2}} = \frac{\vec{\nabla}t}{(-g_{\mu\nu}(\vec{\nabla}t)^\mu (\vec{\nabla}t)^\nu)^{1/2}}. \quad (15.16.4)$$

Damit folgt dann auch:

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) := g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1. \quad (15.16.5)$$

In einer echten Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} entfallen hier und bei der Definition von \mathbf{n} natürlich die Minuszeichen.

Im nächsten Schritt sollen der Projektor $\vec{\gamma} : T_p(\mathcal{N}) \rightarrow T_p(M)$ und die M -Metrik γ betrachtet werden. Seien $u, v \in T_p(\mathcal{N})$, dann definiert man:

$$\vec{\gamma} : T_p(\mathcal{N}) \rightarrow T_p(M) \quad \vec{\gamma}u := u + g(\mathbf{n}, u)\mathbf{n}, \quad \text{bzw.} \quad (15.16.6)$$

$$\gamma^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu + \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu, \quad \text{und}$$

$$\gamma : T_p(\mathcal{N}) \times T_p(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma(u, v) := g(u, v) + g(\mathbf{n}, u)g(\mathbf{n}, v), \quad \text{bzw.} \quad (15.16.7)$$

$$\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu.$$

Daß $\tilde{\gamma}$ und γ tatsächlich Projektor und M -Metrik sind sieht man unmittelbar:

$$u \in \mathbf{cn}, v \in T_p(\mathcal{N}) \quad \Rightarrow$$

$$\gamma(u, v) = g(\mathbf{cn}, v) + g(\mathbf{n}, \mathbf{cn})g(\mathbf{n}, v) = cg(\mathbf{n}, v) - cg(\mathbf{n}, v) = 0. \quad (15.16.8)$$

$$u, v \in T_p(M) \quad \Rightarrow$$

$$\gamma(u, v) = g(u, v) + g(\mathbf{n}, u)g(\mathbf{n}, v) = g(u, v). \quad (15.16.9)$$

$$\gamma^\mu_\kappa \gamma^\kappa_\nu = (\delta^\mu_\kappa + \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\kappa)(\delta^\kappa_\nu + \mathbf{n}^\kappa \mathbf{n}_\nu) = \delta^\mu_\nu + \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu + \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu = \gamma^\mu_\nu. \quad (15.16.10)$$

Hieraus sieht man, daß $\gamma : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich eine Einschränkung von $g : T_p \mathcal{N} \times T_p \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist, d.h.

$$\gamma := \Phi^* g. \quad (15.16.11)$$

In der Sprache von Gauß ist γ die *Erste Fundamentalform* der Hyperfläche M .

Ein beliebigen Tensor $T \in \mathcal{T}_r^q(\mathcal{N})$ wird mittels $\hat{\gamma}$ auf $\mathcal{T}_r^q(M)$ projiziert:

$$(\hat{\gamma}T)^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} = \gamma^{\mu_1}_{\bar{\mu}_1} \cdot \dots \cdot \gamma^{\mu_q}_{\bar{\mu}_q} \cdot \gamma^{\bar{\nu}_1}_{\nu_1} \cdot \dots \cdot \gamma^{\bar{\nu}_r}_{\nu_r} T^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_q}_{\bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_r}. \quad (15.16.12)$$

Mittels des Levi-Civita Zusammenhangs ∇_μ kann man auf bekannte Weise den Riemannschen Krümmungstensor auf \mathcal{N} definieren, der sich wegen der vorausgesetzten Koordinatenbasis einfach ergibt als (15.7.1, 15.7.2):

$$u = u^\lambda e_\lambda \in T_p \mathcal{N} \quad \Rightarrow$$

$${}^{\mathcal{N}}R^\kappa_{\lambda\mu\nu} u^\lambda := \theta^\kappa({}^{\mathcal{N}}R(e_\mu, e_\nu)u^\lambda e_\lambda) := (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) u^\kappa. \quad (15.16.13)$$

Die raumartige Hyperfläche M ist eine echte Riemannsche Mannigfaltigkeit und man definiert auf ihr einen Levi-Civita Zusammenhang D_μ als eine Projektion von ∇_μ auf M :

$$(\hat{\gamma}D_\alpha T)^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} = \gamma^{\mu_1}_{\bar{\mu}_1} \cdot \dots \cdot \gamma^{\mu_q}_{\bar{\mu}_q} \cdot \gamma^{\bar{\nu}_1}_{\nu_1} \cdot \dots \cdot \gamma^{\bar{\nu}_r}_{\nu_r} \cdot (\gamma^{\bar{\alpha}}_\alpha \nabla_{\bar{\alpha}}) T^{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_q}_{\bar{\nu}_1 \dots \bar{\nu}_r}. \quad (15.16.14)$$

Mit diesem Zusammenhang D_μ definiert man nun wie üblich einen Riemannschen Krümmungstensor R auf M , der sich wegen der vorausgesetzten Koordinatenbasis einfach ergibt als (15.7.1, 15.7.2):

$$u = u^\lambda e_\lambda \in T_p M, \quad \Rightarrow$$

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} u^\lambda := \theta^\kappa(R(e_\mu, e_\nu)u^\lambda e_\lambda) := (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) u^\kappa. \quad (15.16.15)$$

Dieser Krümmungstensor auf M wird als *innere Krümmung* bezeichnet. Der entsprechende Ricci-Tensor Ric ist dann

$$Ric_{\lambda\nu} := R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} \quad (15.16.16)$$

und der Ricci-Skalar \mathcal{R} , auch *Gaußsche Krümmung* genannt, ist

$$\mathcal{R} := Ric^{\kappa}{}_{\kappa} = \gamma^{\kappa\lambda} Ric_{\lambda\kappa} . \quad (15.16.17)$$

Die *äußere Krümmung* oder *Zweite Fundamentalform* der Gaußschen Flächentheorie wird folgendermaßen verallgemeinert. Seien $u, v \in M$, dann gilt für die Weingartenabbildung $\nabla_v \mathbf{n} \in T_p M$, denn

$$g(\mathbf{n}, \nabla_v \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \nabla_v g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \nabla_v (-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_v \mathbf{n} \in T_p M . \quad (15.16.18)$$

Mit diesem Ergebnis definiert man dann die *Äußere Krümmung* K als

$$K : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } K(u, v) := -\gamma(u, \nabla_v \mathbf{n}) = -\gamma_{\mu\nu} u^{\mu} (\nabla_v \mathbf{n})^{\nu} . \quad (15.16.19)$$

K ist selbstadjungiert. Um dies zu zeigen, soll zunächst einmal der Kommutator von zwei Vektoren $u = u^{\mu} e_{\mu}$, $v = v^{\nu} e_{\nu}$ aus $T_p M$ betrachtet werden:

$$[u, v] := u^{\mu} e_{\mu} v^{\nu} e_{\nu} - v^{\nu} e_{\nu} u^{\mu} e_{\mu} . \quad (15.16.20)$$

Nun nutzt man die Torsionsfreiheit des Zusammenhangs ∇_{μ} aus und erhält mit 15.12.2 $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} [u, v]^{\nu} &= u^{\mu} (e_{\mu} v^{\nu}) - v^{\mu} (e_{\mu} u^{\nu}) + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\pi} u^{\mu} v^{\pi} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\pi} u^{\pi} v^{\mu} . \\ &= u^{\mu} (e_{\mu} v^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\pi} v^{\pi}) - v^{\mu} (e_{\mu} u^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\pi} u^{\pi}) \\ &= u^{\mu} \nabla_{\mu} v^{\nu} - v^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\nu} . \end{aligned} \quad (15.16.21)$$

Im nächsten Schritt zeigt man, daß $[u, v]$ für zwei Vektoren $u, v \in T_p M$ wiederum selbst in $T_p M$ liegt. Hierbei nutzt man erneut die Torsionsfreiheit von ∇_{μ} aus, und zwar in der Form von

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} t = \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} t . \quad (15.16.22)$$

$$\begin{aligned} g(\vec{\nabla} t, [u, v]) &= g_{\mu\nu} (\vec{\nabla} t)^{\mu} [u, v]^{\nu} = g_{\mu\nu} (\vec{\nabla} t)^{\mu} (u^{\kappa} \nabla_{\kappa} v^{\nu} - v^{\kappa} \nabla_{\kappa} u^{\nu}) \\ &= u^{\kappa} (\vec{\nabla} t)_{\nu} \nabla_{\kappa} v^{\nu} - v^{\kappa} (\vec{\nabla} t)_{\nu} \nabla_{\kappa} u^{\nu} \\ &= u^{\mu} \{ \nabla_{\mu} ((\vec{\nabla} t)_{\nu} v^{\nu}) - v^{\nu} \nabla_{\mu} ((\vec{\nabla} t)_{\nu}) \} - v^{\mu} \{ \nabla_{\mu} ((\vec{\nabla} t)_{\nu} u^{\nu}) - u^{\nu} \nabla_{\mu} ((\vec{\nabla} t)_{\nu}) \} . \end{aligned}$$

Nun ist $(\vec{\nabla}t)_\nu v^\nu = 0 = (\vec{\nabla}t)_\nu u^\nu$ und damit folgt

$$\begin{aligned} g(\vec{\nabla}t, [u, v]) &= u^\mu v^\nu (\nabla_\nu (\vec{\nabla}t)_\mu - \nabla_\mu (\vec{\nabla}t)_\nu) \\ &= u^\mu v^\nu (\nabla_\nu \nabla_\mu t - \nabla_\mu \nabla_\nu t) \\ &= u^\mu v^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu t - \nabla_\mu \nabla_\nu t) = 0. \end{aligned} \quad (15.16.23)$$

Also liegt wie behauptet $[u, v] \in T_p M$.

Hieraus folgt nun die Selbstadjungiertheit von $K(u, v)$:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= -\gamma(u, \nabla_v \mathbf{n}) = -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) = -\nabla_v g(u, \mathbf{n}) + g(\nabla_v u, \mathbf{n}) \\ &= g(\nabla_v u, \mathbf{n}) = g(\nabla_u v - [u, v], \mathbf{n}) \\ &= \nabla_u g(v, \mathbf{n}) - g(v, \nabla_u \mathbf{n}) - g([u, v], \mathbf{n}) \\ &= -g(v, \nabla_u \mathbf{n}) - g([u, v], \mathbf{n}) \\ &= -\gamma(v, \nabla_u \mathbf{n}) = K(v, u). \end{aligned} \quad (15.16.24)$$

Man kann jetzt $K : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf triviale Weise auf $K : T_p \mathcal{N} \times T_p \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Seien $u, v \in T_p \mathcal{N}$, dann werde die Fortsetzung von K definiert als:

$$K(u, v) := K(\vec{\gamma}u, \vec{\gamma}v) = -g(\vec{\gamma}u, \vec{\gamma}\nabla_v \mathbf{n}). \quad (15.16.25)$$

Diese Form von K kann man jetzt etwas umformen. Hierzu führt man den Vektor $\mathbf{a} := \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}$ ein. Es gilt $a \in M$, denn

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = g(\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{n}} g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{n}} (-1) = 0.$$

$$\begin{aligned} K(u, v) &= K(\vec{\gamma}u, \vec{\gamma}v) = -g(\vec{\gamma}u, \nabla_{\vec{\gamma}v} \mathbf{n}) = -g(u + g(\mathbf{n}, u)\mathbf{n}, \nabla_{v+g(\mathbf{n}, v)\mathbf{n}} \mathbf{n}) \\ &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) - g(g(\mathbf{n}, u)\mathbf{n}, \nabla_v \mathbf{n}) \\ &\quad - g(u, g(\mathbf{n}, v)\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) - g(g(\mathbf{n}, u)\mathbf{n}, g(\mathbf{n}, v)\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Da $g(\mathbf{n}, \nabla_v \mathbf{n}) = 0$ und $g(\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) = 0$ ist folgt:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) - g(u, g(\mathbf{n}, v)\nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) \\ &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) - g(u, \mathbf{a})g(\mathbf{n}, v) \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (15.16.26)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -g(e_\mu, (\nabla_\nu \mathbf{n})^\kappa e_\kappa) - \mathbf{a}_\mu \mathbf{n}_\nu \\ &= -g_{\mu\kappa} (\nabla_\nu \mathbf{n})^\kappa - \mathbf{a}_\mu \mathbf{n}_\nu = -(\nabla_\nu \mathbf{n})_\mu - \mathbf{a}_\mu \mathbf{n}_\nu. \end{aligned} \quad (15.16.27)$$

In der Darstellung der Gaußschen Flächentheorie haben wir im Kapitel 14.4 notwendige Bedingungen an die *Erste Fundamentalform*, den metrischen Tensor g , und an die *Zweite Fundamentalform* K , betrachtet. Eine Verallgemeinerung dieser von Gauß und Codazzi und Mainardi aufgestellten notwendigen Bedingungen an g und K auf $(m+1)$ -dimensionalen pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind die folgenden sog. Gauß- und Codazzi-Mainardi-Relationen.

Satz 15.16.1 (Gauß-Relationen (Minkowski Metrik)) *Die folgenden drei Gleichungen heißen Gauß-Relation, kontrahierte Gauß-Relation und skalare Gauß-Relation. Hierbei ist $K : T_p\mathcal{N} \times T_p\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ als die triviale Erweiterung von $K : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ zu verstehen. Wir führen noch die Spur von K ein: $\mathcal{K} := K^\mu_\mu$.*

$$\gamma^\rho_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = R^\rho_{\sigma\mu\nu} + K^\rho_{\mu} K_{\sigma\nu} - K^\rho_{\nu} K_{\mu\sigma}, \quad (15.16.28)$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\mu\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\nu} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} = Ric_{\mu\nu} + \mathcal{K} K_{\mu\nu} - K_{\mu\bar{\mu}} K^{\bar{\mu}}_{\nu}, \quad (15.16.29)$$

$${}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + 2 {}^{\mathcal{N}}Ric_{\mu\nu} \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}^\nu = \mathcal{R} + \mathcal{K}^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (15.16.30)$$

Beweis: Sei $u \in T_pM$, dann folgt mit 15.16.15:

$$D_\mu D_\nu u^\rho - D_\nu D_\mu u^\rho = R^\rho_{\bar{\mu}\bar{\nu}} u^{\bar{\mu}}.$$

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu u^\rho &= \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \nabla_{\bar{\mu}} (D_{\bar{\nu}} u^{\bar{\rho}}) \\ &= \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \nabla_{\bar{\mu}} (\gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma). \end{aligned}$$

Mit 15.16.7 kann man $\gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}$ und $\gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma}$ expandieren und erhält:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{\mu}} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} &= \nabla_{\bar{\mu}} (\delta^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} + \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) = (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} + \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}), \\ \nabla_{\bar{\mu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} &= \nabla_{\bar{\mu}} (\delta^{\bar{\rho}}_{\sigma} + \mathbf{n}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}_\sigma) = (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_\sigma + \mathbf{n}^{\bar{\rho}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_\sigma). \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis und 15.16.27 und $\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \mathbf{n}_{\bar{\nu}} = 0$ und $\mathbf{n}_\sigma \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma = -(\nabla_{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_\sigma) u^\sigma$ und $\gamma^{\bar{\rho}}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} = \gamma^{\rho}_{\sigma}$ folgt:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu u^\rho &= \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \{ (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} + \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} \\ &\quad + \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_\sigma + \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_\sigma) + \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} \nabla_{\bar{\mu}} \} \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma \\ &= \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma - \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}}) (\nabla_{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_\sigma) u^\sigma \\ &\quad + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma} \nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma \\ &= \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma - \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\rho}}_{\rho} u^\sigma (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}}) (\nabla_{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_\sigma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} \nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\sigma}} u^{\sigma} \\
& = -K_{\mu\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} \nabla_{\bar{\sigma}} u^{\sigma} - K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma} u^{\sigma} + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} \nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\sigma}} u^{\sigma}.
\end{aligned}$$

$$D_{\nu} D_{\mu} u^{\rho} = -K_{\nu\mu} \gamma^{\rho}_{\sigma} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} \nabla_{\bar{\sigma}} u^{\sigma} - K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma} u^{\sigma} + \gamma^{\bar{\sigma}}_{\nu} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\rho}_{\sigma} \nabla_{\bar{\sigma}} \nabla_{\bar{\mu}} u^{\sigma}.$$

Bei der Differenzbildung $(D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) u^{\rho}$ fällt der erste Term wegen $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ weg und ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) u^{\rho} & = (K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma} - K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma}) u^{\sigma} \\
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} (\nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\sigma}} - \nabla_{\bar{\sigma}} \nabla_{\bar{\mu}}) u^{\sigma} \\
& = (K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma} - K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma}) u^{\sigma} + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\sigma}_{\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\sigma}} u^{\bar{\rho}}.
\end{aligned}$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} u^{\sigma} = (K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma} - K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma}) u^{\sigma} + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\sigma}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} u^{\bar{\sigma}},$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} u^{\sigma} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} u^{\sigma} + (K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma} - K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma}) u^{\sigma},$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + (K^{\rho}_{\mu} K_{\nu\sigma} - K^{\rho}_{\nu} K_{\mu\sigma}).$$

Dies ist die *Gauß-Relation*, sie verbindet die Krümmung von \mathcal{N} mit der Krümmung und der äußeren Krümmung von M .

Jetzt kann man die Gauß-Relation in den Indizes ρ und μ kontrahieren. Mittels

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\mu}_{\bar{\rho}} = \gamma^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}} = \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}} + \mathbf{n}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\rho}}$$

folgt:

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\mu}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = R^{\mu}_{\sigma\mu\nu} + (K^{\mu}_{\mu} K_{\nu\sigma} - K^{\mu}_{\nu} K_{\mu\sigma}),$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = Ric_{\sigma\nu} + \mathcal{K} K_{\sigma\nu} - K_{\sigma\mu} K^{\mu}_{\nu},$$

$$(\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}} + \mathbf{n}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\rho}}) \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = Ric_{\sigma\nu} + \mathcal{K} K_{\sigma\nu} - K_{\sigma\mu} K^{\mu}_{\nu},$$

$$\begin{aligned}
Ric_{\sigma\nu} + \mathcal{K} K_{\sigma\nu} - K_{\sigma\mu} K^{\mu}_{\nu} & = \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} Ric_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} + \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} \mathbf{n}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\rho}} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}} \\
& = \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} {}^{\mathcal{N}} Ric_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} + \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} \mathbf{n}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\rho}} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}} \\
& = \gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}} Ric_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} + \gamma_{\sigma\bar{\sigma}} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \mathbf{n}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\rho}} {}^{\mathcal{N}} R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\rho}\bar{\mu}\bar{\nu}}.
\end{aligned}$$

$$Ric_{\mu\nu} + \mathcal{K}K_{\mu\nu} - K_{\mu\bar{\mu}}K_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} = \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\mu\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}}.$$

Dies ist die *kontrahierte Gauß-Relation*.

Diese Gleichung kann man nun bzgl. der Indizes μ und ν mittels Multiplikation von $\gamma^{\nu\mu}$ nochmals kontrahieren und erhält damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} + \mathcal{K}^2 - K_{\mu\bar{\mu}}K^{\bar{\mu}\mu} &= \gamma^{\nu\mu}\gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma^{\nu\mu}\gamma_{\mu\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \\ &= \gamma^{\bar{\mu}\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\sigma}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \\ &= (\delta^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \mathbf{n}^{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}) {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \\ &= {}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}} + \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \\ &= {}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}} + (\delta_{\bar{\mu}}^{\bar{\rho}} + \mathbf{n}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}_{\bar{\mu}})\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} \\ &= {}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + 2 {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} + {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}\mathbf{n}^{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ in einem Levi-Civita Zusammenhang (15.12.7) ist der letzte Term Null und es folgt:

$$\mathcal{R} + \mathcal{K}^2 - K_{\mu\bar{\mu}}K^{\bar{\mu}\mu} = {}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + 2 {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\nu}\bar{\sigma}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}.$$

Dies ist die *skalare Gauß-Relation*. □

Die *skalare Gauß-Relation* ist zugleich eine Verallgemeinerung des berühmten Gaußschen *Theorema Egregium* (14.6.1) für eine m -dimensionale Hyperfläche M in einer $(m+1)$ dimensionalen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{N} . Dies kann man zeigen, indem man zunächst den Übergang von einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit durchführt und anschließend den Fall mit $\mathcal{N} = \mathbb{E}^3$ und \hat{M} einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer Einbettung $\Phi: \hat{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mit $M = \Phi(\hat{M})$ betrachtet. Beides soll als nächstes gezeigt werden.

Satz 15.16.3 (Gauß-Relationen (Riemannsche Metrik)) *Die folgenden drei Gleichungen heißen Gauß-Relation, kontrahierte Gauß-Relation und skalare Gauß-Relation. Hierbei ist $K: T_p\mathcal{N} \times T_p\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ als die triviale Erweiterung von $K: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ zu verstehen. Wir führen noch die Spur von K ein: $\mathcal{K} := K^{\mu}_{\mu}$.*

$$\gamma_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}}\gamma_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}}\gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} - K^{\rho}_{\mu}K_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\nu}K_{\mu\sigma}, \quad (15.16.31)$$

$$\gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\mu\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} = Ric_{\mu\nu} - \mathcal{K}K_{\mu\nu} + K_{\mu\bar{\mu}}K_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}}, \quad (15.16.32)$$

$${}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + 2 {}^{\mathcal{N}}Ric_{\mu\nu}\mathbf{n}^{\mu}\mathbf{n}^{\nu} = \mathcal{R} - \mathcal{K}^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}. \quad (15.16.33)$$

Beweis: Die Metrik g des entsprechenden Levi-Civita Zusammenhangs auf \mathcal{N} sei einfach $\text{diag}(+1, +1, \dots, +1)$. Für den Normalenvektor \mathbf{n} auf der Fläche M gilt dann wie oben, nur mit einem geänderten Vorzeichen

$$\mathbf{n} := \frac{\vec{\nabla}t}{(g(\vec{\nabla}t, \vec{\nabla}t))^{1/2}} = \frac{\vec{\nabla}t}{(g_{\mu\nu}(\vec{\nabla}t)^\mu(\vec{\nabla}t)^\nu)^{1/2}} \quad \text{und} \quad (15.16.34)$$

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) := g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = +1. \quad (15.16.35)$$

Der Projektor und die Metrik auf M sind dann

$$\vec{\gamma} : T_p(\mathcal{N}) \rightarrow T_p(M) \quad \vec{\gamma}u := u - g(\mathbf{n}, u)\mathbf{n}, \quad \text{bzw.} \quad (15.16.36)$$

$$\gamma^\mu{}_\nu := \delta^\mu{}_\nu - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu, \quad \text{und} \quad (15.16.37)$$

$$\gamma : T_p(\mathcal{N}) \times T_p(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma(u, v) := g(u, v) - g(\mathbf{n}, u)g(\mathbf{n}, v), \quad \text{bzw.} \quad (15.16.38)$$

$$\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu. \quad (15.16.39)$$

Damit folgt wiederum

$$u \in c\mathbf{n}, \quad v \in T_p(\mathcal{N}) \quad \Rightarrow$$

$$\gamma(u, v) = g(c\mathbf{n}, v) - g(\mathbf{n}, c\mathbf{n})g(\mathbf{n}, v) = cg(\mathbf{n}, v) - cg(\mathbf{n}, v) = 0.$$

$$u, v \in T_p(M) \quad \Rightarrow$$

$$\gamma(u, v) = g(u, v) - g(\mathbf{n}, u)g(\mathbf{n}, v) = g(u, v).$$

$$\gamma^\mu{}_\kappa \gamma^\kappa{}_\nu = (\delta^\mu{}_\kappa - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\kappa)(\delta^\kappa{}_\nu - \mathbf{n}^\kappa \mathbf{n}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu + \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu = \gamma^\mu{}_\nu.$$

In den *Gauß-Relationen* (15.16.28, 15.16.29, 15.16.30) ändert sich das Vorzeichen der Terme mit äußerer Krümmung, denn wie oben folgt:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu u^\rho &= \gamma^{\bar{\mu}}{}_\mu \gamma^{\bar{\nu}}{}_\nu \gamma^{\bar{\rho}}{}_\rho \nabla_{\bar{\mu}}(D_{\bar{\nu}} u^{\bar{\rho}}) \\ &= \gamma^{\bar{\mu}}{}_\mu \gamma^{\bar{\nu}}{}_\nu \gamma^{\bar{\rho}}{}_\rho \nabla_{\bar{\mu}}(\gamma^{\bar{\sigma}}{}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}{}_\sigma \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma). \end{aligned}$$

$$\nabla_{\bar{\mu}} \gamma^{\bar{\sigma}}{}_{\bar{\nu}} = \nabla_{\bar{\mu}}(\delta^{\bar{\sigma}}{}_{\bar{\nu}} - \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) = -(\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} - \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}),$$

$$\nabla_{\bar{\mu}} \gamma^{\bar{\rho}}{}_\sigma = \nabla_{\bar{\mu}}(\delta^{\bar{\rho}}{}_\sigma - \mathbf{n}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}_\sigma) = -(\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}^{\bar{\rho}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_\sigma).$$

Mit diesem Ergebnis und 15.16.27 und $\gamma^{\bar{\nu}}{}_\nu \mathbf{n}_{\bar{\nu}} = 0$ und $\mathbf{n}_\sigma \nabla_{\bar{\sigma}} u^\sigma = -(\nabla_{\bar{\sigma}} \mathbf{n}_\sigma) u^\sigma$ und $\gamma^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\sigma}}{}_\sigma = \gamma^{\bar{\rho}}{}_\sigma$ folgt:

$$D_\mu D_\nu u^\rho = \gamma^{\bar{\mu}}{}_\mu \gamma^{\bar{\nu}}{}_\nu \gamma^{\bar{\rho}}{}_\rho \{(-\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} \gamma^{\bar{\rho}}{}_\sigma - \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \gamma^{\bar{\rho}}{}_\sigma$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}})\mathbf{n}_{\sigma} - \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}_{\sigma}) + \gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}\gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma}\nabla_{\bar{\mu}}\} \nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} \\
= & -\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}\gamma^{\rho}_{\rho}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}_{\bar{\nu}})\gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma}\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} \\
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}\gamma^{\rho}_{\rho}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}})(\nabla_{\bar{\sigma}}\mathbf{n}_{\sigma})u^{\sigma} \\
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}\gamma^{\rho}_{\rho}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}}\gamma^{\bar{\rho}}_{\sigma}\nabla_{\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} \\
= & -\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}\gamma^{\rho}_{\rho}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}_{\bar{\nu}})\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} \\
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma}\gamma^{\rho}_{\rho}u^{\sigma}(\nabla_{\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\rho}})(\nabla_{\bar{\sigma}}\mathbf{n}_{\sigma}) \\
& + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma}\gamma^{\rho}_{\rho}\nabla_{\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} \\
= & +K_{\mu\nu}\gamma^{\rho}_{\rho}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} + K^{\rho}_{\mu}K_{\nu\sigma}u^{\sigma} + \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma}\gamma^{\rho}_{\rho}\nabla_{\bar{\mu}}\nabla_{\bar{\sigma}}u^{\sigma} .
\end{aligned}$$

Damit folgen wie im obigen Beweis mit der Minkowski-Metrik die Gauß-Relationen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit als

$$\begin{aligned}
\gamma^{\rho}_{\bar{\rho}}\gamma^{\bar{\sigma}}_{\sigma}\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}{}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} &= R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} - K^{\rho}_{\mu}K_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\nu}K_{\mu\sigma} , \\
\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu}\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu}{}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} + \gamma_{\mu\bar{\mu}}\mathbf{n}^{\bar{\nu}}\gamma^{\bar{\rho}}_{\nu}\mathbf{n}^{\bar{\sigma}}{}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} &= Ric_{\mu\nu} - \mathcal{K}K_{\mu\nu} + K_{\mu\bar{\mu}}K^{\bar{\mu}}_{\nu} , \\
{}^{\mathcal{N}}\mathcal{R} + 2{}^{\mathcal{N}}Ric_{\mu\nu}\mathbf{n}^{\mu}\mathbf{n}^{\nu} &= \mathcal{R} - \mathcal{K}^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} . \quad \square
\end{aligned}$$

Speziell für den euklidischen Raum \mathbb{E}^3 ist der Riemannsche Krümmungstensor ${}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$, so daß in diesem Fall folgt:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} - K^{\rho}_{\mu}K_{\sigma\nu} + K^{\rho}_{\nu}K_{\mu\sigma} = 0 , \quad (15.16.40)$$

$$Ric_{\mu\nu} - \mathcal{K}K_{\mu\nu} + K_{\mu\bar{\mu}}K^{\bar{\mu}}_{\nu} = 0 , \quad (15.16.41)$$

$$\mathcal{R} - \mathcal{K}^2 + K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 0 . \quad (15.16.42)$$

Betrachtet man jetzt die dritte Gleichung, die *skalare Gauß-Relation*, dann kann man $K_{\mu\nu}$ als einen 2-dimensionalen symmetrischen Tensor in einer Orthogonalbasis diagonalisieren und erhält

$$K_{\mu\nu} = K^{\mu\nu} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2) ,$$

und mit $\mathcal{K}^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2$ und $K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ folgt

$$\mathcal{R} = 2\kappa_1\kappa_2 = 2K_G . \quad (15.16.43)$$

Mit der Definition der Gauß-Krümmung K_G in 14.3.2 und dem Ergebnis von 15.14.7 ist der Anschluß an die Gaußsche Flächentheorie und das Gaußsche *Theorema Egregium* gezeigt.

Satz 15.16.5 (Codazzi-Mainardi-Relationen (Minkowski Metrik)) Die folgenden beiden Gleichungen heißen *Codazzi-Mainardi Relation* und *kontrahierte Codazzi-Mainardi Relation*.

$$\gamma^\rho_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} = D_{\nu} K^{\rho}_{\mu} - D_{\mu} K^{\rho}_{\nu}. \quad (15.16.44)$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{\mu} \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K^{\bar{\mu}}_{\mu}. \quad (15.16.45)$$

Beweis: Man kann jetzt die Definitionsgleichung von ${}^{\mathcal{N}}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ (15.16.13) auf den Normalenvektor \mathbf{n}^{ρ} anwenden:

$$(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) \mathbf{n}^{\rho} = {}^{\mathcal{N}}R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} \mathbf{n}^{\sigma}.$$

Nun projiziert man diese Gleichung von \mathcal{N} auf die Hyperfläche M :

$$\gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} = \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} (\nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} - \nabla_{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}}) \mathbf{n}^{\bar{\rho}}.$$

Mit Hilfe von 15.16.27 und $\gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{a}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}} &= \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \nabla_{\bar{\mu}} (-K^{\bar{\rho}}_{\bar{\nu}} - \mathbf{a}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \\ &= -\gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} (\nabla_{\bar{\mu}} K^{\bar{\rho}}_{\bar{\nu}} + (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{a}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} + \mathbf{a}^{\bar{\rho}} \nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \\ &= -D_{\mu} K^{\rho}_{\nu} + \mathbf{a}^{\rho} K_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von $K_{\nu\mu}$ folgt die *Codazzi-Mainardi Relation*:

$$\begin{aligned} \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} &= \gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} (\nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} - \nabla_{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}}) \mathbf{n}^{\bar{\rho}} \\ &= D_{\nu} K^{\rho}_{\mu} - D_{\mu} K^{\rho}_{\nu}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man in dieser Gleichung die Indizes ρ und μ kontrahieren und erhält mit ${}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\nu}\bar{\mu}} = {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$:

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{\nu} \mathcal{K} - D_{\mu} K^{\mu}_{\nu} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\mu}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{\nu} \mathcal{K} - D_{\mu} K^{\mu}_{\nu} \quad \Rightarrow$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\nu}\bar{\mu}} = D_{\mu} \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K^{\bar{\mu}}_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{\mu} \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K^{\bar{\mu}}_{\mu}. \quad \square$$

Satz 15.16.7 (Codazzi-Mainardi-Relationen (Riemannsche Metrik)) Die folgenden beiden Gleichungen heißen *Codazzi-Mainardi Relation* und *kontrahierte Codazzi-Mainardi Relation*.

$$\gamma^{\rho}_{\bar{\rho}} \gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \gamma^{\bar{\nu}}_{\nu} {}^{\mathcal{N}}R^{\bar{\rho}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} = D_{\nu} K^{\rho}_{\mu} - D_{\mu} K^{\rho}_{\nu}. \quad (15.16.46)$$

$$\gamma^{\bar{\mu}}_{\mu} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}}Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_{\mu} \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K^{\bar{\mu}}_{\mu}. \quad (15.16.47)$$

Beweis: Die Metrik g des entsprechenden Levi-Civita Zusammenhangs auf \mathcal{N} sei einfach $\text{diag}(+1, +1, \dots, +1)$. Wir beginnen wieder mit der Darstellung 15.16.26, 15.16.27, der Erweiterung von $K(u, v)$ auf \mathcal{N} . Mit 15.16.37 gilt erneut $\gamma_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu - \mathbf{n}^\mu \mathbf{n}_\nu$ und es folgt:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= K(\vec{\gamma}u, \vec{\gamma}v) = -g(\vec{\gamma}u, \nabla_{\vec{\gamma}v} \mathbf{n}) = -g(u - g(\mathbf{n}, u) \mathbf{n}, \nabla_{v-g(\mathbf{n}, v) \mathbf{n}} \mathbf{n}) \\ &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) + g(g(\mathbf{n}, u) \mathbf{n}, \nabla_v \mathbf{n}) \\ &\quad + g(u, g(\mathbf{n}, v) \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) - g(g(\mathbf{n}, u) \mathbf{n}, g(\mathbf{n}, v) \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) . \end{aligned}$$

Da $g(\mathbf{n}, \nabla_v \mathbf{n}) = 0$ und $g(\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) = 0$ ist folgt:

$$\begin{aligned} K(u, v) &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) + g(u, g(\mathbf{n}, v) \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) \\ &= -g(u, \nabla_v \mathbf{n}) + g(u, \mathbf{a}) g(\mathbf{n}, v) \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (15.16.48)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -g(e_\mu, (\nabla_\nu \mathbf{n})^\kappa e_\kappa) + \mathbf{a}_\mu n_\nu \\ &= -g_{\mu\kappa} (\nabla_\nu \mathbf{n})^\kappa + \mathbf{a}_\mu n_\nu = -(\nabla_\nu \mathbf{n})_\mu + \mathbf{a}_\mu n_\nu . \end{aligned} \quad (15.16.49)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} \mathbf{n}^{\bar{\rho}} &= \gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}} (-K_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} + \mathbf{a}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \\ &= -\gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} (\nabla_{\bar{\mu}} K_{\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} - (\nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{a}^{\bar{\rho}}) \mathbf{n}_{\bar{\nu}} - \mathbf{a}^{\bar{\rho}} \nabla_{\bar{\mu}} \mathbf{n}_{\bar{\nu}}) \\ &= -D_\mu K_{\nu}^{\rho} - \mathbf{a}^{\rho} K_{\nu\mu} . \end{aligned}$$

Mit

$$\gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}} R_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} = \gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} (\nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} - \nabla_{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}}) \mathbf{n}^{\bar{\rho}}$$

folgt wegen der Symmetrie von $K_{\nu\mu}$ die *gleiche Codazzi-Mainardi Relation* wie im Fall der Minkowski Metrik:

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}} R_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} \mathbf{n}^{\bar{\sigma}} &= \gamma_{\bar{\rho}}^\rho \gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \gamma_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} (\nabla_{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\nu}} - \nabla_{\bar{\nu}} \nabla_{\bar{\mu}}) \mathbf{n}^{\bar{\rho}} \\ &= D_\nu K_{\mu}^{\rho} - D_\mu K_{\nu}^{\rho} . \end{aligned}$$

Infolgedessen ist auch die *kontrahierte Codazzi-Mainardi Relation* die gleiche wie im Fall der Minkowski Metrik:

$$\gamma_{\bar{\mu}}^{\bar{\mu}} \mathbf{n}^{\bar{\nu}} {}^{\mathcal{N}} Ric_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = D_\mu \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K_{\mu}^{\bar{\mu}} . \quad \square$$

Im euklidischen Raum \mathbb{E}^3 ist wiederum der Riemannsche Krümmungstensor ${}^{\mathcal{N}} R_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\rho}} = 0$, so daß in diesem Fall folgt:

$$D_\nu K_{\mu}^{\rho} - D_\mu K_{\nu}^{\rho} = 0 , \quad (15.16.50)$$

$$D_\mu \mathcal{K} - D_{\bar{\mu}} K_{\mu}^{\bar{\mu}} = 0 . \quad (15.16.51)$$

16 Der Satz von Gauß-Bonnet

16.1 Pierre Ossian Bonnet (1819 - 1892)

Pierre Ossian Bonnet wurde 1819 in Montpellier geboren. Er studierte ab 1838 Ingenieurwissenschaften an der École Polytechnique und an der École des Ponts et des Chaussées in Paris. Nach seinem Studienabschluß lehnte er jedoch eine angebotene Ingenieurstelle ab und wurde 1844 Repetitor an der École Polytechnique, um seinen mathematischen Studien nachgehen zu können. In Anerkennung seiner ersten Publikationen erhielt Bonnet 1844 eine Assistentenstelle an der École Polytechnique. 1862 folgte die Aufnahme in die französische Académie des Sciences, 1871 wurde er Directeur d'Études an der École Polytechnique, 1878 Professor für Astronomie an der Sorbonne. Kurz nach 1883 wurde er aufgrund von Denunziationen all seiner Ämter enthoben. Bonnet war verheiratet, Vater von drei Söhnen und lebte ein bescheidenes und zurückgezogenes Leben. Er starb 1892 in Paris.

Bonnet veröffentlichte 1843 als seine erste Arbeit eine Untersuchung über Konvergenzkriterien bei unendlichen Reihen. Eine weitere Arbeit aus diesem Bereich wurde 1849 von der Brüsseler Akademie der Wissenschaften ausgezeichnet. Aber bereits im Jahr 1844 hatte Bonnet für sich die Differentialgeometrie entdeckt und publizierte 1848 seine erste Arbeit mit dem Titel "Sur quelques propriétés généraux des surfaces". In dieser Arbeit führte er den Begriff der geodätischen Krümmung und der Torsion ein und bewies den berühmten und heute nach ihm benannten Gauß-Bonnet Satz. Die Differentialgeometrie wurde für Bonnet lebenslang zu seinem liebsten und wichtigsten Forschungsthema, obwohl er daneben auch in den Gebieten der Kartographie, Algebra, Mechanik und der mathematischen Physik publizierte.

[Quellen: en.wikipedia: Pierre_Ossian_Bonnet, Pilet u. Struik (1970)].



Abbildung 16.1: P. O. Bonnet
unbekannt, PD.

[[http://de.wikipedia.org/wiki/
Pierre_Ossian_Bonnet](http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre_Ossian_Bonnet)]

16.2 Der Umlaufsatz von Hopf

Für den im Folgenden angeführten Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet benötigen wir den Umlaufsatz von Hopf. Wir orientieren uns an Spivak (1979), Bd. II, S. 26 ff., und Eschenburg u. Jost (2007), S. 24 und S. 212.

Zunächst definiert man den Begriff der Gesamtkrümmung $\bar{\kappa}$ einer Kurve $c(s)$ in \mathbb{E}^2 :

Definition 16.2.1 Sei $c : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in \mathbb{E}^2 und $\kappa(s)$ mit $s \in [s_0, s_1] \subseteq [a, b]$ die Krümmung entlang von c . Dann ist die Gesamtkrümmung definiert als

$$\bar{\kappa}(s_0, s_1) := \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds . \quad (16.2.1)$$

Durch Vorgabe der Krümmung $\kappa(s)$ und der Anfangswerte von Ort $p_0 = c(s_0)$ und Tangente $T_0 = c'(s_0)$ ist die Kurve $c(s)$ vollständig bestimmt, denn mit 10.1.8 und 10.1.10 folgt:

$$c''(s) = \kappa(s)N(s) = \kappa(s)Jc'(s) \quad \Leftrightarrow \quad T'(s) = \kappa(s)N(s) = \kappa(s)JT(s) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi(s_1) := \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds , \\ T(s_1) = c'(s_1) = T_0(\cos \varphi(s_1), \sin \varphi(s_1))^T , \text{ mit } |T_0| = 1 , \\ c(s) = p_0 + \int_{s_0}^s c'(s_1) ds_1 . \end{cases}$$

Beweis: Da die Kurve $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert sein soll, ist der Tangentialvektor $T(s) = c'(s)$ ein Einheitsvektor. Aus $|T| = 1$ folgt in \mathbb{E}^2 also, daß wir $T = T_0(\cos \varphi(s_1), \sin \varphi(s_1))^T$ mit $|T_0| = 1$ setzen können.

$$T'(s) = \kappa(s)JT(s) \quad \Rightarrow$$

$$T'(s) = T_0 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \varphi'(s) = \kappa(s)JT_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) \end{pmatrix} = \kappa(s)T_0 \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi'(s) = \kappa(s) \quad \Rightarrow \quad \varphi(s_1) := \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds . \quad \square$$

Damit ergibt sich für die Gesamtkrümmung

$$\bar{\kappa}(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds = \varphi(s_1) - \varphi(s_0) . \quad (16.2.2)$$

In \mathbb{E}^2 können Tangenten unverändert verschoben werden. Daher kann man die Tangenten $T(s_1)$ und $T(s_0)$ miteinander vergleichen, bzw. den Winkel zwischen ihnen bestimmen (den Außenwinkel, wenn $s_1 > s_0$):

$$\begin{aligned} \arccos \frac{\langle T(s_1) | T(s_0) \rangle}{\|T(s_1)\| \cdot \|T(s_0)\|} &= \arccos(\cos \varphi(s_1) \cos \varphi(s_0) + \sin \varphi(s_1) \sin \varphi(s_0)) \\ &= \arccos(\cos(\varphi(s_1) - \varphi(s_0))) = \varphi(s_1) - \varphi(s_0) . \end{aligned}$$

Weiter kann man problemlos eine Krümmung für stetige aber nicht differenzierbare Knickstellen von $c(s)$ an der Stelle s_0 mittels des Außenwinkels

$\varphi_A(s_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\varphi(s_0 + \epsilon) - \varphi(s_0 - \epsilon))$ definieren:

$$\kappa(s_0) := \delta(s - s_0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\varphi(s_0 + \epsilon) - \varphi(s_0 - \epsilon)) = \delta(s - s_0) \varphi_A(s_0) . \quad (16.2.3)$$

Definition 16.2.3 Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ heißt geschlossen, wenn $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$ gilt.

Eine nach Bogenlänge parametrisierte geschlossene Kurve $c : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ heißt einfach geschlossen, wenn c auf $[a, b]$ injektiv ist, d.h. wenn die Kurve sich nicht selbst schneidet.

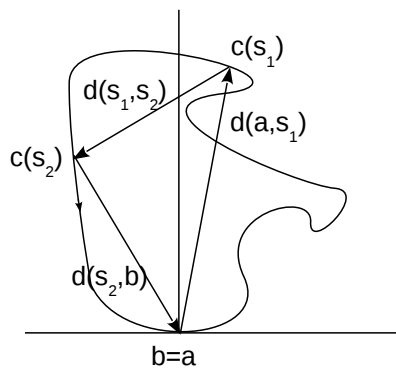


Abbildung 16.2: zum Umlaufsatz von Hopf

Satz 16.2.4 (Umlaufsatz von Hopf) Für eine einfach geschlossene Kurve in \mathbb{E}^2 ist die Gesamtkrümmung $\bar{\kappa}(a, b)$ bei einem einmaligen Umlauf gerade 2π .

Beweis: Habe die einfach geschlossene Kurve $c(s)$ in \mathbb{E}^2 als eine Funktion von x und y in einem $x - y$ Koordinatensystem ihr y -Minimum in dem Punkt $c(a) = c(b)$, so legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in diesen Punkt $c(a) = c(b) = (0, 0)$. Damit liegt $c(s)$ nicht unterhalb der x -Achse. Wir führen die Sekante $d(s_1, s_2)$ zwischen zwei Punkt $c(s_1)$ und $c(s_2)$ ein und den Einheitsvektor $d_0(s_1, s_2)$ im Punkt $c(s_1)$ in Richtung der Sekanten $d(s_1, s_2)$. Hierbei sei der Einheitsvektor im Punkt $(0, 0)$ in x -Richtung e_x .

$$d(s_1, s_2) := c(s_2) - c(s_1) , \quad d_0(s_1, s_2) := \frac{d(s_1, s_2)}{|d(s_1, s_2)|} ,$$

$$d_0(s, s) := c'(s) ,$$

$$d_0(a, a) = d_0(b, b) := e_x , \quad d_0(a, b) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_0(a + \epsilon, b) = -e_x .$$

Da $|d_0(s_1, s_2)| = 1$ können wir ohne Beschränkung schreiben

$$d_0(s_1, s_2) = d_{0c}(\cos \varphi_d(s_1, s_2), \sin \varphi_d(s_1, s_2))^T \quad \text{mit } |d_{0c}| = 1 .$$

Mit 16.2.2 ergibt sich für die Gesamtkrümmung von $c(s)$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(a, b) &= \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi_d(b, b) - \varphi_d(a, a) \\ &= \varphi_d(b, b) - \varphi_d(a, b) + \varphi_d(a, b) - \varphi_d(a, a) . \end{aligned}$$

Nun zeigt für $s \in [a, b]$ der Sekanten-Einheitsvektor $d_0(a, s)$ stets in die obere Halbebene und beschreibt einen Winkel von $d_0(a, a) = e_x$ bis zu $d_0(a, b) = -e_x$, also gerade π . Der Sekanten-Einheitsvektor $d_0(s, b)$ zeigt stets in die untere Halbebene und beschreibt einen Winkel von $d_0(a, b) = -e_x$ bis zu $d_0(b, b) = e_x$, also ebenfalls gerade π . Somit ist $\bar{\kappa}(a, b) = 2\pi$. \square

Jetzt stellt sich die Frage, ob man dieses Ergebnis des Hopfschen Umlaufsatzes von \mathbb{E}^2 auf eine 2-dimensionale Fläche in \mathbb{E}^3 verallgemeinern kann?

Korollar 16.2.6 *Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit in \mathbb{E}^3 , dann gilt auch hier der Umlaufsatz von Hopf.*

Beweis: Den Beweis führt man mit einem Homotopie-Argument unter der Voraussetzung, daß in dem Bereich $U \subseteq M \subset \mathbb{E}^3$, in dem die Kurve $c(s)$ liegt, die Riemannsche Metrik g regulär ist. Wenn g_0 die euklidische Metrik in \mathbb{E}^2 ist, dann führen wir eine stetige Deformation von g_0 in g durch:

$$g_t := t \cdot g + (1 - t) \cdot g_0 \quad t \in [0, 1] .$$

Nun kann die Gesamtkrümmung einer einfach geschlossenen Kurve nur ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, also $\bar{\kappa}(a, b) = 2\pi n$. Für die euklidische Metrik g_0 ist $n = 1$. Bei einer stetigen Deformation von g_0 über g_t zu g bleibt nun $n = 1$ erhalten. Dies gilt natürlich nur, solange g_t nicht für irgendeinen Wert von t eine Singularität hat. \square

Die Erweiterung des Hopfschen Umlaufsatzes auf eine 2-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit M in \mathbb{E}^3 kann insoweit als *intrinsisch* gelten, als ja nur von der Metrik g als einer *inneren Größe* von M Gebrauch gemacht wurde.

16.3 Der lokale Satz von Gauß-Bonnet

Gauß war dem später so genannten Satz von Gauß-Bonnet bereits nahe gekommen, wie seine 50 Jahre nach seinem Tod (1855) veröffentlichten Privataufzeichnungen gezeigt haben (siehe: Blaschke u. Reichardt (1960), S. 48-49). Aber Gauß hatte, wie es so häufig seine Gewohnheit gewesen war, zu diesem Thema nichts publiziert, weil er seine Überlegungen nach seinen eigenen Kriterien noch nicht für vollkommen und abgeschlossen hielt. So ist also dieser wichtige Satz zuerst von Bonnet im Jahr 1848 veröffentlicht worden. Der bedeutende österreichische Mathematiker Wilhelm Blaschke (1885-1962) führte dann um 1920 den Namen „Satz von Gauß-Bonnet“ ein.

Ein Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet mit einfachen Hilfsmitteln findet sich etwa in Eschenburg u. Jost (2007), S. 209 ff. Wir folgen hier jedoch einem Beweis von Spivak (1979), Bd. III, S. 386 ff. in der Sprache der Differentialformen von Élie Cartan. Cartans Darstellung ist auf natürliche Weise der *Integration auf Mannigfaltigkeiten* angepaßt und sein Begriff der *Zusammenhangsformen* läßt sich sehr schön auf Mannigfaltigkeiten von Lie-Gruppen verallgemeinern. Und die Theorie der *Prinzipalbündel (Hauptfaserbündel)* von Liegruppen über der Raumzeit ist ja die Grundlage der modernen physikalischen Eichtheorien.

Wir betrachten eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{E}^3$ mit einem Levi-Civita Zusammenhang und einer Gaußschen Krümmung K_G . Diese Krümmung $K_G = R^{12}_{12}$ ist die einzige unabhängigen Komponente des Riemannschen Krümmungstensors in 2 Dimensionen (bei einem Levi-Civita Zusammenhang). Weiter enthalte M eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subset M$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N , so daß $c : [a, b] \rightarrow \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist. Wir wählen ein orthonormales Koordinatensystem und damit sind die Strukturkonstanten $c_{ab}^c = 0$ (siehe 15.2.5).

Die Zusammenhang-1-Form ω^a_b in einer Orthonormalbasis $\{e_a\}$ transformiert sich beim Übergang zu einer anderen Orthonormalbasis $\{e'_a\}$ mit einer Matrix $\Lambda^a_b \in SO(2)$, siehe 15.10.12, bzw. 15.10.13:

$$\Lambda^a_b = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^{-1})^a_b = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$$

$$d\Lambda^a_b = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi.$$

In einer nichtholonomen Orthogonalbasis $\{e_a\}$ gilt $g^{ab} = \delta^{ab}$ und damit folgt:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^1_1 & \omega^1_2 \\ \omega^2_1 & \omega^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 \\ -\omega^1_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{mit } \omega^a_b = \omega_{ab} = -\omega_{ba} = -\omega^b_a .$$

Für die Basistransformation von $\{e_a\}$ nach $\{e'_a\}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \omega'^a_d &= \Lambda^a_b \omega^b_c (\Lambda^{-1})^c_d - (d\Lambda^a_c) (\Lambda^{-1})^c_d \quad \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega'^1_2 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 \\ -\omega^1_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \omega^1_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\omega^1_2 + d\varphi) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\omega'^1_2 = \omega^1_2 + d\varphi . \quad (16.3.1)$$

Sei jetzt $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Tangente $c'(s) = T(s)$. Da $c(s)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $|c'(s)| = |T(s)| = 1$. Dann hatten wir die geodätische Krümmung $\kappa_g(s)$ in 12.0.3 als die Projektion von $c''(s) = \frac{dT(s)}{ds}$ in die Tangentialebene von M am Punkt $c(s)$ definiert:

$$\kappa_g(s) := c''^T(s) = \left(\frac{dT(s)}{ds} \right)^T = \frac{\nabla T(s)}{ds} = \nabla_T T|_{c(s)} . \quad (16.3.2)$$

Aufgrund dieser Definition ist $\kappa_g(s)$ ein Vektor in der Tangentialebene von M , der senkrecht zur Tangente $T(s)$ am Punkt $c(s)$ steht. Wir wählen nun die Orientierung der Kurve $c(s)$ so, daß $T(s)$ und $\kappa_g(s)$ ein positiv orientiertes Koordinatensystem bilden und nennen die entsprechenden Einheitsvektoren $e'_1(s) = T(s)$ und $e'_2(s) = \kappa_g(s)/|\kappa_g(s)|$. Also gilt für den Betrag der geodätischen Krümmung (mit 15.5.6 und 15.9.1:

$$\begin{aligned} |\kappa_g(s)| &= \langle \nabla_{e'_1} e'_1 \mid e'_2 \rangle = \langle \omega'^{\gamma}_{11} e'_\gamma \mid e'_2 \rangle = \omega'^2_{11} \\ &= \omega'^2_{\alpha 1} \theta'^\alpha(e'_1) = \omega'^2_{11}(e'_1) = \omega'^2_{11}(c'(s)) . \end{aligned} \quad (16.3.3)$$

In Bezug auf unsere Standard-Orthonormalbasis $\{e_a\}$ ergibt sich mit 16.3.1 für die geodätische Krümmung:

$$\begin{aligned} |\kappa_g(s)| &= \omega'^2_{11}(c'(s)) = \omega^2_{11}(c'(s)) + d\varphi(c'(s)) \\ &= \omega^2_{11}(c'(s)) + \frac{d\varphi(c(s))}{ds} \end{aligned} \quad (16.3.4)$$

Satz 16.3.1 (Gauß-Bonnet-lokal) Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K_G und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF . M enthalte eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subset M$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N , so daß $c : [a, b] \rightarrow \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist und $|\kappa_g(s)|$ der Betrag der geodätischen Krümmung auf dem Rand, dann gilt:

$$\int_N K_G dF + \int_{\partial N} |\kappa_g(s)| ds = 2\pi . \quad (16.3.5)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_N K_G dF &= \int_N K_G \theta^1 \wedge \theta^2 = \int_N R^{12}_{12} \theta^1 \wedge \theta^2 = \int_N R^{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_N R^{1212} \theta^1 \wedge \theta^2 + \int_N R^{1221} \theta^2 \wedge \theta^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_N R^{12\gamma\delta} \theta^\gamma \wedge \theta^\delta = \int_N R^1_2 \\ &= \int_N d\omega^1_2 = - \int_N d\omega^2_1 = - \int_{\partial N} \omega^2_1 \\ &= - \int_a^b \omega^2_1(c'(s)) ds = - \int_a^b |\kappa_g(s)| ds + \int_a^b \frac{d\varphi(c(s))}{ds} ds \\ &= - \int_a^b |\kappa_g(s)| ds + \varphi(b) - \varphi(a) . \end{aligned}$$

Nach dem zuvor bewiesenen Umlaufsatz von Hopf ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ für $c(b) = c(a)$ und einen einmaligen Umlauf gerade 2π , und damit folgt:

$$\int_N K_G dF + \int_{\partial N} |\kappa_g(s)| ds = 2\pi . \quad \square$$

Korollar 16.3.3 Wenn sich die differenzierbare Kurve $c(s) = \partial N$ zusammensetzt aus n differenzierbaren Teilstücken ∂N_i und n stetigen, nicht differenzierbaren Knickstellen an den Stellen s_i , mit den Außenwinkeln $\varphi_A(s_i)$, $i \in 1 \dots n$, dann lautet die Gauß-Bonnet-Formel mit 16.2.3:

$$\int_N K_G dF + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds + \varphi_A(s_i) \right] = 2\pi, \quad \Rightarrow$$

$$\int_N K_G dF + \sum_{i=1}^n \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds = 2\pi - \sum_{i=1}^n \varphi_A(s_i), \quad (16.3.6)$$

bzw. mit den Innenwinkeln $\varphi_I(s_i) := (\pi - \varphi_A(s_i))$

$$\int_N K_G dF + \sum_{i=1}^n \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds = (2 - n)\pi + \sum_{i=1}^n \varphi_I(s_i). \quad (16.3.7)$$

Diese Gauß-Bonnet-Formel enthält als Spezialfälle viele der historisch früher gefundenen geometrischen Flächenformeln:

- Euklids Winkelsumme im ebenen Dreieck (8.2.4):

$$K_G = 0, \quad |\kappa_g(s)| = 0, \quad n = 3, \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \varphi_I(s_i) = \pi. \quad (16.3.8)$$

- Harriot und Girards Fläche von geodätisch sphärischen Dreiecken (9.0.3):

$$K_G = \frac{1}{r^2}, \quad |\kappa_g(s)| = 0, \quad n = 3, \quad \Rightarrow \frac{F}{r^2} + \sum_{i=1}^3 \varphi_A(s_i) = 2\pi. \quad (16.3.9)$$

- das Gaußsche *theorema elegantissimum*, d.h. die Fläche von geodätischen Dreiecken auf 2-dim. Flächen:

$$\int_N K_G dF = (2 - 3)\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_A(s_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_A(s_i) - \pi. \quad (16.3.10)$$

16.4 Der globale Satz von Gauß-Bonnet

Euler hatte für Polyeder in \mathbb{E}^3 seine berühmte Polyeder-Formel $\chi = e - k + f = 2$ gefunden (siehe 13.0.5). Hierbei bezeichnen e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten, f die Anzahl der Flächen und die Invariante χ heißt *Euler-Charakteristik*. Es zeigt sich nun, daß diese Euler Charakteristik eine topologische Invariante ist und mit dem Satz von Gauß-Bonnet eng zusammenhängt.

Es ist ein relativ schwierig zu beweisender Satz, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Überdeckung mit Simplexen (im 2-dim. also Dreiecken) gestattet, eine sog. Triangulierung. Für eine allgemeine Diskussion ohne Beweis siehe Spivak (1979), Bd. I, S. 579 ff.; für einen Beweis in \mathbb{R}^n siehe Bär (2010), S. 263 ff., und für einen Beweis in beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten siehe Munkres (1966), S. 69 ff. Wir setzen im Folgenden die Existenz einer Triangulierung der 2-dim. Fläche M voraus.

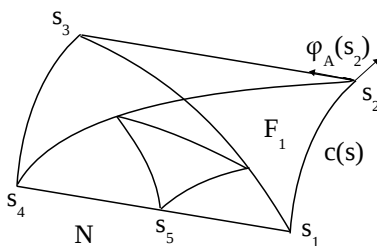


Abbildung 16.3: Triangulierung einer 2-dim. Fläche

Satz 16.4.1 (Gauß-Bonnet-global) Sei $M \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF . M enthalte eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $N \subseteq M$ mit der Euler-Charakteristik $\chi(N)$ mit einem zusammenhängenden Rand ∂N , so daß $c : [a, b] \rightarrow \partial N$ eine geschlossene, positiv orientierte Kurve in M ist und $|\kappa_g(s)|$ der Betrag der geodätischen Krümmung auf dem Rand mit e_R Knickpunkten, dann gilt:

$$\int_N K_G dF + \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds + \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) = 2\pi\chi(N). \tag{16.4.1}$$

Beweis: Die meisten Autoren, so auch Spivak (1979), Bd. III, S. 400 ff., erleichtern sich die Arbeit, indem sie diesen Satz nur für geschlossene, d.h. randlose, kompakte Flächen N beweisen. Wir wollen hier den allgemeinen Fall für eine Fläche N mit einem Rand ∂N beweisen (siehe auch do Carmo (1976), S. 268 ff.).

Sei f die Anzahl der Dreiecke der Triangulierung von N und $k = k_I + k_R$ die Summe von inneren und äußeren Kanten. Dann gilt $3f = 2k_I + k_R$, denn ein Dreieck hat 3 Kanten und die inneren Kanten werden beim Summieren über alle Dreiecke doppelt gezählt, da sie zwei Dreiecke beranden. Da der Rand geschlossen ist, gilt für die Randkanten und Randecken auch $k_R = e_R$.

Sei $\varphi_{I,mn}$ der n -te Innenwinkel des Dreiecks F_m , dann folgt aus 16.3.7:

$$\begin{aligned} \int_N K_G dF &= \sum_{m=1}^f \int_{F_m} K_G dF \\ &= - \sum_{m=1}^f \int_{\partial F_m} |\kappa_g(s)| ds + \sum_{m=1}^f \sum_{n=1}^3 \varphi_{I,mn} + \sum_{m=1}^f (2 - 3)\pi. \end{aligned}$$

Für alle inneren Kanten verschwindet die Summe über das Integral der geodätischen Krümmung, da jede innere Kante zweifach und mit entgegengesetzter Orientierung

durchlaufen wird. Wir numerieren die Flächen mit m und die Kanten mit m' und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^f \int_{\partial F_m} |\kappa_g(s)| ds &= \sum_{m'=1}^k \int_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)| ds \\ &= \sum_{m'=1}^{k_I} \int_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)| ds + \sum_{m'=1}^{k_R} \int_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)| ds = \\ &= \sum_{m'=1}^{k_R} \int_{\partial F_{m'}} |\kappa_g(s)| ds = \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds . \end{aligned}$$

Was ist nun mit der Summe über alle Innenwinkel? Wir formen die Summe über alle Dreiecke in eine Summe über alle Eckpunkte um. Dabei sei f_p die Anzahl der Dreiecksflächen, die im p -ten Eckpunkt zusammentreffen, $\tilde{\varphi}_{I,pq}$ der q -te Innenwinkel im p -ten Eckpunkt. Weiter unterscheiden wir zwischen inneren Eckpunkten und Rand-Eckpunkten $e = e_I + e_R$.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^f \sum_{n=1}^3 \varphi_{I,mn} &= \sum_{p=1}^e \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} \\ &= \sum_{p=1}^{e_I} \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} + \sum_{p=1}^{e_R} \sum_{q=1}^{f_p} \tilde{\varphi}_{I,pq} . \end{aligned}$$

An jedem inneren Eckpunkt summieren sich die Innenwinkel gerade zu 2π , an jedem Rand-Eckpunkt ist die Summe der Innenwinkel plus dem Außenwinkel $\varphi_A(s_p)$ plus π gerade gleich 2π :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^f \sum_{n=1}^3 \varphi_{I,mn} &= 2\pi e_I + 2\pi e_R - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) - \pi e_R \\ &= 2\pi e - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) - \pi k_R . \end{aligned}$$

Und damit folgt für das Integral über die Krümmung:

$$\begin{aligned} \int_N K_G dF &= - \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - \pi k_R - 3\pi f + 2\pi f \\ &= - \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - \pi k_R - \pi(2k_I + k_R) + 2\pi f \end{aligned}$$

$$= - \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds - \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) + 2\pi e - 2\pi k + 2\pi f \quad \Rightarrow$$

$$\int_N K_G dF + \sum_{i=1}^{e_R} \int_{\partial N_i} |\kappa_g(s)| ds + \sum_{i=1}^{e_R} \varphi_A(s_i) = 2\pi \chi(N) . \quad \square$$

Die Euler-Charakteristik $\chi(N)$ einer 2-dimensionalen, kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{E}^3$ wurde oben rein topologisch als $\chi(N) = e - k + f$ mit der Anzahl der Ecken e , Kanten k und Flächen f einer Triangulierung von N bestimmt. Poincaré hat nun 1895 bewiesen, daß diese Eulercharakteristik $\chi(N)$ gerade gleich der Summe der Indizes von isolierten Nullstellen eines tangentialen Vektorfeldes auf N ist. Dies ist nun ein höchst bemerkenswertes Ergebnis, denn ein Vektorfeld auf N ist ja ein differentialgeometrisches, bzw. analytisches Objekt. Hier zeigt sich also zum ersten Mal deutlich, wie ein *Indexsatz* die mathematischen Gebiete der Topologie und der Analysis verbindet!

Was ist der Index einer isolierten Nullstelle eines tangentialen Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit? Da die Nullstelle p_i des Vektorfeldes nach Voraussetzung isoliert ist kann man eine ϵ -Umgebung $D_i(\epsilon)$ um p_i legen, auf deren Rand das Vektorfeld nicht verschwindet. Wenn man jetzt im positiven Umlaufsinn auf dem Rand $\partial D_i(\epsilon)$ einmal die Nullstelle umläuft, so wird das Vektorfeld $k \in \mathbb{Z}$ Umläufe gemacht haben, und diese Zahl nennt man $\text{ind}(p_i) := k$, d.h. den Index des Vektorfeldes an der Stelle p_i . Mehr zu diesem Konzept findet sich im Kapitel 17.3.

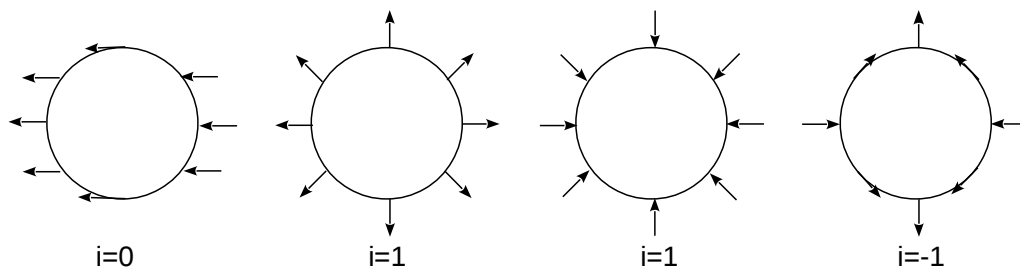


Abbildung 16.4: Beispiele von Indizes eines Vektorfeldes auf einer 2-dim. Fläche

Satz 16.4.3 (Poincaré) Sei $N \subset \mathbb{E}^3$ eine 2-dimensionale, orientierbare, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand mit einem Levi-Civita Zusammenhang, einer Gaußschen Krümmung K_G und einem 2-dimensionalen Flächenelement dF . Sei $X \in T_p N$ ein tangentiales Vektorfeld auf N mit den isolierten, endlich vielen Nullstellen p_i , $i = 1 \dots n$ mit den Indizes $\text{ind}(p_i)$, dann ist

$$\chi(N) = \sum_{i=1}^n \text{ind}(p_i) . \tag{16.4.2}$$

Beweis: Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand N sei kompakt und orientierbar. Da die Nullstellen des Vektorfeldes X nach Voraussetzung isoliert sind, kann es wegen der Kompaktheit nur endlich viele Nullstellen p_i , $i = 1 \dots n$, geben. Es soll jetzt $\int_N K_G dF$ mittels des Vektorfeldes X bestimmt werden. Wir wählen um jedes p_i herum eine ϵ -Umgebung $D_i(\epsilon)$.

Auf der abgeschlossenen Menge $N(\epsilon) := N - \cup_{i=1}^n \overset{\circ}{D}_i(\epsilon)$ ist $\|X\| \neq 0$, also kann man dort mit $X_1 := X/\|X\|$ ein Feld von Einheitsvektoren definieren und senkrecht dazu und positiv orientiert ein weiteres Feld von Einheitsvektoren X_2 . Die Vektorfelder X_1 und X_2 stellen also auf $N(\epsilon)$ eine Orthonormalbasis dar und bezüglich dieser Basis sei ω^2_1 die Zusammenhang-1-Form. Beim Beweis von 16.3.5 hatten wir für das Integral über die Gauß-Krümmung gefunden:

$$\int_{N(\epsilon)} K_G dF = \int_{N(\epsilon)} d\omega^1_2.$$

Mit dem Satz von Stokes wird daraus

$$\int_{N(\epsilon)} K_G dF = \int_{N(\epsilon)} d\omega^1_2 = \int_{\partial N(\epsilon)} \omega^1_2 = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega^1_2.$$

Jetzt können wir auf ganz N ein zusätzliches festes Orthonormalsystem $\{X'_1, X'_2\}$ einführen. Wenn der Winkel zwischen X'_1 und X_1 mit φ bezeichnet werde, dann hängen gemäß 16.3.1 die Zusammenhang-1-Formen folgendermaßen zusammen: $\omega'^1_2 = \omega^1_2 + d\varphi$. Aus der Sicht des Inneren von $D_i(\epsilon)$ kehrt sich eine von außen als positiv betrachtete Umlaufrichtung jedoch um, so daß wir $\omega'^1_2 = \omega^1_2 - d\varphi$ erhalten und damit:

$$\begin{aligned} \int_{N(\epsilon)} K_G dF &= \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega^1_2 = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\partial D_i(\epsilon)} d\varphi + \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega'^1_2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ 2\pi \cdot \text{ind}(p_i) + \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega'^1_2 \right\}. \end{aligned}$$

Da ω'^1_2 überall auf N fixiert ist, also auch im Innern von $D_i(\epsilon)$, können wir den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ problemlos durchführen und erhalten:

$$\int_N K_G dF = \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot \text{ind}(p_i). \quad (16.4.3)$$

Die Anwendung des globalen Satzes von Gauß-Bonnet im Fall einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit N ohne Rand (16.4.1) ergibt

$$\int_N K_G dF = 2\pi\chi(N)$$

und also ist $\chi(N) = \sum_{i=1}^n \text{ind}(p_i)$. □

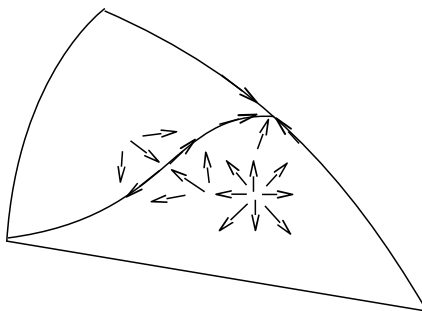


Abbildung 16.5: Konstruktion eines speziellen Vektorfeldes auf einer 2-dim. Fläche

Man kann nun mit dem Ergebnis 16.4.3 auch zurückschließen auf die topologische Definition der Euler-Charakteristik. Dazu trianguliert man die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und konstruiert ein Vektorfeld X , das in der Mitte jedes Dreiecks eine Quelle, in der Mitte jeder Kante einen Sattelpunkt und an jeder Ecke eine Senke hat (siehe Zeichnung). Die Indizes sind dann

$$\text{ind}(\text{Quelle}_i) = 1, \quad \text{ind}(\text{Sattelpunkt}_i) = -1, \quad \text{ind}(\text{Ecke}_i) = 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{ind}(p_i) &= \sum_{i=1}^e \text{ind}(\text{Ecke}_i) + \sum_{i=1}^k \text{ind}(\text{Sattelpunkt}_i) + \sum_{i=1}^f \text{ind}(\text{Quelle}_i) \\ &= e - k + f = \chi(N). \end{aligned} \tag{16.4.4}$$

17 Der Abbildungsgrad von Brouwer

17.1 Der Satz von Brouwer

Heute sind zwei recht gegensätzliche Darstellungen des Abbildungsgrades von Brouwer sehr verbreitet, der Zugang der nichtlinearen Funktionalanalysis, incl. der Verallgemeinerung von Leray-Schauder auf Banach-Räume (siehe etwa Růžička (2004), Deimling (1985), Zeidler (1986)) und der geometrisch-topologische Zugang. Dies ist natürlich ein Hinweis darauf, daß gewisse Teile der Funktionalanalysis und der geometrischen Topologie sehr eng miteinander verwandt sind. Explizit sichtbar wird diese innere Verbundenheit letztlich in den Indexsätzen zu elliptischen Pseudodifferential-Operatoren von Atiyah und Singer. Wir folgen hier dem geometrisch-topologischen Zugang zum Abbildungsgrad von Brouwer nach Milnor (1965), S. 27 ff. und Guillemin u. Pollack (1974), S. 188 ff. Für die Erweiterungen im Fall von Mannigfaltigkeiten mit Rand folgen wir Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 477 ff.

Das dünne Büchlein von Milnor (1965) mit dem Titel '*Topology from the Differentiable Viewpoint*' ist mit seinen nur 69 Seiten in seiner Eleganz ein kleines mathematisches Juwel! Allerdings bleiben für Anfänger bei Milnor (1965) doch einige Fragen offen und so haben Guillemin u. Pollack (1974) in ihrem Buch eine ausführlichere und manchmal leichter zugängliche Darstellung des gleichen Themas vorgelegt. Diese beiden Darstellungen waren für Jahrzehnte die Standardlektüre für alle Novizen im Gebiet der Differentialtopologie. Erst kürzlich hat der Autor dieser Arbeit das sehr schöne moderne Lehrbuch von Shastri (2011) entdeckt, das in seiner Ausführlichkeit und Klarheit insbesondere Anfängern sehr entgegenkommt und vermutlich für längere Zeit eine neue Standardlektüre werden dürfte.

Weil der Brouwersche Abbildungsgrad eine ganze Zahl ist, sprechen Physiker bei Anwendungen im Kontext der Quantentheorie auch von einer *topologischen Quantenzahl*.

Seien M und N zwei kompakte, orientierbare, m -dimensionale Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), $f : M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung, $\{\partial_{u^i}\}$, bzw. $\{\partial_{x^i}\}$ mit $i = 1, \dots, m$ lokale Koordinatensysteme von M , bzw. N , dann gilt für den Rücktransport einer k -Form ω eines Diffeomorphismus f nach 11.4.1

$$\int_{U \subset M} f^* \omega = \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial u^j})_{u_0 \in U} \int_{f(U) \subset N} \omega = \pm \int_{f(U) \subset N} \omega, \quad (17.1.1)$$

wobei sich das \pm darauf bezieht, ob f orientierungserhaltend ist oder nicht.

Brouwer hat nun die topologische Frage gestellt, wie sich bei geschlossenen (d.h. kompakten und randlosen) Mannigfaltigkeiten mit der Volumenform ω auf N und nichtinvertierbaren Abbildungen f die Volumenintegrale $\int_M f^* \omega$ und $\int_N \omega$ zueinander verhalten.

Der Satz von Brouwer basiert auf dem folgenden Lemma, das auch in anderen Zusammenhängen immer wieder hilfreich ist.

Lemma 17.1.1 *Seien M und N differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeiten und M der Rand einer kompakten Menge W , also $M = \partial W$. Wenn sich jetzt die C^∞ Funktion $f : M \rightarrow N$ zu einer C^∞ Funktion $F : W \rightarrow N$ auf ganz W erweitern läßt, dann verschwindet das Integral $\int_M f^* \omega$ für jede m -Form ω , und damit gilt für den im Folgenden durch $\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$ definierten Abbildungsgrad $\deg(f) = 0$.*

Beweis: Wir setzen hier das Ergebnis des *Whitneyschen Einbettungssatzes* voraus, der aussagt, daß jede m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{2m} eingebettet werden kann. Guillemin u. Pollack (1974) (S. 48 ff.) zeigen eine leichter beweisbare Fassung dieses schwierigen Satzes für die Einbettung von M in \mathbb{R}^{2m+1} .

Aufgrund dieser Einbettungsmöglichkeit von M dürfen wir also annehmen, daß M der Rand einer kompakten Menge $W \subset \mathbb{R}^{2m}$ ist, also $M = \partial W$. Wenn sich jetzt die C^∞ -Funktion $f : M \rightarrow N$ zu einer C^∞ -Funktion $F : W \rightarrow N$ auf ganz W erweitern läßt, dann verschwindet das Integral $\int_M f^* \omega$ für jede m -Form ω , denn mit dem Satz von Stokes folgt:

$$\int_M f^* \omega = \int_M F^* \omega = \int_{\partial W} F^* \omega = \int_W d(F^* \omega) = \int_W F^* d\omega = 0,$$

weil $d\omega$ ja eine $m + 1$ Form auf der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit N und damit Null ist. \square

Mit diesem Ergebnis läßt sich nun der wichtige Satz von Brouwer über den Abbildungsgrad von Funktionen beweisen.

Satz 17.1.3 (Brouwer) *Seien M und N zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) der Dimension m , seien $f : M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung und ω eine m -Form auf N , dann gilt*

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega \quad \text{mit} \quad \deg(f) \in \mathbb{Z}. \quad (17.1.2)$$

Sei $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \dots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w , dann ist der Abbildungsgrad $\deg(f)$ für alle Punkte $w \in N$ gleich und es gilt:

$$\deg(f) := \deg(f, w) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i}. \quad (17.1.3)$$

Wenn $f_0 : M \rightarrow N$, $f_1 : M \rightarrow N$ zwei homotope C^∞ -Funktionen sind, dann ist $\deg(f_0) = \deg(f_1)$.

Der Brouwersche Satz sagt also, daß sich global betrachtet die Mannigfaltigkeit M unter der Abbildung f stets ganzzahlig, nämlich mit $\deg(f)$, 'um N herumwickelt'. Wenn f ein globaler Diffeomorphismus ist, so ist $\deg(f)$ natürlich ± 1 , je nachdem, ob f die Orientierung erhält oder umkehrt. Dieser Brouwersche Satz ist ein höchst bemerkenswerter Satz und letztlich die Grundlage für viele Indexsätze!

Beweis: 1. Seien jetzt f_0 und f_1 zwei homotope C^∞ Abbildungen von $M \rightarrow N$, dann gilt

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega ,$$

denn wenn $F : I \times M \rightarrow N$ mit $I := [0, 1]$ und $F(0, p) := f_0(p)$ und $F(1, p) := f_1(p)$ eine Homotopie ist, dann folgt

$$\partial(I \times M) = (1 \times M) \cup (-0 \times M) = M_1 \cup (-M_0) .$$

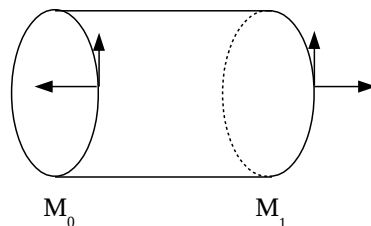


Abbildung 17.1: Definitionsbereich von $F : I \times M \rightarrow N$

Das Minuszeichen bei M_0 berücksichtigt hier die zu M_1 entgegengesetzte Orientierung der Basis (siehe Zeichnung).

$$\int_M F^* \omega = \int_{\partial(I \times M)} F^* \omega = \begin{cases} 0 & \text{wegen 17.1.1 ,} \\ \int_{M_1} F^* \omega - \int_{M_0} F^* \omega = \int_M f_1^* \omega - \int_M f_0^* \omega , \end{cases}$$

also ist

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega .$$

2. Wir setzen hier das Ergebnis des *Satzes von Sard* voraus. Dazu benötigen wir zunächst die Begriffe der *regulären Werte* und *regulären Punkte*. Ein Wert $w = f(v) \in N$ heißt genau dann ein *regulärer Wert*, wenn die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\}$ leer ist oder aus *regulären Punkten* besteht. Wenn $w \in N$ kein regulärer Wert ist, so heißt w ein *kritischer Wert*. Und ein Punkt $v \in M$ heißt genau dann ein *regulärer Punkt*, wenn

die Tangentialabbildung f_* von T_vM surjektiv auf $T_{f(v)}N$ abbildet. Wenn $v \in M$ kein regulärer Punkt ist, so heißt v ein *kritischer Punkt*.

Der Satz von Sard sagt nun, daß die regulären Werte einer hinreichend differenzierbaren Funktion f in N dicht liegen (für einen Beweis siehe z.B. Milnor (1965), S. 10 ff., Guillemin u. Pollack (1974), S. 39 ff.).

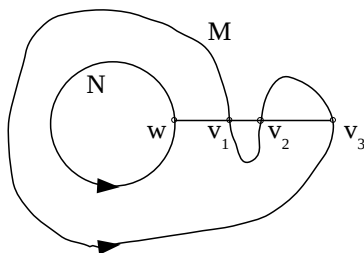


Abbildung 17.2: Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Aus diesem Satz von Sard können wir nun zusammen mit der Kompaktheit von M folgern, daß die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\} \subset M$ eines regulären Werts $w \in N$ nur aus endlich vielen Punkten $\{v_i\}$ besteht. Um einen Widerspruchsbeweis zu führen nehmen wir also an, daß die Urbildmenge $\{f^{-1}(w)\}$ aus unendlich vielen Punkten bestehe. Kompaktheit von M bedeutet, daß jede unendliche Folge aus $\{f^{-1}(w)\} \subset M$ eine konvergente Teilfolge $\{v_i\} \subset \{f^{-1}(w)\}$ enthält. Die v_i mögen also gegen $v_\infty \in \{f^{-1}(w)\}$ konvergieren. Dann ist v_∞ ein regulärer Punkt mit $f(v_\infty) = w$ und die Tangentialabbildung f_* an der Stelle v_∞ ist ein Isomorphismus. Aufgrund des Satzes über inverse Funktionen (siehe z.B. Guillemin u. Pollack (1974), S. 13 ff.) gibt es eine Umgebung $U_{v_\infty} \subset M$ um v_∞ herum, in welcher f ein Diffeomorphismus ist. Da nun aber die v_i gegen v_∞ konvergieren, gibt es in jeder Umgebung um v_∞ herum unendlich viele v_i , die ebenso wie v_∞ durch f auf w abgebildet werden und dies steht im Widerspruch dazu, daß f in U_{v_∞} ein Diffeomorphismus ist. Also enthält die Urbildmenge jedes regulären Wertes $w \in N$ nur endlich viele reguläre Punkte $\{v_i\} \subset M$.

3. Sei jetzt $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \dots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w . Dann gibt es nach 2. eine Umgebung $U_w \subset N$ um w , so daß alle Umgebungen $U_{v_i} \subset M$ mit $f(U_{v_i}) = U_w$ disjunkt sind und f auf jedem U_{v_i} ein Diffeomorphismus ist. Wenn nun ω eine m -Form auf N mit Träger (Support) $\text{supp}(\omega) = U_w$ ist, dann haben wir sofort eine lokale Version des Satzes von Brouwer:

$$\begin{aligned} \int_M f^* \omega &= \sum_{i=1}^k \int_{U_{v_i}} f^* \omega = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial w^j})_{U_{v_i}} \int_{U_w} \omega = \sum_{i=1}^k \text{sgn}(\det \frac{\partial f^i}{\partial w^j})_{v_i} \int_N \omega \\ &=: \text{deg}(f) \int_N \omega . \end{aligned}$$

4. Nun gilt es, dieses lokale Ergebnis auf ganz M und N auszudehnen. Hierzu kann man das sog. Homogenitäts-Lemma (Milnor (1965), S. 22 ff.), bzw. Isotopie-Lemma

(Guillemin u. Pollack (1974), S. 142 ff.), verwenden. Eine Homotopie überführt auf stetige Weise 2 Funktionen ineinander, eine Isotopie auf glatte und invertierbare Weise. Weil unsere Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^{2m} eingebettet sind, können wir ohne Einschränkung in $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{2m}$ arbeiten.

Die Aussage dieses Lemmas ist: Seien y und z zwei beliebige innere Punkte einer zusammenhängenden, differenzierbaren Mannigfaltigkeit N , dann gibt es einen Diffeomorphismus $h : N \rightarrow N$, der y in z überführt und der isotop zur identische Abbildung $\text{id} : N \rightarrow N$ ist.

Zum Beweis wird zunächst die folgende Funktion $h_t : N \rightarrow N$ konstruiert, die alle Punkte außerhalb einer $n - 1$ dimensionalen, offenen ϵ -Kugel S_ϵ mit $\epsilon > 0$ auf sich selbst abbildet, und den Punkt $y \in S_\epsilon$ in den Punkt $z \in S_\epsilon$ abbildet. Sei jetzt $x \in N$ und $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 \geq \epsilon^2, \\ \exp\left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2 - x^2}\right) & \text{für } x^2 < \epsilon^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \lim_{\substack{x^2 \rightarrow \epsilon^2 \\ x^2 < \epsilon^2}} \varphi(x) = 0.$$

Mit dieser Funktion φ können wir eine Funktion $h_t^{(0)}$ definieren, die den Ursprung von S_ϵ nach $z \in S_\epsilon$ abbildet und alle Punkte außerhalb von S_ϵ unverändert läßt:

$$h_t^{(0)}(x) := x + t\varphi(x) \cdot z, \quad \Rightarrow$$

$$h_0^{(0)}(x) = \text{id}(x) = x, \quad h_1^{(0)}(0) = z.$$

Damit ist $h_t^{(0)}$ eine Homotopie. Um die Invertierbarkeit von $h_t^{(0)}$ zu zeigen, verwenden wir in \mathbb{R}^n ein orthogonales Koordinatensystem $\{e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ und legen die e_1 -Achse durch Nullpunkt und den Punkt z . Damit erhalten wir für die e_1 -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x^1} h_t^{(0)}(x) = 1 + t \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z.$$

Nun ist $0 \leq t \leq 1$ und $\frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x)$ beschränkt. Wenn $\epsilon > 0$ entsprechend klein gewählt wird, dann ist

$$\left| t \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z \right| \leq \left| \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi(x) \cdot z \right| < 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^1} h_t^{(0)}(x) > 0,$$

und mit dem Satz über inverse Funktionen folgt die Existenz und Glattheit von $(h_t^{(0)})^{-1}$. Damit ist $h_t^{(0)}$ eine Isotopie.

Mit einer Anpassung der Koordinaten erhalten wir aus $h_t^{(0)}$ die Funktion h_t , die $y \in S_\epsilon$ nach $z \in S_\epsilon$ abbildet und alle Punkte außerhalb von S_ϵ unverändert läßt:

$$h_t(x) := x + t\varphi(x - y) \cdot (z - y), \quad \Rightarrow$$

$$h_0(x) = \text{id}(x) = x, \quad h_1(y) = z, \quad h_{t_2+t_1}(x) = h_{t_2} \circ h_{t_1}(x).$$

Die Funktion h_t überführt also einen beliebigen Punkt $y \in S_\epsilon$ in einen beliebigen anderen Punkt $z \in S_\epsilon$ und ist isotop zur Identität id .

Weil N zusammenhängend ist, können wir mit überlappenden S_{ϵ_i} Kugeln ganz N überdecken und so h_t auf ganz M fortsetzen. Diese Fortsetzung kann man, wie bei Homotopien üblich, folgendermaßen realisieren: Seien S_{ϵ_1} und S_{ϵ_2} zwei ϵ -Kugeln mit nichtleerem Durchschnitt $DS_{12} := S_{\epsilon_1} \cap S_{\epsilon_2}$ und $y \in S_{\epsilon_1} \setminus DS_{12}$, $z_1 \in DS_{12}$, $z_2 \in S_{\epsilon_2} \setminus DS_{12}$. Seien weiter $h_t^{(1)}$ eine Isotopie in S_{ϵ_1} und $h_t^{(2)}$ eine Isotopie in S_{ϵ_2} , mit $h_1^{(1)}(y) = z_1$ und $h_1^{(2)}(z_1) = z_2$, dann können wir eine zusammengesetzte Isotopie definieren, die y in z_2 überführt:

$$h_t^{(12)} := (h^{(2)} * h^{(1)})_t := \begin{cases} h_{2t}^{(1)} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_{2t-1}^{(2)} & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Damit ist

$$h_0^{(12)}(x) = h_0^{(1)}(x) = \text{id}(x) = x, \quad h_1^{(12)}(y) = h_1^{(2)}(h_1^{(1)}(y)) = h_1^{(2)}(z_1) = z_2.$$

Auf diese Weise können wir einen Diffeomorphismus h auf ganz N konstruieren, der einen beliebigen Punkt $y \in N$ in einen beliebigen anderen Punkt $z \in N$ überführt und isotop zur identischen Abbildung $\text{id} : N \rightarrow N$ ist.

5. Sei jetzt $w \in N$ ein regulärer Wert von f und $U_w \subset N$ eine Umgebung um w , für welche nach 3. der lokale Satz von Brouwer gilt. Dann gibt es nach 4. einen Diffeomorphismus h_t^k isotop zur identischen Abbildung id , der w in jeden beliebigen Punkt $z \in N$ überführt. Die Menge $\{h_1^i(U_w) \mid i \in \text{Indexmenge}\}$ ist eine Überdeckung von N mit offenen Mengen. Weil N kompakt ist, gibt es in $\{h_1^i(U_w) \mid i \in \text{Indexmenge}\}$ eine endliche Überdeckung von N , also $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$. Mittels einer *Zerlegung der Einheit* können wir jede Differentialform ω als eine endliche Summe von Differentialformen ω_i mit Träger auf $h_1^i(U_w)$ schreiben:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad \text{mit} \quad \text{supp}(\omega_i) = h_1^i(U_w) \quad \text{und} \quad \text{supp}((h_1^i)^* \omega_i) = U_w.$$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß wir wegen der Homotopie-Invarianz aus 2. die Integration von ω_i über $h_1^i(U_w)$ auf eine Integration von $(h_1^i)^* \omega_i$ über U_w zurückführen können und für diesen Fall die lokale Version des Satzes von Brouwer in 3. schon bewiesen haben:

$$\begin{aligned} \int_M f^* \omega_i &\stackrel{!}{=} \int_M (h_1^i \circ f)^* \omega_i = \int_M f^* (h_1^i)^* \omega_i \\ &= \text{deg}(f) \int_N (h_1^i)^* \omega_i = \text{deg}(f) \text{deg}(h_1^i) \int_N \omega_i. \end{aligned}$$

Nun ist $\deg(h_1^i) = 1$, da h_1^i ein Diffeomorphismus ist. Die Aufsummation über i liefert wegen der Linearität von f^* das gewünschte Ergebnis:

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega . \quad \square$$

Für eine zusammengesetzte Abbildung $f = g_2 \circ g_1 : M \rightarrow N_1 \rightarrow N_2$ gilt $\deg(f) = \deg(g_1) \cdot \deg(g_2)$, denn mit $w \in N_2$, $g_2^{-1}(w) = \{v_1, \dots, v_k\} \in N_1$ und $g_1^{-1}(v_i) = \{u_1, \dots, u_l\} \in M$ gilt

$$\int_M f^* \omega = \int_M (g_2 \circ g_1)^* \omega = \int_M g_1^*(g_2^* \omega) = \deg(g_1) \int_{N_1} (g_2^* \omega) = \deg(g_1) \cdot \deg(g_2) \int_{N_2} \omega .$$

Für die konstante Abbildung $f : M \rightarrow N$ mit $f(u) = w_0 = \text{const.}$ ist $\deg(f) = 0$, denn für alle $w \in N$ mit $w \neq w_0$ ist $f^{-1}(w) = \emptyset$.

Für die identische Abbildung $id : M \rightarrow M$ folgt sofort, daß $\deg(id) = 1$ ist, denn

$$\int_M \omega = \int_M (id)^* \omega = \deg(id) \int_M \omega .$$

Für die antipodale Abbildung

$(id^-) : S^m \rightarrow S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ mit $id^-(x) := -x = (x^1, \dots, x^{m+1})$ folgt

$$\deg(id^-) = \text{sgn}(\det \frac{\partial(-x^i)}{\partial x^j}) = (-1)^{m+1} .$$

Satz 17.1.5 (Igelsatz von Poincaré-Brouwer) *Auf der Sphäre S^m gibt es nur für ungerade m nicht verschwindende, glatte Tangential-Vektorfelder. Speziell für $m = 2$ heißt das: einen Igel, topologisch homöomorph zu S^2 , kann man nicht glatt und nullstellenfrei kämmen.*

Beweis: Sei $v(x) \in T_x S^m$ ein glattes, tangentiales Vektorfeld auf S^m ohne Nullstellen. Dann ist $\hat{v}(x) := v(x)/|v(x)|$ ein glattes, tangentiales, nicht verschwindendes Einheitsvektorfeld auf S^m . Zudem steht $\hat{v}(x)$ senkrecht auf x , d.h. $\langle \hat{v}(x) | x \rangle = 0$. Wir können nun eine Homotopie zwischen der identischen Abbildung id und der antipodalen Abbildung id^- auf S^m konstruieren:

$$h_t : S^m \times I \rightarrow S^m , \quad h_t(x) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\hat{v}(x) \quad \text{für } t \in [0, 1] ,$$

$$h_0(x) = x = id(x) , \quad h_1(x) = -x = id^-(x) .$$

Weil jetzt id und id^- homotop auf S^m sind, müssen sie den gleichen Abbildungsgrad haben. Das ist aber wegen $\deg(id^-) = (-1)^{m+1}$ nur dann der Fall, wenn m ungerade ist. Falls m gerade ist, muß also die Voraussetzung, daß $v(x)$ nullstellenfrei ist, falsch sein. □

Wenn man den obigen Beweis des Satzes von Brouwer im Detail nachvollzieht, dann sieht man, daß man diesen Satz leicht auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern kann. Sei jetzt $\bar{D} \subseteq M$ eine solche Mannigfaltigkeit mit dem Rand ∂D und $f(\bar{D}) \subseteq N$ das entsprechende Bild. Damit man den obigen Beweis des Satzes von Brouwer anwenden kann, muß man jetzt nur Sorge dafür tragen, daß der Punkt $w \in f(\bar{D})$, an welchem $\deg(f, w)$ bestimmt werden soll, kein Randpunkt ist, d.h. $w \notin f(\partial D)$, denn nur in diesem Fall existiert eine Umgebung $U_w \subset f(\bar{D})$, in welcher sich ein Diffeomorphismus zu den entsprechenden Umgebungen U_{v_i} der Urbildpunkte $\{v_1, \dots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ definieren läßt. Also gilt die folgende Erweiterung des Satzes von Brouwer:

Satz 17.1.7 *Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m , seien $f : M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung und ω eine m -Form auf N , dann gilt für reguläre Werte $w \in f(D)$, die nicht auf dem Rand liegen, d.h. $w \notin f(\partial D)$:*

$$\int_{\bar{D}} f^* \omega = \deg(f, D, w) \int_{f(\bar{D})} \omega \quad \text{mit} \quad \deg(f, D, w) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } w \notin f(\partial D). \quad (17.1.4)$$

Sei $w \in f(D)$ ein regulärer Wert von f und $\{v_1, \dots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ die Urbildmenge zu w , dann ist der Abbildungsgrad $\deg(f, D, w)$ für alle Punkte $w \in f(D)$ gleich und es gilt:

$$\deg(f, D, w) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i}. \quad (17.1.5)$$

Im Falle $w \notin f(\bar{D})$ definiert man $\deg(f, D, w) := 0$.

Anmerkung: Der Satz von Brouwer auf Mannigfaltigkeiten mit Rand wird häufig in der Analysis und Funktionalanalysis angewandt. In diesem Zusammenhang ist es natürlich sinnvoll, die Anforderungen an die Differenzierbarkeit so schwach als möglich vorauszusetzen. Da man beim Beweis des Satzes von Brouwer nur die einfache Differenzierbarkeit benötigt, kann man den Satz also für alle Funktionen $f \in C^0(\partial D) \cap C^1(D)$ verwenden. Man kann sogar jede stetige Funktion $f \in C^0(\bar{D})$ als Grenzwert von $C^0(\partial D) \cap C^1(D)$ Funktionen darstellen, ohne daß sich der Abbildungsgrad ändert (siehe z.B. Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 480 ff.).

Der nächste Satz zeigt, daß der Abbildungsgrad einer Funktion zwischen zwei berandeten m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten eindeutig von den Randwerten bestimmt wird.

Satz 17.1.8 *Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m , seien $f, g : M \rightarrow N$ zwei C^∞ Abbildungen, die auf ∂D übereinstimmen, und sei ω eine m -Form auf N , dann gilt für reguläre Werte $w \in f(D)$, die nicht auf dem Rand liegen, d.h.:*

$$w \notin f(\partial D) = g(\partial D) \quad \Rightarrow \quad \deg(f, D, w) = \deg(g, D, w). \quad (17.1.6)$$

Beweis: Wir setzen wieder das Ergebnis des *Whitneyschen Einbettungssatzes* voraus, der aussagt, daß jede m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{2m} eingebettet werden kann und konstruieren eine Homotopie $h_t : M \rightarrow N$ zwischen f und g :

$$h_t := tf + (1 - t)g, \quad t \in [0, 1].$$

Auf ∂D gilt $f = g = h_t$. Aus $w \notin f(\partial D)$ folgt also $w \notin h_t(\partial D)$ und also haben f und g als homotope Funktionen den gleichen Abbildungsgrad. \square

Wegen

$$\deg(f, D, w) = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(\det \frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{v_i}$$

addieren sich die Abbildungsgrade von zwei disjunkten Gebieten D_1 und D_2 , die auf ein zusammenhängendes Gebiet $f(D_1 \cup D_2)$ abgebildet werden:

$$\deg(f, D_1 \cup D_2, w) = \deg(f, D_1, w) + \deg(f, D_2, w).$$

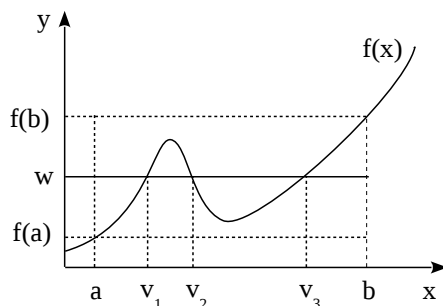


Abbildung 17.3: $\deg(f, [a, b], w) = 1$ einer Funktion f auf einem Gebiet mit Rand

Aus dem Satz von Brouwer für Mannigfaltigkeiten mit Rand lassen sich nun zahllose Existenzbeweise des folgenden Typs gewinnen: wenn w ein regulärer Wert von f ist mit $w \in f(D)$, $w \notin f(\partial D)$, $\deg(f, D, w) \neq 0$, dann ist die Urbildmenge $\{v_1, \dots, v_k\} = \{f^{-1}(w)\}$ zu w nicht leer, d.h. es existieren Lösungen der Gleichung $f(v) = w$.

Als ein Beispiel möge hier der Fixpunktsatz von Brouwer dienen.

Satz 17.1.10 (Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $f : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ eine stetige Abbildung der abgeschlossenen Kugel $\bar{B} \subset \mathbb{R}^m$ in sich selbst. Dann existiert mindestens ein Fixpunkt von f , d.h. ein $x \in \bar{B}$ mit $f(x) = x$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit möge der Mittelpunkt der Kugel \bar{B} im Ursprung liegen. Wenn f einen Fixpunkt auf dem Rand ∂B hat, sind wir fertig. Wenn f keinen Fixpunkt auf dem Rand ∂B hat, dann gilt $f(x) - x \neq 0$ für $x \in \partial B$. Wir konstruieren die folgende Homotopie $h_t : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$h_t(x) := x - tf(x), \quad t \in [0, 1].$$

Jetzt ist $h_t(x) \neq 0$ für $x \in \partial B$, denn für $t = 1$ gilt dies nach Voraussetzung und für $t < 1$ muß $tf(x)$ im Innern von \bar{B} liegen, also nicht auf dem Rand ∂B . Also gilt wegen der Homotopie-Invarianz des Abbildungsgrades

$$\deg(h_0, B, 0) = \begin{cases} \deg(x, B, 0) = 1, \\ \deg(h_1, B, 0) = \deg(x - f(x), B, 0). \end{cases} \quad \square$$

Damit existiert mindestens ein $x \in B$ mit $x - f(x) = 0$.

17.2 Die Windungszahl

Sei γ eine kompakte, orientierte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^2 , also eine geschlossene C^∞ -Kurve in \mathbb{R}^2 . Sei nun $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^∞ -Abbildung der Kurve γ und sei $z_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, der nicht auf $f(\gamma)$ liegt, d.h. $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\gamma)$. Wegen $z_0 \neq f(\gamma)$ können wir $f(u) - z_0$ mit $u \in \gamma$ auf S^1 abbilden. Dabei gehen wir zusätzlich noch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$ von $u = (x, y)$ zu Polarkoordinaten $\bar{u} = (\varphi, r)$ mit Nullpunkt z_0 über:

$$\hat{f} : \gamma \rightarrow S^1, \quad \hat{f}(\bar{u}) := \frac{f(\bar{u}) - z_0}{|f(\bar{u}) - z_0|} = \begin{pmatrix} \phi(\bar{u}) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17.2.1)$$

Wenn $d\phi$ jetzt das Differential auf S^1 bezeichnen möge, dann gilt für $\hat{f}^*d\phi$ auf γ :

$$\hat{f}^*d\phi \Big|_\gamma = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{S^1} d\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \Big|_{S^1} d\varphi. \quad (17.2.2)$$

Für das Wegintegral über γ folgt also einerseits

$$\int_\gamma \hat{f}^*d\phi = \int_\gamma \frac{\partial \phi(\varphi, r)}{\partial \varphi} d\varphi = \phi(\varphi_E, r_0) - \phi(\varphi_A, r_0) = m \cdot 2\pi, \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z},$$

wobei mit $u_{EA} = (\varphi_E, r_0) = (\varphi_A, r_0)$ der Anfangs- und der Endpunkt eines Umlaufs auf γ bezeichnet werde. Hierbei ist $m = 0$, wenn z_0 außerhalb der geschlossenen Kurve von γ liegt.

Andererseits folgt mit dem Satz von Brouwer:

$$\int_\gamma \hat{f}^*d\phi = \deg(\hat{f}, z_0) \cdot \int_{S^1} d\phi = \deg\left(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}\right) \cdot \int_{S^1} d\phi = \deg\left(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}\right) \cdot 2\pi.$$

Die Windungszahl der Abbildung f auf der Kurve γ in Bezug auf den Punkt z_0 ist jetzt definiert als:

$$W(f, z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \hat{f}^* d\phi \quad \Rightarrow \quad W(f, z_0) = \deg(\hat{f}, z_0) = \deg\left(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}, z_0\right). \quad (17.2.3)$$

Beispiel: Sei $z_0 = 0$, $\gamma = S^1$, $f(u) = (\phi, 1)^t = (m\varphi(u), 1)^t$, $m \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(u) = f(u)$, dann ist

$$\frac{\partial\phi(\varphi, r)}{\partial\varphi} = m, \quad \Rightarrow \quad W(f, z_0) = \deg(\hat{f}, z_0) = m. \quad (17.2.4) \quad \square$$

Dieser Begriff der Windungszahl kann jetzt auf höherdimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Wir folgen Guillemin u. Pollack (1974) (S. 144 ff.) und Katok u. Hasselblatt (2009) (S. 318 ff.).

Sei M eine kompakte, orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{m+1} . Sei nun $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ eine C^∞ -Abbildung der Mannigfaltigkeit M und sei $z_0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ ein Punkt, der nicht auf $f(M)$ liegt, d.h. $z_0 \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus f(M)$. Dann definiert man wie oben die Windungszahl der Abbildung f auf der Mannigfaltigkeit M in Bezug auf den Punkt z_0 als den Abbildungsgrad der Funktion \hat{f} :

$$\hat{f} : M \rightarrow S^m, \quad \hat{f}(u) := \frac{f(u) - z_0}{|f(u) - z_0|},$$

$$W(f, z_0) := \deg(\hat{f}, z_0) = \deg\left(\frac{f - z_0}{|f - z_0|}, z_0\right). \quad (17.2.5)$$

Sei jetzt M der Rand einer kompakten Menge $W \subset \mathbb{R}^{m+1}$, also $M = \partial W$. Wenn $z_0 \notin W$, dann definiert man wie in 17.1.7 $W(f, z_0) = 0$. Wenn andererseits $z_0 \in \overset{\circ}{W}$ und sich die C^∞ -Funktion \hat{f} auf ∂W zu einer C^∞ -Funktion \hat{F} auf ganz W fortsetzen läßt, dann ist nach 17.1.1 $W(f, z_0) = 0$. Interessant und von Null verschieden ist der Windungsgrad also gerade in den Fällen, in denen $F - z_0$, also die Fortsetzung von $f - z_0$ in $\overset{\circ}{W}$, eine Nullstelle hat, also z.B. bei Fixpunkt-Problemen $f(u) - u = 0$.

17.3 Der Kronecker-Index eines Vektorfeldes

Wir wollen hier das Konzept der Windungszahl auf die Behandlung von isolierten nichtentarteten Nullstellen $\{u_1, \dots, u_k\}$ von Vektorfeldern auf M anwenden, also $f : M \rightarrow \mathcal{T}_1^0(M)$ mit $f(u) \in T_u M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $f(u_i) = 0$. Wir folgen wieder Guillemin u. Pollack (1974) (S. 144 ff.) und Katok u. Hasselblatt (2009) (S. 318 ff.).

Sei $u_i \in M$ eine isolierte Nullstelle des Vektorfelds f . Dann kann man um u_i eine kleine Kugeloberfläche S_ϵ^m mit Mittelpunkt u_i und Radius ϵ legen. Auf dieser Oberfläche existiert

$$\hat{f} : S_\epsilon^m \rightarrow S^m, \quad \hat{f}(u) := \frac{f(u)}{|f(u)|}.$$

Im Zusammenhang mit isolierten nichtentarteten Nullstellen von Vektorfeldern spricht man nicht wie oben von der Windungszahl $W(f, 0)$, sondern vom Index, bzw. Kronecker-Index, $\text{ind}(f, u_i)$ des Vektorfelds f an der Stelle u_i :

$$\text{ind}(f, u_i) := \text{deg}(\hat{f}, 0) = \text{deg}\left(\frac{f}{|f|}, 0\right). \quad (17.3.1)$$

Satz 17.3.1 Für den Index eines Vektorfeldes $f : M \rightarrow \mathcal{T}_1^0(M)$ an einer isolierten nichtentarteten Nullstelle u_i gilt, wenn mit λ_j die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ bezeichnet werden:

$$\text{ind}(f, u_i) = \text{deg}(\hat{f}, 0) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right) = (-1)^{\text{card}\{j|\lambda_j < 0\}}. \quad (17.3.2)$$

Wenn das Vektorfeld $f : \bar{D} \subset M \rightarrow f(\bar{D}) \subseteq \mathcal{T}_1^0(M)$ nun k isolierte nichtentartete Nullstellen $\{u_1, \dots, u_k\} \subset D$ hat, so gilt

$$\text{deg}(\hat{f}, \partial D, 0) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(f, u_i) = \sum_{i=1}^k \text{sgn} \det \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right). \quad (17.3.3)$$

Beweis: 1. Wenn die Abbildung f linear ist, also $f(u) = Au$ mit einer $m+1$ dimensionalen Matrix A , dann ist auch $\hat{f} = \frac{Au}{|Au|}$ linear und man kann \hat{f} unverändert statt auf S_ϵ^m auch auf S^m definieren. Also können wir schreiben $\hat{f} : S^m \rightarrow S^m$, und das heißt $|u| = 1$. Da f an der Nullstelle u_i als nichtentartet vorausgesetzt wurde ist A invertierbar und es folgt:

$$\hat{f}(u) = \hat{f}(v) \quad \Rightarrow \quad Au = \lambda Av \quad \text{mit } \lambda := \frac{|Au|}{|Av|} > 0 \quad \Rightarrow \quad u = \lambda v,$$

und wegen $|u| = |v| = 1$ folgt $\lambda = +1$, d.h. $u = v$.

Also gilt $\hat{f}(u) = \hat{f}(v) \Rightarrow u = v$ und damit ist \hat{f} ein Diffeomorphismus von S^m nach S^m und damit ist $\text{deg}(\hat{f}, 0) = 1$ und damit

$$\text{ind}(f, u_i) = \text{deg}(\hat{f}, 0) = \text{sgn} \det A.$$

2. Wenn jetzt die Abbildung f nicht linear ist und die Ableitungen von f am Punkt u_i nicht verschwinden, so können wir f auf S_ϵ^m mit hinreichend kleinem ϵ linearisieren, d.h. durch $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ ersetzen und damit folgt sofort

$$\text{ind}(f, u_i) = \text{deg}(\hat{f}, 0) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right).$$

3. Der Index des Vektorfeldes $\text{ind}(f, u_i)$ wird durch die Anzahl der negativen Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ bestimmt, denn seien $\{\lambda_i, i \in 1, \dots, m+1\}$ die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{sgn det} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right) &= \text{sgn} \prod_{j=1}^{m+1} \lambda_j = \text{sgn} \prod_{\lambda_j > 0} \lambda_j \cdot \text{sgn} \prod_{\lambda_j < 0} \lambda_j \cdot \text{sgn} \prod_{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \lambda_j \\ &= (-1)^{\text{card}\{j | \lambda_j < 0\}}, \end{aligned}$$

da die komplexen Eigenwerte ja alle zusammen mit den jeweils konjugiert komplexen Eigenwerten vorkommen und $\lambda_j \cdot \lambda_j^* > 0$ ist.

4. Seien $\bar{D} \subseteq M$ und $f(\bar{D}) \subseteq N := \mathcal{T}_1^0(M)$ zwei differenzierbare, kompakte, einfach zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m , sei $f : \bar{D} \rightarrow f(\bar{D}) \subseteq N$ ein Vektorfeld mit k isolierten nichtentarteten Nullstellen $\{u_1, \dots, u_k\} \subset D$, und sei $w = 0 \notin f(\partial D)$. Wir legen jetzt um jedes u_i eine ϵ -Kugel $B_{i,\epsilon} \subset D$ mit der Kugeloberfläche $S_{i,\epsilon}^m$ und bilden die Menge $E := \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{i,\epsilon}$. Die Funktion $\hat{f} = \frac{f}{|f|}$ kann jetzt differenzierbar von ∂E auf ganz E ausgedehnt werden und also verschwindet wegen 17.1.1 ihr Abbildungsgrad auf ∂E . Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \text{deg}(\hat{f}, \partial E) = \text{deg}(\hat{f}, \partial D) - \text{deg}(\hat{f}, \partial \bigcup_{i=1}^k B_{i,\epsilon}) \\ &= \text{deg}(\hat{f}, \partial D) - \text{deg}(\hat{f}, \bigcup_{i=1}^k S_{i,\epsilon}) = \text{deg}(\hat{f}, \partial D) - \sum_{i=1}^k \text{deg}(\hat{f}, S_{i,\epsilon}) \\ &= \text{deg}(\hat{f}, \partial D) - \sum_{i=1}^k \text{ind}(f, u_i). \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\text{deg}(\hat{f}, \partial D, 0) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(f, u_i) = \sum_{i=1}^k \text{sgn det} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right). \quad \square$$

18 Anfänge der Homotopie und Fundamentalgruppen

18.1 Jules Henri Poincaré (1854 - 1912)

Henri Poincaré wurde 1854 als Sohn eines Medizinprofessors in Nancy geboren. Ab 1873 studierte er Mathematik an der École Polytechnique und der École des Mines in Paris. Danach arbeitete er zunächst als Bergbau-Ingenieur und anschließend als Mathematikdozent an der Universität Caen. Schon zwei Jahre nach seiner Dissertation wurde Poincaré im Jahr 1881 auf eine Professur für mathematische Physik an die Sorbonne in Paris berufen, wo er bis zu seinem Tod im Jahr 1912 verblieb. Seit 1887 war er Mitglied der Académie des Sciences, seit 1908 auch der Académie Française.

Poincarés Arbeiten umfassen mehr als 30 Bücher und viele wissenschaftliche Einzelpublikationen aus einem weiten Bereich der Mathematik und theoretischen Physik. Besonders bedeutend waren seine grundlegenden Beiträge zur kombinatorischen Topologie, Homotopie, Homologie, zu Differentialformen, automorphen Funktionen, n -Körper-Problemen, frühen Denkansätzen zur Morse-Theorie, symplektischen Geometrie, speziellen Relativitätstheorie und zum deterministischen Chaos. Für die Erkenntnistheorie wichtig war auch Poincarés Buch *Wissenschaft und Hypothese*.

Als Geburtsstunde der Topologie gilt Poincarés Artikel *Analysis Situs* aus dem Jahr 1895. Viele seiner dort formulierten Begriffe und Ergebnisse sind aus heutiger Sicht nicht rigoros genug, aber Poincarés Intuitionen und Gedanken waren in jeder Hinsicht außergewöhnlich und ihrer Zeit weit voraus. Wie tiefgründig seine Ideen waren, und wie schwer beweisbar, das zeigt sich etwa an dem erst im Jahr 2002 durch Grigori Perelman gelungenen Beweis der sog. Poincaré-Vermutung: „Jede einfach zusammenhängende,



Abbildung 18.1: J. H. Poincaré
E. Pirou (1887), PD.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré]

kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre S^3 ”.

[Quelle: en.wikipedia: Henri_Poincaré, Wikipedia-Poincaré-Vermutung (2015)]

18.2 Grundgedanken der Homotopie

Wir folgen hier Nakahara (2003) und Nash u. Sen (1983). Poincaré hat die Begriffe der Homotopie und der Fundamentalgruppe 1895 in seiner wegweisenden Arbeit *Analysis situs* eingeführt. Sein Ausgangspunkt war die Frage, wie man die Zusammenhänge-Verhältnisse in einem topologischen Raum klären kann?

Wir führen hier nur in die Grundgedanken der Homotopie und der Fundamentalgruppen π_1 ein, da wir diese Grundlagen später für die Diskussion der Universellen Überlagerungsgruppe von Liegruppen benötigen. Einige schöne physikalische Anwendungen der Homotopie-Gruppen zeigt Nakahara (2003), S. 153-168.

Die Homotopie-Gruppen sind sehr starke topologische Invarianten, allerdings sind die höheren Homotopiegruppen π_k mit $k > 1$ im allgemeinen äußerst schwierig zu berechnen. So sind z.B. bis heute die $\pi_k(S^2)$ nicht für alle $k \in \mathbb{N}$ bekannt. Dies ist der Grund dafür, daß in Räumen höherer Dimensionen häufig den Homologie- und Kohomologie-Gruppen der Vorzug vor den höheren Homotopie-Gruppen gegeben wird. Insbesondere gibt es algorithmische Verfahren zur Berechnung der höheren Homologie-Gruppen.

Wir setzen für das Folgende voraus, daß unsere topologischen Räume (fast immer) Hausdorff-Räume und wegzusammenhängend sind. Zur Erinnerung: ein topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte des Raums disjunkte offene Umgebungen existieren.

Definition 18.2.1 Sei X ein topologischer Raum und I ein Einheitsintervall $I := [0, 1] \in \mathbb{R}$. Dann heißt die stetige Abbildung $\alpha : I \rightarrow X$ ein Weg mit dem Anfangspunkt $\alpha(0) = x_0$ und dem Endpunkt $\alpha(1) = x_1$. Wenn der Anfangs- und der Endpunkt in $x_0 = x_1$ zusammenfallen spricht man von einer Schleife mit dem Basispunkt x_0 . Wenn $\epsilon(t) = x_0$ für alle $t \in I$ ist, spricht man von einem konstanten Weg $\epsilon_{x_0} = x_0$.

Auf der Menge solcher Wege kann man nun unschwierig eine Produktstruktur einführen:

Definition 18.2.2 Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ zwei Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$, dann kann man als Produkt die Verkettung der Wege definieren:

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (18.2.1)$$

Der zu $\alpha(t)$ inverse Weg wird dann als $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$ definiert.

Jetzt definiert man eine Homotopie zweier Wege relativ zu zwei festen, verschiedenen Endpunkten, wenn es eine stetige Abbildung gibt, welche die beiden Wege ineinander überführt:

Definition 18.2.3 Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ zwei Wege zwischen den Punkten x_0 und x_1 in X , dann heißt eine stetige Abbildung H , welche α in β überführt, eine Homotopie zwischen α und β relativ zu den Punkten x_0 und x_1 :

$$H : I \times I \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t), H(t, 1) = \beta(t) & \text{für alle } t \in I, \\ H(0, s) = x_0, H(1, s) = x_1 & \text{für alle } s \in I. \end{cases} \quad (18.2.2)$$

18.3 Fundamentalgruppen

Zwei Schleifen heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung gibt, welche die beiden Schleifen ineinander überführt:

Definition 18.3.1 Seien $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ zwei Schleifen mit Basispunkt x_0 in X , dann heißt eine stetige Abbildung H , welche α in β überführt, eine Homotopie zwischen α und β , und α und β heißen homotop:

$$H : I \times I \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \begin{cases} H(t, 0) = \alpha(t), H(t, 1) = \beta(t) & \text{für alle } t \in I, \\ H(0, s) = H(1, s) = x_0 & \text{für alle } t \in I. \end{cases} \quad (18.3.1)$$

Eine Homotopie zwischen zwei Schleifen $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ mit Basispunkt x_0 in X ist eine Äquivalenzrelation, kurz $\alpha \sim \beta$, denn es gilt

- Reflexivität: $\alpha \sim \alpha$,
- Symmetrie: $\alpha \sim \beta$, also $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$, wir definieren $H'(t, s) := H(t, 1 - s)$ und erhalten $H'(t, 0) = \beta(t)$, $H'(t, 1) = \alpha(t)$, also $\beta \sim \alpha$,
- Transitivität: $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, also $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$ und $H'(t, 0) = \beta(t)$, $H'(t, 1) = \gamma(t)$, dann kann man eine Homotopie zwischen α und γ folgendermaßen definieren:

$$H''(t, s) := \begin{cases} H(t, 2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ H'(t, 2s - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (18.3.2)$$

Diese Äquivalenzrelation führt zu Äquivalenzklassen. Zwischen den Wegen hatten wir eine Multiplikation definiert und daher kann man auch auf natürliche Weise eine Multiplikation auf den Äquivalenzklassen erklären:

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]. \quad (18.3.3)$$

Mit dieser Multiplikation hat die Menge der Äquivalenzklassen eine Gruppenstruktur mit dem neutralen Element $e_{x_0} := [\epsilon_{x_0}]$, denn

- die folgende Funktion $H(t, s)$ ist eine Homotopie zwischen $H(t, 0) = \alpha(t) * \epsilon_{x_0}$ und $H(t, 1) = \alpha(t)$

$$H(t, s) := \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{s+1}\right) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2}, \\ x_0 & \text{für } \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und damit folgt $[\alpha * \epsilon_{x_0}] = [\alpha] * [\epsilon_{x_0}] = [\alpha]$,

- ebenso ist die folgende Funktion $H(t, s)$ eine Homotopie zwischen $H(t, 0) = \alpha(t) * \alpha^{-1}(t)$ und $H(t, 1) = \alpha(0) = \epsilon_{x_0}$

$$H(t, s) := \begin{cases} \alpha(2t(1-s)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2(1-t)(1-s)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

und damit folgt $[\alpha * \alpha^{-1}] = [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [\epsilon_{x_0}] \Leftrightarrow [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$,

- weiter erfüllt diese Multiplikation auch das Assoziativitätsgesetz, denn wir können folgendermaßen eine Homotopie zwischen $[\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ und $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma]$ konstruieren:

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta) * \gamma(t) &= \begin{cases} \alpha * \beta(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \beta(4t-1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha * (\beta * \gamma)(t) &= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta * \gamma(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(4t-2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \gamma(4t-3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Eine Homotopie $H(t, s)$ zwischen diesen beiden Schleifen ist

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{s+1}\right) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ \beta(4t-s-1) & \text{für } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ \gamma\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right) & \text{für } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definition 18.3.2 Die Menge der Äquivalenzklassen der Schleifen mit Basispunkt x_0 in einem topologischen Raum X nennt man die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ heißt *trivial*, wenn für alle Punkte $x_0 \in X$ jede Schleife mit Basispunkt x_0 homotop zu x_0 ist (d.h. wenn die Schleife mit Basispunkt x_0 stetig nach x_0 zusammengezogen werden kann), wenn also gilt $\pi_1(X, x_0) = [\epsilon_{x_0}] = e_{x_0}$.

Satz 18.3.3 Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit $x_0, x_1 \in X$, dann sind die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph und man kann also von der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ sprechen.

Beweis: Sei $\gamma : I \rightarrow X$ ein Weg von x_0 nach x_1 , also $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$ und sei α eine Schleife mit Basispunkt x_0 . Dann ist $\alpha' = \gamma * \alpha * \gamma^{-1}$ eine Schleife mit Basispunkt x_1 . Dann ist

$$P_\gamma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \quad \text{mit} \quad P_\gamma([\alpha]) = [\alpha'] = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

ein Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} P_\gamma([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma] * [\alpha] * [\beta] * [\gamma^{-1}] = \\ &= [\gamma] * [\alpha] * [\gamma^{-1}] * [\gamma] * [\beta] * [\gamma^{-1}] = \\ &= P_\gamma([\alpha]) * P_\gamma([\beta]) . \end{aligned}$$

P_γ ist auch bijektiv und damit ein Isomorphismus, denn sei

$$Q_\gamma : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{mit} \quad Q_\gamma([\alpha']) = [\alpha] = [\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]$$

dann ist $Q_\gamma = P_\gamma^{-1}$, denn

$$\begin{aligned} Q_\gamma P_\gamma([\alpha]) &= Q_\gamma([\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]) = [\gamma^{-1} * \gamma * \alpha * \gamma^{-1} * \gamma] = [\alpha] , \\ P_\gamma Q_\gamma([\alpha']) &= P_\gamma([\gamma^{-1} * \alpha' * \gamma]) = [\gamma * \gamma^{-1} * \alpha' * \gamma * \gamma^{-1}] = [\alpha'] , \end{aligned}$$

und damit ist P_γ bijektiv. □

Die Homotopie von Wegen und Schleifen kann auf beliebige stetige Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen verallgemeinert werden:

Definition 18.3.5 *Seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen zwischen den topologischen Räumen X und Y . Wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ gibt, die f in g überführt, d.h. $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$, dann heißen f und g homotop zueinander, kurz $f \sim g$.*

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y mit $f(x) = y$. Dann induziert f einen Homomorphismus der entsprechenden Fundamentalgruppen $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, mit $f_*([\alpha]) := [f(\alpha)]$, denn seien α, β Schleifen in X mit Basispunkt x , dann sind $f(\alpha), f(\beta)$ Schleifen in Y mit Basispunkt y . Dann folgt wegen der Stetigkeit von f

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) &= [f(\alpha * \beta)] = [f(\alpha) * f(\beta)] = [f(\alpha)] * [f(\beta)] \\ &= f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) . \end{aligned} \tag{18.3.4}$$

Die Frage, wie zwei homotope, stetige Abbildungen $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ zusammenhängen, beantwortet das folgende Lemma.

Lemma 18.3.6 Seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ zwei homotope, stetige Abbildungen mit $f_i(x_0) = y_i$, $i \in \{1, 2\}$, und

$$f_{i*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_i)$$

die entsprechenden induzierten Homomorphismen, seien weiter α eine Schleife in X mit Basispunkt x_0 , und γ ein Weg in Y von y_1 nach y_2 , und P_γ der Isomorphismus zwischen $\pi_1(Y, y_1)$ und $\pi_1(Y, y_2)$, d.h.

$$P_\gamma : \pi_1(Y, y_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_2) \quad \text{mit} \quad P_\gamma([f_1(\alpha)]) = [\gamma * f_1(\alpha) * \gamma^{-1}],$$

dann gilt

$$f_{2*} = P_\gamma * f_{1*}. \quad (18.3.5)$$

Beweis: Sei $H : X \times I \rightarrow Y$ die Homotopie zwischen f_1 und f_2 . Dann betrachten wir die Homotopie $H(\alpha(t), s)$ zwischen den beiden Schleifen $f_1(\alpha(t))$ und $f_2(\alpha(t))$ in Y als eine Funktion

$$G : I \times I \rightarrow Y \quad \text{mit} \quad G(t, s) := H(\alpha(t), s).$$

Nun ist jede Schleife in $I \times I$ auf einen Punkt kontrahierbar und G ist stetig, also muß auch das Bild jeder Schleife in $I \times I$ unter G auf einen Punkt kontrahierbar sein, also homotop zum konstanten Weg in Y .

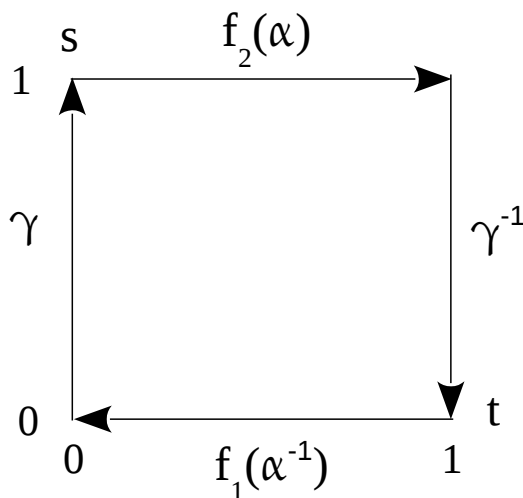


Abbildung 18.2: eine Schleife in $I \times I$, homotop zu einem Punkt

Also ist die folgende Schleife (siehe die obige Abb.) homotop zu ϵ_{y_2} :

$$f_2(\alpha) * \gamma * f_1(\alpha^{-1}) * \gamma^{-1} \sim \epsilon_{y_2} \quad \Rightarrow$$

$$[f_2(\alpha) * \gamma * f_1(\alpha^{-1}) * \gamma^{-1}] = e_{y_2} = e \quad \Rightarrow$$

$$[f_2(\alpha)] = [\gamma * f_1(\alpha) * \gamma^{-1}] = P_\gamma([f_1(\alpha)]) \quad \Rightarrow$$

$$f_{2*} = P_\gamma * f_{1*}.$$

□

Zwei topologische Räume X, Y sind homöomorph, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $f \circ g = Id_Y$ und $g \circ f = Id_X$ gibt. Diese Eigenschaft der Homöomorphie zwischen X und Y kann man nun abschwächen, indem man nur noch Homotopie verlangt.

Definition 18.3.8 *Zwei topologische Räume X, Y heißen vom gleichen Homotopie-Typ, wenn es stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $f \circ g \sim Id_Y$ und $g \circ f \sim Id_X$ gibt.*

Klarerweise sind homöomorphe Räume auch vom gleichen Homotopie-Typ, aber die Umkehrung gilt nicht. Zum Beispiel ist ein Punkt $\{x\}$ auf der reellen Linie \mathbb{R} vom gleichen Homotopie-Typ wie \mathbb{R} , aber natürlich nicht homöomorph zu \mathbb{R} .

Satz 18.3.9 *Seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume vom gleichen Homotopie-Typ, dann sind ihre Fundamentalgruppen isomorph zueinander.*

Beweis: Seien $g : X \rightarrow Y$ und $h : Y \rightarrow X$ zwei stetige Funktionen zwischen den topologischen Räumen X, Y vom gleichen Homotopie-Typ, dann gilt $g \circ h \sim Id_Y$. Mit dem obigen Lemma und $f_1 := Id_Y$ und $f_2 := g \circ h$ folgt

$$(g \circ h)_* = P_\gamma((Id_Y)_*) \Rightarrow g_* \circ h_* = P_\gamma(Id_{Y*}) .$$

Ebenso folgt mit $f_1 := Id_X$ und $f_2 := h \circ g$

$$(h \circ g)_* = P_\gamma^{-1}((Id_X)_*) \Rightarrow h_* \circ g_* = P_\gamma^{-1}(Id_{X*}) . \quad \square$$

Da P_γ ein Isomorphismus ist sind also auch $g_* \circ h_*$ und $h_* \circ g_*$ Isomorphismen, und damit sind auch f_* und g_* Isomorphismen, und d.h. $\pi_1(X, x_0)$ ist isomorph zu $\pi_1(Y, g(x_0))$.

Dies ist nun ein sehr wichtiger Satz, denn er sagt ja u.a., daß die Fundamentalgruppen invariant unter Homöomorphismen und damit topologische Invarianten sind!

Gelegentlich ist es interessant, einen topologischen Raum X auf einen Unterraum A stetig 'zusammenzuziehen'. Zwei Varianten kommen hier häufiger vor.

Definition 18.3.11 *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Unterraum, dann definiert man:*

1. *Retrakt: eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow A$ mit $f|_A = Id_A$ heißt ein Retrakt.*
2. *Deformationsretrakt: eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ zwischen Id_X und Id_A , d.h.*

$$H(x, 0) = x , \quad H(x, 1) \in A \quad \text{für alle } x \in X ,$$

$$H(a, s) = a , \quad \text{für alle } a \in A \subset X \text{ und alle } s \in I .$$

Sofern ein topologischer Raum triangulierbar ist, kann man die Fundamentalgruppe dieses Raums systematisch mittels der Fundamentalgruppe eines Polyeders bestimmen - siehe dazu etwa Nakahara (2003), S. 134 ff.

Wir wollen hier die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 , ein theoretisch wichtiges Beispiel, mithilfe der Methode der universellen Überlagerungsgruppe (siehe unten) bestimmen. Wir folgen der Ableitung von Nakahara (2003), S. 131 ff. Dabei betrachten wir \mathbb{R} als eine additive topologische Gruppe, und damit einen topologischen Raum, der zudem einfach wegzusammenhängend ist. Da man $S^1 \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ schreiben kann, ist \mathbb{R} die universelle Überlagerungsgruppe von S^1 .

Satz 18.3.12 *Die Fundamentalgruppe des Kreises S^1 ist isomorph zu \mathbb{Z} , kurz $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Da der Kreis wegzusammenhängend ist hängt die Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt ab.*

Klarer werden die Zusammenhänge des folgenden Beweises mit einem Bild.

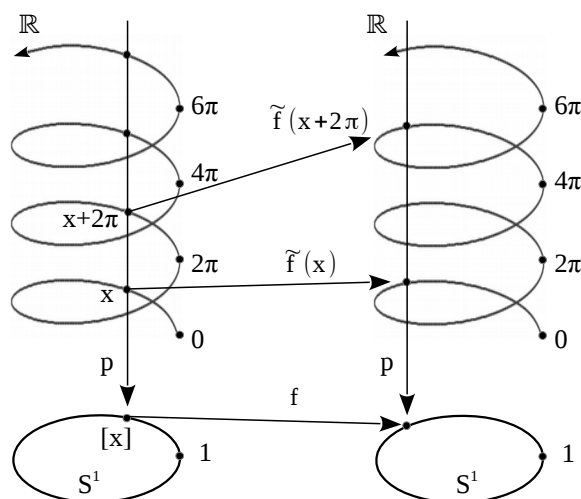


Abbildung 18.3: \mathbb{R} als universelle Überlagerungsgruppe von S^1

Beweis: Wir betrachten S^1 als Kreis in \mathbb{C} , also $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Die Projektion p von \mathbb{R} in S^1 definieren wir als $p(x) := \exp(ix)$. Wir nennen zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ äquivalent, $x \sim y$, wenn $x - y = 2\pi m \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt. Alle zu $x \in \mathbb{R}$ äquivalenten Punkte werden mittels p auf den Punkt $[x] \in S^1$ projiziert.

Um die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ zu bestimmen, möchte man Schleifen auf S^1 untersuchen. Zu diesem Zweck wählen wir den Umweg über die Überlagerungsgruppe \mathbb{R} und betrachten den Lift einer Schleife auf S^1 nach \mathbb{R} . Wir konstruieren also eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$. Die Abbildung zweier äquivalenter Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ unter \tilde{f} ist wiederum äquivalent, denn

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y + 2\pi m) - \tilde{f}(y) = \tilde{f}(y) + 2\pi mn - \tilde{f}(y) = 2\pi mn .$$

Wenn man nun $\tilde{f}(x)$ mittels p herunter auf S^1 projiziert, dann definiert der entstehende Punkt auf S^1 eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $f([x]) := p \circ \tilde{f}(x)$. Wegen $\tilde{f}(0) = 0$ ist $f(1) = 1$ fixiert. Wenn man umgekehrt eine Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $f(1) = 1$ vorgibt, dann ist der Lift $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(0) = 0$ und $\tilde{f}(x+2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ eindeutig bestimmt. Diese Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt $\deg(f)$, der Abbildungsgrad oder die Windungszahl der Funktion f , denn wenn $[x]$ den Kreis einmal umrundet, so umrundet $f([x])$ den Kreis n mal.

Die für die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ interessierenden Schleifen auf S^1 sind also gerade die Abbildungen $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit einer festen Windungszahl $\deg(f)$. Diese Schleifen weisen eine Gruppenstruktur auf, denn wenn $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ zwei Schleifen mit dem Lift $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\deg(f_1) = n_1$, $\deg(f_2) = n_2$ sind, dann gilt für das Produkt $f_1 * f_2$, d.h. die Hintereinanderausführung der Schleifen:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x + 2\pi) &:= \tilde{f}_1(x * 2\pi) + \tilde{f}_2(x * 2\pi) \\ &= \tilde{f}_1(x) + 2\pi n_1 + \tilde{f}_2(x) + 2\pi n_2 \\ &= \tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x) + 2\pi(n_1 + n_2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f_1 * f_2([x] + 2\pi) = p \circ (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x + 2\pi)) = p \circ (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2(x) + 2\pi(n_1 + n_2)) = f_1 * f_2([x]) ,$$

und damit $\deg(f_1 * f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$.

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ existiert auch eine Schleife $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $\deg(f) = n$, denn z.B. $\tilde{f}(x) := nx$ liefert gerade

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = n(x + 2\pi) = nx + 2\pi n = \tilde{f}(x) + 2\pi n \quad \Rightarrow \quad \deg(f) = n .$$

Weiter sind zwei Schleifen $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ genau dann homotop, wenn $\deg(f_1) = \deg(f_2)$ gilt, denn:

a) seien $\deg(f_1) = \deg(f_2) = n$ und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lifte von f_1, f_2 , dann ist $\tilde{F}(x, t) := t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_2(x)$ eine Homotopie zwischen \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 . Jetzt projiziert man diese Homotopie mittels p herunter auf S^1 :

$$\begin{aligned} F(x, t) &:= p \circ \tilde{F}(x, t) = \exp(i(t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_2(x))) \\ &= \exp(it\tilde{f}_1(x)) \cdot \exp(i(1-t)\tilde{f}_2(x)) = f_1([x])^t \cdot f_2([x])^{(1-t)} , \end{aligned}$$

mit $\deg(F(x, t)) = n$ und $f(x, 0) = f_2([x])$ und $f(x, 1) = f_1([x])$. Also ist $F(x, t)$ eine Homotopie zwischen f_1 und f_2 .

b) sei umgekehrt $F([x], t)$ eine Homotopie zwischen $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ mit $F(1, t) = 1$. Dann kann man diese Homotopie nach \mathbb{R} liften und erhält eine Homotopie $\tilde{F}(x, t)$ zwischen $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(0, t) = 0$ und $\tilde{F}(x + 2\pi, t) = \tilde{F}(x, t) + 2\pi n$. Also ist $\deg(F) = n$ und damit auch $\deg(f_1) = \deg(f_2) = n$.

Die verschiedenen Klassen der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1)$ bestehen damit aus den Schleifen $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit verschiedenem $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, also ist $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. \square

Mit der Fundamentalgruppe des Kreises kann man unschwer auch die Fundamentalgruppe eines Torus berechnen, denn:

Lemma 18.3.14 *Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume, dann gilt*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) . \quad (18.3.6)$$

Beweis: Seien $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ und $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ Projektoren auf X , bzw. Y . Wenn nun α eine Schleife in $X \times Y$ mit Basispunkt (x_0, y_0) ist, dann sind $\alpha_1 = p_1(\alpha)$ und $\alpha_2 = p_2(\alpha)$ Schleifen mit den Basispunkten x_0 , bzw. y_0 . Umgekehrt bestimmen zwei Schleifen α_1 und α_2 in X , bzw. Y , mit den Basispunkten x_0 , bzw. y_0 , eindeutig eine Schleife $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ in $X \times Y$ mit Basispunkt (x_0, y_0) . Nun kann man eine Abbildung der Schleifen-Klassen definieren

$$\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0) \quad \text{mit}$$

$$\varphi([\alpha]) := ([\alpha_1], [\alpha_2]) .$$

Da dieser Homomorphismus nach Konstruktion umkehrbar ist, stellt er also einen Isomorphismus dar. \square

Sei also z.B. $T^2 := S^1 \times S^1$ ein Torus, dann ist $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

Im Gegensatz zu S^1 ist die Fundamentalgruppe von S^n für $n \geq 2$ trivial. Dies ist eine sehr wichtige Aussage, die u.a. hilft, um für die in der Physik wichtige Gruppe $SU(2)$ nachzuweisen, daß diese einfach zusammenhängend ist. Für den Beweis soll hier die stereographische Projektion verwendet werden, die im folgenden Lema eingeführt wird.

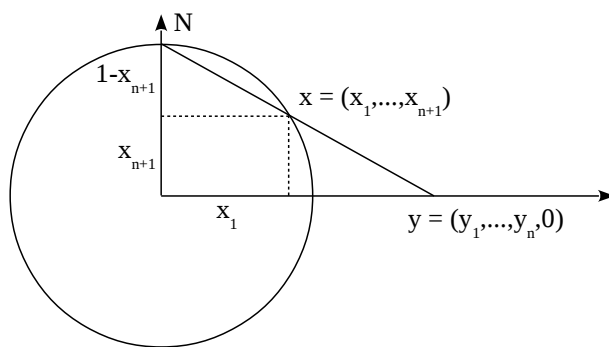


Abbildung 18.4: Stereographische Projektion von S^n nach \mathbb{R}^n :

$$x_1/(1 - x_{n+1}) = y_1/1 = y_1 .$$

Lemma 18.3.16 *Für alle $n \geq 0$ ist die Sphäre S^n , bei der der Nord- oder Südpol entfernt wurde, homöomorph zu \mathbb{R}^n .*

Beweis: Für die Sphäre $S^0 := \{+1, -1\}$ gilt $S^0 \setminus N = \{-1\}$ ist homöomorph zu \mathbb{R}^0 . Ebenso ist $S^1 \setminus N \simeq]0, 2\pi[$ homöomorph zu \mathbb{R} . Für $n \geq 2$ führen wir die stereographische Projektion von S^n nach \mathbb{R}^n ein:

$$f : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n). \quad (18.3.7)$$

Das heißt, ein Punkt $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \setminus N$ wird auf einen Punkt $y := (f(x), 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ abgebildet. Dieser Punkt y liegt gerade dort, wo die Gerade von N durch x auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ trifft. Jetzt sieht man unschwierig, daß die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus N \quad \text{mit} \quad g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1) \quad (18.3.8)$$

die Umkehrabbildung zu f ist, denn mit $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f(x))_1 &= \frac{2y_1(x)}{\|y(x)\|^2 + 1} = \frac{2x_1}{1 - x_{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1} \\ &= 2x_1 \frac{(1 - x_{n+1})}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} = 2x_1 \frac{(1 - x_{n+1})}{2 - 2x_{n+1}} = x_1, \\ (g \circ f(x))_{n+1} &= \frac{\|y(x)\|^2 - 1}{\|y(x)\|^2 + 1} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} - 1}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(1-x_{n+1})^2} + 1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + (1 - 2x_{n+1} + x_{n+1}^2)} = \frac{2x_{n+1} - 2x_{n+1}^2}{2 - 2x_{n+1}} = x_{n+1}. \\ (f \circ g(y))_1 &= \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}} = \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1 - (\|y\|^2 - 1)} = y_1. \end{aligned}$$

Also ist $S^1 \setminus N$ homöomorph zu \mathbb{R}^n . □

Satz 18.3.18 Die Einheitssphäre S^n ist für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend, mit anderen Worten, die Fundamentalgruppe von S^n ist für $n \geq 2$ trivial, d.h. $\pi_1(S^n) = [\epsilon] = e$. Da S^n für $n \geq 2$ wegzusammenhängend ist hängt die Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt ab.

Beweis: Zunächst scheint der Beweis dieses Satzes mittels des obigen Lemmas zur stereographischen Projektion recht trivial zu sein. Man nehme eine Schleife auf S^n , die zumindest einen Punkt von S^n nicht berührt, erkläre diesen Punkt zum Nordpol N und bilde mittels der stereographischen Projektion S^n homöomorph auf \mathbb{R}^n ab. Nun ist \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend und damit ist es der homöomorphe Raum S^n auch. Fertig.

Allerdings ist die Topologie immer wieder für Überraschungen gut. Die folgende Argumentation verdankt der Autor einer Vorlesung von Lee (2012). Im Jahr 1890 hat der italienische Mathematiker Guisepepe Peano eine stetige surjektive Abbildung von $f : I \rightarrow I \times I$ vorgestellt, welche den Namen *raumfüllende Kurve*, oder *Peano-Kurve* trägt. Das Quadrat $I \times I$ kann man nun homöomorph auf die Einheitsscheibe D abbilden und diese wiederum surjektiv auf S^2 abbilden. Also kann man eine Schleife als Peano-Kurve konstruieren, die ganz S^2 ausfüllt, so daß kein Punkt übrig bleibt, den man zum Nordpol erklären könnte. Das Entsprechende gilt natürlich auch für S^n .

In diesem Fall geht man so vor, daß man einfach einen beliebigen Punkt von S^n zum Nordpol N erklärt und alle Wegstücke der Schleife, welche durch N führen auf einem kleinen Wegintervall homotop verändert, so daß sie nicht mehr durch N gehen. Anschließend kann man wieder wie oben S^n homöomorph auf \mathbb{R}^n abbilden. Da die Fundamentalgruppe eines Raums nicht von einzelnen Schleifen abhängt, sondern nur von deren Homotopie-Klassen, gilt also auch für Schleifen von Peano-Kurven auf S^n , daß $\pi_1(S^n) = [\epsilon] = e$ ist, daß also S^n einfach zusammenhängend ist. \square

19 Das Konzept der Überlagerungsräume

19.1 Topologische Überlagerungsräume

Wir folgen Hausner u. Schwartz (1968), S. 12 ff. und dem schönen Buch über algebraische Topologie von Fulton (1995), S. 153 ff. Wir setzen für das Folgende wieder voraus, daß unsere topologischen Räume Hausdorff-Räume sind und wegzusammenhängend. Zur Erinnerung: ein topologischer Raum ist ein Hausdorff-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte des Raums disjunkte offene Umgebungen existieren.

Definition 19.1.1 Seien X, Y topologische Räume, dann heißt der Raum Y eine Überlagerung von X , wenn es eine stetige, surjektive Abbildung $p : Y \rightarrow X$, die sog. Überlagerungsabbildung oder Projektion, mit der Eigenschaft gibt, daß für alle Punkte $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ existiert, so daß $p^{-1}(U) \subset Y$ aus einer endlichen oder abzählbar unendlichen Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen U_α besteht, die (jede einzeln für sich) mittels p homöomorph auf U abgebildet werden.

Für ein $x \in X$ heißt die Menge der endlich oder abzählbar unendlich vielen Punkte $p^{-1}(x)$ die Faser von x und die offenen Mengen U_α heißen die Blätter.

Die Überlagerung Y heißt trivial, wenn $Y = X \times T$ mit einer Menge T mit diskreter Topologie ist.

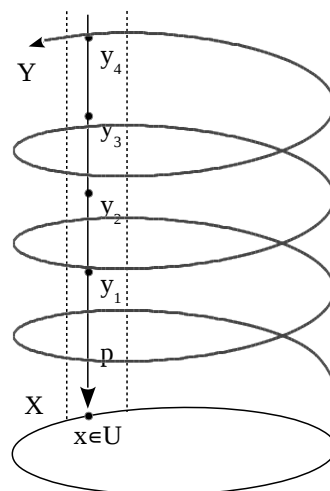


Abbildung 19.1: $Y = \mathbb{R}$ als Überlagerungsraum von $X = S^1$

Das obige Bild stellt nochmals das Beispiel des vorherigen Kapitels einer Überlagerung von S^1 durch \mathbb{R} dar.

Jetzt ist man an Wegen in X und ihren Liften in Y interessiert. Zunächst einmal wollen wir die Eindeutigkeit solcher Lifte zeigen.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Lemma 19.1.2 *Seien $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, Z ein zusammenhängender topologischer Raum, $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, und \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 zwei stetige Lifte von f , also $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Z \rightarrow Y$ mit $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$. Wenn $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ in einem Punkt $z \in Z$, dann gilt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ auf ganz Z .*

Beweis: Wir wollen zeigen, daß die Untermenge $Z_= \subset Z$ mit $z \in Z_=$, auf der \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 übereinstimmen, eine offene Menge ist. Seien $w \in Z_=$ und $x := p \circ \tilde{f}_1(w) = p \circ \tilde{f}_2(w)$ und U eine Umgebung von $x \in X$, so daß $p^{-1}(U) \subset Y$ aus einer Vereinigung paarweise disjunkter offener Mengen U_α besteht, die mittels p homöomorph auf U abgebildet werden. Sei nun V eine Umgebung von $w \in Z_=$, dann muß aufgrund der Stetigkeit von \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 dieses V in das gleiche U_{α_0} abgebildet werden. Da $p : U_{\alpha_0} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist und nach Voraussetzung $p \circ \tilde{f}_1(w') = p \circ \tilde{f}_2(w')$ gilt, muß $\tilde{f}_1(w') = \tilde{f}_2(w')$ für alle $w' \in V$ sein. Damit liegt also mit $w \in Z_=$ auch dessen Umgebung V in $Z_=$, also ist $Z_=$ offen.

Sei nun umgekehrt $w \in Z_\neq$, also ein Element der Menge auf welcher \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 nicht übereinstimmen und V eine Umgebung von $w \in Z_\neq$, dann wird V von \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 auf zwei verschiedene und damit disjunkte U_α abgebildet, und damit ist mit $w \in Z_\neq$ auch dessen Umgebung V in Z_\neq , also ist auch Z_\neq offen. Gleichzeitig muß aber Z_\neq als Komplement zu $Z_=$ abgeschlossen sein. Da $Z_=$ den Punkt z enthält ist also $Z_=$ nicht leer und also muß Z_\neq als gleichzeitig offene und abgeschlossene Menge leer sein, und damit ist $Z = Z_=$. \square

Lemma 19.1.4 *Seien $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $f : I \rightarrow X$ mit $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$ ein nicht notwendigerweise geschlossener Weg in X , $x_0 = f(0) \in X$ und $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$, dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f} : I \rightarrow Y$ des Wegs f , d.h. ein eindeutiges \tilde{f} mit $p \circ \tilde{f} = f$.*

Beweis: Das obige Lemma nutzt man nun mit $Z := I = [0, 1] \in \mathbb{R}$, um Pfade der Form $f : I \rightarrow X$ in Pfade $\tilde{f} : I \rightarrow Y$ des Überlagerungsraums Y zu liften, und erhält also die Eindeutigkeit eines solchen Lifts, wenn ein Punkt in Y vorgegeben ist. Die Existenz eines solchen Lifts folgt aus der Kompaktheit des Pfads $f(I) \subset X$, denn dadurch können wir den Pfad mit endlich vielen Umgebungen $U \subset X$ überdecken, und in jedem U stellt die Projektion p einen lokalen Homöomorphismus dar mit dem sich f nach \tilde{f} liften läßt. \square

Lemma 19.1.6 *Wenn zwei nicht notwendigerweise geschlossene Wege in X homotop sind, dann sind auch ihre Lifte in Y homotop.*

Beweis: Sei $H : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen f_1 und f_2 , also

$$H(t, 0) = f_1(t), \quad H(t, 1) = f_2(t), \quad H(0, s) = f_1(0) = f_2(0), \quad H(1, s) = f_1(1) = f_2(1),$$

dann kann man jeden Weg $H(t, s)$ mit festem s eindeutig in einen Weg $\tilde{H}(t, s)$ in Y liften. Den Parameterbereich von $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ kann man mit dem Kompaktheitsargument wieder mit endlich vielen Umgebungen überdecken, auf denen p einen lokalen Homöomorphismus darstellt und damit ist $\tilde{H}(t, s)$ eine stetige Funktion mit

$$\tilde{H}(t, 0) = \tilde{f}_1(t), \quad \tilde{H}(t, 1) = \tilde{f}_2(t), \quad \tilde{H}(0, s) = \tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0), \quad \tilde{H}(1, s) = \tilde{f}_1(1) = \tilde{f}_2(1),$$

mit $p \circ \tilde{H}(t, s) = H(t, s)$. □

Definition 19.1.8 *Seien $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0) \subset Y$ und $\pi_1(X)$ die Fundamentalgruppe von X . Nun kann man folgendermaßen eine transitive Operation auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ definieren: zu einem nicht notwendigerweise geschlossenen Pfad f in X mit $f(0) = x_0$ und $f(1) = x_1$ existiert ein eindeutiger Lift \tilde{f} mit $\tilde{f}(0) = y_0$, $\tilde{f}(1) = y_1$ und $p \circ \tilde{f} = f$, also insb. $p(y_1) = x_1$. Dann definiert man für $[f] \in \pi_1(X)$:*

$$y_0 * [f] := y_1.$$

Mit $e_{x_0} = [\epsilon_{x_0}]$ gilt $y_0 * e_{x_0} = y_0$ und es gilt die Transitivität $(y_0 * [f_1]) * [f_2] = y_0 * [f_1 * f_2]$. Wenn nun $y_1, y_2 \in Y$ über x_0 liegen, dann gibt es, da Y pfadzusammenhängend ist, einen Pfad \tilde{f} von y_1 nach y_2 und die Projektion dieses Pfades nach X ergibt einen geschlossenen Pfad f mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $f(0) = f(1) = x_0$.

Wenn X einfach zusammenhängend ist, also $\pi_1(X) = e$, dann folgt daraus sofort, daß $y_0 * e = y_0$ ist, d.h. die Faser $p^{-1}(x_0)$ besteht nur aus einem Blatt und damit ist p ein Homöomorphismus.

Lemma 19.1.9 *Seien $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ die Fundamentalgruppen von X, Y , dann ist die Abbildung $p_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ eine injektive Abbildung.*

$\pi_1(Y)$ ist isomorph zu einer Untergruppe $G \subset \pi_1(X)$, wobei G aus genau jenen Elementen $\alpha \in \pi_1(X)$ besteht, welche den Basispunkt $y_0 \in Y$ invariant lassen, d.h. $y_0 * \alpha = y_0$.

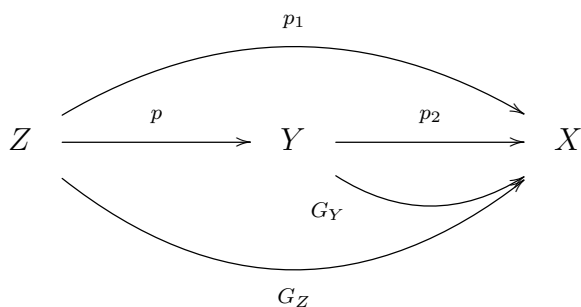
Beweis: Sei y_0 ein Basispunkt eines geschlossenen Pfades in Y über dem entsprechenden Basispunkt $x_0 \in X$. Sei $p_*[\tilde{f}_1] = p_*[\tilde{f}_2]$, dann ist nach Definition $[p \circ \tilde{f}_1] = [p \circ \tilde{f}_2]$, d.h. $p \circ \tilde{f}_1$ ist homotop zu $p \circ \tilde{f}_2$. Mit dem vorherigen Lemma sind dann auch die Lifte \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 homotop, d.h. $[\tilde{f}_1] = [\tilde{f}_2]$.

In der Umkehrung heißt das: $[\tilde{f}_1] \neq [\tilde{f}_2] \Rightarrow p_*[\tilde{f}_1] \neq p_*[\tilde{f}_2]$, also ist p_* injektiv.

Weiter folgt $G := p_*(\pi_1(Y))$. Da $\pi_1(Y)$ eine Fundamentalgruppe ist und injektiv auf $\pi_1(X)$ abgebildet wird, ist G eine Untergruppe von $\pi_1(X)$ und besteht gerade aus jenen Elementen $\alpha \in \pi_1(X)$, welche den Basispunkt $y_0 \in Y$ invariant lassen. □

Der folgende wichtige Satz klärt das Verhältnis verschiedener Überlagerungen eines topologischen Raums X und bereitet damit auch den Beweis der Eindeutigkeit von Überlagerungen mit der gleichen Fundamentalgruppe vor.

Satz 19.1.11 *Seien $p_1 : Z \rightarrow X$ und $p_2 : Y \rightarrow X$ zwei Überlagerungen von X . Es gibt genau dann eine eindeutige Überlagerungsabbildung $p : Z \rightarrow Y$ mit $p_1 = p_2 \circ p$, wenn für die entsprechenden projizierten Fundamentalgruppen $G_Z := p_{1*}(\pi_1(Z))$ und $G_Y := p_{2*}(\pi_1(Y))$ gilt $G_Z \subseteq G_Y$.*



Beweis: 1. Seien $p : Z \rightarrow Y$ und $p_2 : Y \rightarrow X$ Überlagerungen, dann ist auch $p_1 = p_2 \circ p : Z \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei f eine Schleife in X mit Basispunkt x_0 . Die Kurve können wir eindeutig in eine Kurve f_Y in Y mit Basispunkt y_0 liften, und diese wiederum eindeutig in eine Kurve f_Z in Z mit Basispunkt z_0 . Jetzt nehmen wir an, daß $[f] \in G_Z$ ist, dann folgt mit dem obigen Lemma, daß auch f_Z eine Schleife in Z ist, d.h. $z_0 * [f] = z_0$, und damit ist auch $p \circ f_Z = f_Y$ eine Schleife in Y , d.h. $y_0 * [f] = y_0$, und damit ist $[f] \in G_Y$, also $G_Z \subseteq G_Y$.

2. Seien umgekehrt $p_1 : Z \rightarrow X$ und $p_2 : Y \rightarrow X$ Überlagerungen und G_Z, G_Y Untergruppen von $\pi_1(X)$ mit $G_Z \subseteq G_Y$. Jetzt soll gezeigt werden, daß sich eine eindeutige Überlagerungsabbildung $p : Z \rightarrow Y$ definieren läßt. Seien z_0 der Basispunkt in Z und z_1 ein weiterer Punkt in Z und f_Z eine Kurve in Z , die z_0 mit z_1 verbindet. Dann projizieren wir diese Kurve f_Z mittels p_1 nach X und erhalten eine Kurve f in X , die den Basispunkt $x_0 := p_1(z_0)$ mit $x_1 := p_1(z_1)$ verbindet. Jetzt können wir die Kurve f in X eindeutig nach Y liften und erhalten eine Kurve f_Y , die den Basispunkt y_0 mit einem Punkt $y_1 \in Y$ über $x_1 \in X$ und unter $z_1 \in Z$ verbindet. Wir definieren die Projektion $p : Z \rightarrow Y$ als $p(z_1) := y_1$. Diese Definition hängt jetzt nicht vom speziellen Kurve f_Z ab, sondern nur vom Endpunkt, denn $[f_Z] \in G_Z \subseteq G_Y \subseteq \pi_1(X)$ impliziert $p(z_1) = y_0 * [f_Z]$. Diese Abbildung p ist stetig und erfüllt die Bedingung $p_1 = p_2 \circ p$. Da p_1 und p_2 Überlagerungen sind und $p = p_2^{-1} \circ p_1$ und $p^{-1} = p_1^{-1} \circ p_2$ in einer geeigneten Umgebung von y_1 gilt, ist also auch $p : Z \rightarrow Y$ eine Überlagerung. \square

Mit diesem Satz kann jetzt die Eindeutigkeit von Überlagerungen von X mit der gleichen Untergruppe G der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ gezeigt werden.

Lemma 19.1.13 *Seien $p_1 : Z \rightarrow X$ und $p_2 : Y \rightarrow X$ zwei Überlagerungen mit der gleichen Untergruppe $G_Z = G_Y = G \subseteq \pi_1(X)$ der Fundamentalgruppe von X , dann sind Z und Y homöomorph und für den Homöomorphismus $p : Z \rightarrow Y$ gilt $p_2 \circ p = p_1$.*

Beweis: Aufgrund des obigen Satzes gibt es eine Abbildung $p : Z \rightarrow Y$ mit $p_2 \circ p = p_1$. Zu zeigen ist, daß p tatsächlich ein Homöomorphismus ist, d.h. daß es über dem Basispunkt $y_0 \in Y$ nur einen Basispunkt $z_0 \in Z$ gibt. Wir nehmen nun an, daß es über $y_0 \in Y$ zwei Punkte $z_0, z_1 \in Z$ gäbe, die durch p auf $y_0 \in Y$ projiziert werden. Die Punkte z_0 und z_1 verbinden wir durch eine Kurve f_Z . Dann ist deren Projektion nach Y , die Kurve $f_Y = p \circ f_Z$ eine Schleife in Y , und deren Projektion nach X , die Kurve $f = p_1 \circ f_Z = p_2 \circ p \circ f_Z$ ist eine Schleife in X . Da f_Y gleichzeitig auch der eindeutige Lift von f nach Y ist, gilt $[f] = [p_1 \circ f_Z] \in G_Y = G$. Da nun aber auch $G_Z = G$ ist, so ist auch der Lift von f_Y nach Z geschlossen, also eine Schleife, und damit ist $z_0 = z_1$. \square

Nachdem nun also die Eindeutigkeit der Überlagerungen geklärt ist, soll jetzt die Existenz von Überlagerungen durch Konstruktion bewiesen werden.

Satz 19.1.15 *Sei X ein topologischer Raum mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ und sei G eine Untergruppe von $\pi_1(X)$. Dann gibt es eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$, so daß G isomorph zu $\pi_1(Y)$ ist, d.h. $G = p_*(\pi_1(Y))$.*

Beweis: Sei $x_0 \in X$ unser Basispunkt in X und $x \in X$ ein davon verschiedener Punkt. Dann definieren wir eine Äquivalenzrelation zwischen zwei verschiedenen Pfaden f_1, f_2 von x_0 nach x_1, x_2 :

$$(x_1, f_1) \sim (x_2, f_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } [f_1 * f_2^{-1}] \in G.$$

Wir schreiben die Äquivalenzklasse von (x, f) als $[x, f]$ und definieren Y als die Menge all dieser Äquivalenzklassen. Die Überlagerungsabbildung $p : Y \rightarrow X$ definiert man dann als $p([x, f]) := f(1) = x$. Jetzt gilt es zu zeigen, daß wir diesen Raum Y zu einem wegzusammenhängenden und lokal einfach zusammenhängenden Hausdorff-Raum machen können, dessen Fundamentalgruppe isomorph zu G ist. Zu diesem Zweck konstruieren wir eine offene Umgebung $\tilde{U}_{[f]}$ um (x, f) : sei $U \subset X$ eine offene einfach zusammenhängende Umgebung von $x \in X$ und $y \in U$ ein beliebiger Punkt und g ein Pfad von x nach y , dann liften wir diesen Pfad nach Y und erhalten

$$\tilde{U}_{[f]} := \{[y, f * g] \mid y \in U, f \text{ Pfad von } x_0 \text{ nach } x, g \text{ Pfad von } x \text{ nach } y\}.$$

Diese $\tilde{U}_{[f]}$ eignen sich tatsächlich als offene Umgebungen, denn aus $U_1 \subset U_2$ bei festem f folgt $\tilde{U}_{[f],1} \subset \tilde{U}_{[f],2}$, und wenn f_1 und f_2 zwei nichthomotope Pfade von x_0 nach x sind, dann ist nach Definition $\tilde{U}_{[f],1} \cap \tilde{U}_{[f],2} = \emptyset$. Mit diesen \tilde{U} als offenen Umgebungen wird Y zu einem topologischen Hausdorff-Raum. Weiter ist die Projektion $p : \tilde{U} \rightarrow U$ stetig, und sogar ein Homöomorphismus, denn:

- zu jedem Punkt $y \in U$ gibt es einen Pfad g von x nach y , und da U einfach zusammenhängend ist sind zwei verschiedene Pfade g_1 und g_2 von x nach y homotop und führen also zum gleichen Punkt $[y, f * g_1] = [y, f * g_2] \in \tilde{U}_{[f]}$, also existiert $p^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}_{[f]}$,
- und dieses p^{-1} auf U ist wegen $U_1 \subset U_2$ bei festem $f \Rightarrow \tilde{U}_1 \subset \tilde{U}_2$ auch stetig.

Die Projektion $p : \tilde{U} \rightarrow U$ ist tatsächlich eine Überlagerungsabbildung, weil $p^{-1}(U)$ zu einer abzählbaren Zahl offener $\tilde{U}_{[f]}$ gemäß der Äquivalenzklassen von f in G führt.

Der Pfad $f := f_1 * f_2^{-1}$ ist eine Schleife bzgl. des Basispunkts $x_0 \in X$ mit $[f] \in G$. Diese Schleife können wir eindeutig nach Y liften und erhalten eine Schleife $[\tilde{f}] \in \pi_1(Y)$ und damit ist $\pi_1(Y)$ isomorph zu G . \square

Dieses Ergebnis erlaubt jetzt die Definition des sog. Universellen Überlagerungsraums.

Definition 19.1.17 Sei X ein topologischer Raum mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ und sei $e_{x_0} = [\epsilon_{x_0}]$ das neutrale Element von $\pi_1(X)$. Dann heißt die Überlagerung $p : Y \rightarrow X$, so daß e_{x_0} isomorph zu $\pi_1(Y)$ ist, d.h. $e_{x_0} = p_*(\pi_1(Y))$, Universeller Überlagerungsraum. Da alle Schleifen in Y homöomorph zur trivialen Schleife sind, d.h. sich auf den nach Y gelifteten Punkt von x_0 zusammenziehen lassen, ist Y einfach zusammenhängend.

In der Physik verwendet man den Universellen Überlagerungsraum insbesondere im Zusammenhang mit Lie-Gruppen und spricht dort von der Universellen Überlagerungsgruppe. Lie-Gruppen haben ja neben ihrer Gruppenstruktur auch die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und sind also spezielle topologische Gruppen. Daher ist es sinnvoll, statt einer nicht einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe ihre einfach zusammenhängende Universelle Überlagerungsgruppe zu betrachten. Zum Beispiel ist $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe zu $SO(3)$.

Da die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe aus geometrischer Sicht einfach der Tangentialraum der Lie-Gruppe an der Stelle der Identität ist, stimmen die Lie-Algebren einer nicht einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe und ihrer Universellen Überlagerungsgruppe überein.

19.2 G -Räume und G -Überlagerungen

Sei X ein topologischer Raum (wie immer hier in diesem Kapitel ein Hausdorff-Raum) und G eine (topologische oder diskrete) Gruppe, deren Elemente von links als Homöomorphismen auf X wirken, d.h.

$$w : G \times X \rightarrow X \quad \text{mit} \quad w(g, x) \mapsto gx, \quad (19.2.1)$$

$$g(hx) = (gh)x \quad \text{und} \quad ex = x \quad \text{für} \quad g, h, e \in G, \quad eg = g, \quad x \in X,$$

dann heißt X ein G -Raum.

Zwei Punkte $x, x' \in X$ heißen im selben *Orbit*, wenn es ein Element $g \in G$ gibt mit $x' = gx$. Da G eine Gruppe ist, ist die Orbit-Beziehung eine Äquivalenzrelation und der Raum der Orbitale ist der Raum der Äquivalenzklassen $Y := X/G$.

Weiter kann man eine Projektion $p : X \rightarrow Y$ einführen, die jeden Punkt $x \in X$ in sein Orbital $[x] \in Y$ abbildet. Den Raum Y kann man mit der Quotiententopologie ausstatten, indem man $V \in Y$ als offen definiert, wenn $p^{-1}(V) \in X$ offen ist.

Im Folgenden betrachten wir nur sogenannte *freie* und *eigentlich diskontinuierliche* Wirkungen w der Gruppe G auf X . Eine Wirkung heißt *w* heißt *frei*, falls aus $gx = x$ für ein $x \in X$ folgt, dass g das neutrale Element $e \in G$ ist. Eine Wirkung w heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so daß $gU \cap U \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in G$ ist. Hieraus folgt, daß es für zwei verschiedene Elemente $g, h \in G$ eine Umgebung $U \subset X$ gibt, so daß gU und hU disjunkt sind.

Lemma 19.2.1 *Wenn eine Homöomorphismengruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich auf einen topologischen Raum X wirkt, dann ist die Projektion $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung.*

Beweis: 1. Die Abbildung p ist stetig. Wenn $U \subset X$ eine offene Umgebung in X ist, dann sind auch alle gU mit $g \in G$ offen und damit ist $p^{-1}(p(U)) = \{g'\}U$ mit $\{g'\} \subseteq G$ eine Vereinigung offener Mengen. Wenn U so gewählt wurde, daß es die Bedingung der Definition für freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkungen von G erfüllt, dann ist die Vereinigung der offenen Mengen von $p^{-1}(p(U))$ eine Vereinigung disjunkter offener Mengen.

2. Jetzt gilt es nur noch zu zeigen, daß für eine solche Umgebung U die Abbildung von jedem gU in $p(U)$ eine Bijektion ist. Da $x \in U$ und $gx \in gU$ im selben Orbit $[x]$ liegen, gilt $p(gx) = p(x)$ für alle $x \in U$ und somit werden alle Äquivalenzklassen von $p(U)$ erreicht und p ist surjektiv. Wenn andererseits für $x_1, x_2 \in U$ gilt $p(gx_1) = p(gx_2)$, dann gibt es ein Element $h \in G$ mit $hgx_1 = gx_2$, bzw. $(g^{-1}hg)x_1 = x_2$ und wegen der Bedingung der freien und eigentlich diskontinuierlichen Wirkung muß $g^{-1}hg = e$ und damit $x_1 = x_2$ sein. Oder in der Negation: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow p(gx_1) \neq p(gx_2)$ und damit ist p auch injektiv, insgesamt also bijektiv. \square

Natürlich stellt sich jetzt die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen der Gruppe G einer G -Überlagerung und den Fundamentalgruppen der beteiligten Räume gibt? Diese Frage beantwortet der folgende Satz sehr schön.

Satz 19.2.3 *Sei G eine Homöomorphismengruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X wirkt, sei $p : X \rightarrow X/G$ die entsprechende Überlagerung und $x_0 \in X$, dann gilt*

$$\frac{\pi_1(X/G, p(x_0))}{p_*(\pi_1(X, x_0))} \simeq G. \quad (19.2.2)$$

Beweis: Wir folgen (mit unseren Bezeichnungen) im wesentlichen dem Beweis von Wilkins (2008), Section 4, S. 42 ff.

Wir werden 1. eine surjektive Abbildung $\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ konstruieren, 2. zeigen, daß die Abbildung λ ein Homomorphismus ist, und 3. zeigen, daß der Kern von λ gerade $p_*(\pi_1(X, x_0))$ ist.

1. Sei $f : [0, 1] \rightarrow X/G$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0) = f(0) = f(1)$. Dann gibt es einen eindeutigen Lift $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow X$ in X mit $\tilde{f}(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{f} = f$. Nun gilt $p(\tilde{f}(0)) = f(0) = f(1) = p(\tilde{f}(1))$, also gehören $\tilde{f}(0)$ und $\tilde{f}(1)$ zur gleichen Äquivalenzklasse, d.h. dem gleichen Orbit, und infolgedessen gibt es ein Element $g \in G$ mit $\tilde{f}(1) = g\tilde{f}(0)$. Weil G frei und eigentlich diskontinuierlich auf X wirkt ist g eindeutig bestimmt. Sei nun $f_2 : [0, 1] \rightarrow X/G$ eine zweite Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0) = f_2(0) = f_2(1)$, dann ist auch für diesen Lift $\tilde{f}_2 : [0, 1] \rightarrow X$ wieder $\tilde{f}_2(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{f}_2 = f_2$. Wenn jetzt f und f_2 zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, d.h. wenn $[f] = [f_2] \in \pi_1(X/G, p(x_0))$, dann sind auch die Endpunkte der Lifte gleich, d.h. $\tilde{f}(1) = \tilde{f}_2(1)$. Also ist λ eine eindeutige Funktion von $[f]$, d.h.

$$\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(1) = g\tilde{f}(0) = \lambda([f])x_0 .$$

Diese Abbildung λ ist surjektiv, denn: sei $g \in G$, dann gibt es einen Weg \tilde{f} von x_0 nach gx_0 in X , da X wegzusammenhängend ist. Nun ist $f := p \circ \tilde{f}$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0)$ und $g = \lambda([f])$.

2. Seien $f_1 : [0, 1] \rightarrow X/G$ und $f_2 : [0, 1] \rightarrow X/G$ zwei Schleifen mit dem Basispunkt $p(x_0)$ in X/G , und seien $\tilde{f}_1 : [0, 1] \rightarrow X$ und $\tilde{f}_2 : [0, 1] \rightarrow X$ die eindeutigen Lifte von f_1 und f_2 mit dem Startpunkt $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_2(0) = x_0 \in X$. Dann gilt für die Endpunkte der Lifte $\tilde{f}_1(1) = \lambda([f_1])x_0$ und $\tilde{f}_2(1) = \lambda([f_2])x_0$. Da die Schleifen f_1 und f_2 im Punkt $p(x_0)$ beginnen und enden kann man die Schleifen auf die übliche Weise verketteten:

$$f_1 * f_2(t) := \begin{cases} f_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} , \\ f_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Nun gibt es auch einen eindeutigen Lift von f_2 mit Startpunkt $\tilde{f}_1(1) = p(x_0)$, nämlich $\lambda([f_1])\tilde{f}_2$, und damit können wir den verketteten Pfad $f_3 := f_1 * f_2$ nach X liften:

$$\tilde{f}_3(t) := \begin{cases} \tilde{f}_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} , \\ \lambda([f_1])\tilde{f}_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda([f_1] * [f_2])x_0 &= \lambda([f_1 * f_2])x_0 = \tilde{f}_3(1) = \lambda([f_1])\tilde{f}_2(1) \\ &= \lambda([f_1])\lambda([f_2])x_0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda([f_1] * [f_2]) = \lambda([f_1])\lambda([f_2]) ,$$

also ist λ ein Homomorphismus.

3. Jetzt soll der Kern der Abbildung λ bestimmt werden. Sei $f : [0, 1] \rightarrow X/G$ eine Schleife in X/G mit Basispunkt $p(x_0)$ und sei $[f] \in \ker \lambda$. Dann ist $\tilde{f}(1) = ex_0 = x_0$ und somit \tilde{f} eine Schleife in X mit Basispunkt x_0 , für welche gilt: $[f] = p_*(\tilde{f})$ und somit $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$. Sei umgekehrt $[f] \in p_*(\pi_1(X, x_0))$, dann ist gibt es eine Schleife \tilde{f}

mit $f = p \circ \tilde{f}$ zum Basispunkt $x_0 = \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \lambda([f])x_0$. Also ist $\lambda([f]) = e$ und somit $[f] \in \ker \lambda$. Damit ist $\ker \lambda = p_*(\pi_1(X, x_0))$.

Der Kern des surjektiven Homomorphismus $\lambda : \pi_1(X/G, p(x_0)) \rightarrow G$ kommutiert mit allen anderen Elementen von $\pi_1(X/G, p(x_0))$, ist also eine normale Untergruppe. Und damit ist die Gruppe $\pi_1(X/G, p(x_0))$ modulo $\ker \lambda$ isomorph zu G :

$$\frac{\pi_1(X/G, p(x_0))}{p_*(\pi_1(X, x_0))} \simeq G. \quad \square$$

Korollar 19.2.5 *Besonders häufig kommt der Fall vor, daß X die Universelle Überlagerung von X/G ist und in diesem Fall ist die Fundamentalgruppe von X trivial, so daß das einfache und schöne Ergebnis gilt:*

$$\pi_1(X/G, p(x_0)) \simeq G. \quad (19.2.3)$$

Ein Standardbeispiel ist der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dieser besteht aus der Menge aller Geraden durch den Ursprung und ist homöomorph zur Sphäre S^n , wenn man die Einheitsvektoren x und $-x$ aus \mathbb{R}^{n+1} miteinander identifiziert. Alternativ kann die Menge aller Geraden durch den Ursprung auch als homöomorph zum 'nördlichen' Teil der Sphäre S_+^n bei gleichzeitiger Identifikation der Punkte x und $-x$ auf dem Äquator von S_+^n betrachtet werden.

Nun sind S^n und S_+^n einfach zusammenhängend und $\mathbb{R}P^n \simeq S^n/\{+1, -1\} = S^n/\mathbb{Z}_2$, oder $\mathbb{R}P^n \simeq S_+^n/\{+1, -1\} = S_+^n/\mathbb{Z}_2$. Für $n \geq 2$ ist also S^n die Universelle Überlagerungsgruppe von $\mathbb{R}P^n$ und für dessen Fundamentalgruppe gilt $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Der Fall mit $n = 1$ ist separat zu betrachten, weil S^1 sich topologisch wesentlich von S^n mit $n \geq 2$ unterscheidet. Daher wählt man in diesem Fall die Definition $\mathbb{R}P^1 \simeq S_+^1/\{+1, -1\} = S_+^1/\mathbb{Z}_2$. Nun ist S_+^1 ein oberer Halbkreis und S_+^1/\mathbb{Z}_2 identifiziert die beiden Halbkreisenden miteinander, so daß $S_+^1/\mathbb{Z}_2 \simeq S^1$ ist. Wegen 18.3.12 folgt $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Lemma 19.2.6 *Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ ist für $n \geq 3$ homöomorph zum reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$, d.h. $SO(n) \simeq \mathbb{R}P^n$ und damit gilt auch $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.*

Für $n = 2$ ist $SO(2)$ diffeomorph zu S^1 , also gilt $SO(2) \simeq S^1$ und damit $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$.

Beweis: Zunächst soll der Fall $n \geq 3$ bewiesen werden.

a. Aus $\mathbb{R}P^n = S^n/\{+1, -1\}$ folgt, daß $\mathbb{R}P^n$ als der 'nördliche' Teil der Sphäre S^n betrachtet werden kann, bei welcher die gegenüberliegenden Punkte des 'Äquators' S^{n-1} miteinander identifiziert werden. Wir nennen den 'nördlichen' Teil der Sphäre ohne den 'Äquator' S_+^n und erhalten somit also $\mathbb{R}P^n \simeq S_+^n \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$. Nun ist der 'nördliche' Teil der Sphäre S_+^n homöomorph zur offenen 'Scheibe' $\overset{\circ}{D}^n$ und damit erhalten wir $\mathbb{R}P^n \simeq \overset{\circ}{D}^n \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$.

b. Jedes Element von $SO(n)$ kann als eine Rotation um einen Winkel θ mit $0 < \theta \leq \pi$ mit einem Einheitsvektor $n \in \mathbb{R}^n$ als Drehachse betrachtet werden. Man ordnet also jeder Drehung den Vektor $\Omega = \theta n$ zu und hat damit eine Abbildung von $SO(n)$ nach der Kugel $D^n := \{\Omega \mid 0 < |\Omega| \leq \pi\}$ konstruiert. Für $\theta < \pi$ ist diese Abbildung eindeutig, aber für $\theta = \pi$ gibt es eine Doppeldeutigkeit, denn πn und $\pi(-n)$ führen zum gleichen Punkt. Also identifiziert man diese beiden Punkte miteinander, oder anders gesagt, alle einander gegenüberliegenden Punkte auf der Kugeloberfläche S^{n-1} der Kugel D^n werden miteinander identifiziert, also $SO(n) \simeq \overset{\circ}{D}^n \cup (S^{n-1}/\{+1, -1\})$.

c. Also ist $\mathbb{R}P^n \simeq SO(n)$ und $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$.

Zum Schluß soll noch der Fall mit $n = 2$ betrachtet werden. Es gibt einen Diffeomorphismus $SO(2) \rightarrow S^1$, und zwar

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta .$$

Also gilt $SO(2) \simeq S^1$ und damit folgt $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$. □

In der Physik sehr häufig vorkommende G -Überlagerungen sind jene mit der Gruppe $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \{+1, -1\}$, z.B. ist $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ - siehe Kapitel 26.6

20 Simpliziale Homologie

20.1 Grundgedanken der Homologie

Das ganze 19. Jahrhundert hindurch haben zahlreiche Mathematiker versucht, Eulers Polyederformel (13.0.1) tiefer zu verstehen und zu verallgemeinern. Aus diesem Bemühen entstand die Topologie. Frühe Gedanken zum topologischen Teilgebiet der Homologie finden sich bereits in einer Arbeit von Enrico Betti aus dem Jahr 1871, aber erst Poincaré hat dieses Thema ab 1900 ausführlicher studiert. Dabei standen zunächst die *Betti-Zahlen* und *Torsions-Koeffizienten* von *simplizialen Komplexen* im Vordergrund. Erst etwa ab dem Jahr 1920 wurde der abstraktere Gesichtspunkt der *Homologie-Gruppen* von simplizialen Komplexen durch Emmy Noether und unabhängig von Walther Mayer und Leopold Vietoris entwickelt. Und dann dauerte es nochmals bis zum Jahr 1944, bis Eilenberg die endgültige Definition der *singulären Homologie* vorlegte.

Heute ist der Name *Homologie* ein Oberbegriff für zahlreiche mathematische Theorien, die topologischen Räumen abelsche Gruppen zuordnen und üblicherweise über die *Eilenberg-Steenrod-Axiome* (siehe Eilenberg u. Steenrod (1952)) und deren modernere Erweiterungen definiert werden.

Wir beschränken uns hier auf einen allereinfachsten Zugang und beschreiben nur kurz die simpliziale Homologie, die Bettizahlen und die Euler-Charakteristik. Dabei folgen wir im Prinzip dem Programm von Nash u. Sen (1983) und Nakahara (2003), greifen aber für tiefergehende Aspekte und Details recht häufig auf die schöne Darstellung „Algebraische Topologie“ von Stöcker u. Zieschang (1994) zurück. Das darauf folgenden Kapitel über singuläre Homologie gibt einen ersten Eindruck über einige typische Methoden und Ergebnisse der algebraischen Topologie - die auch im Kapitel über Kohomologie für den Beweis des Satzes von de Rahm benötigt werden.

Der Grundgedanke der Homologie ist es, topologische Räume anhand ihrer 'Löcher' unterschiedlicher Dimensionen zu klassifizieren. Betrachten wir etwa ein gefülltes und ein leeres Dreieck in \mathbb{R}^2 als zwei verschiedene topologische Räume und nennen die Dreiecksseiten eine *geschlossene 1-Kette*, oder einen *1-Zyklus*, dann ist im Fall des gefüllten Dreiecks der 1-Zyklus zugleich eine *berandende Kette*, oder *Randkette*, im Fall des leeren Dreiecks ist der 1-Zyklus aber keine Randkette. Wir erkennen also das 'Loch' im leeren Dreieck daran, daß es einen 1-Zyklus gibt, der keine Randkette ist.

20.2 Simplexe

Ein Simplex ist eine höherdimensionale Verallgemeinerung eines Dreiecks in \mathbb{R}^m und damit ein Baustein eines konvexen Polyeders. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^m$ heißt konvex, wenn mit zwei Punkten $p_0, p_1 \in X$ auch alle Punkte der Verbindungsstrecke $\overline{p_0 p_1} := \{p \mid p = (1-t)p_0 + tp_1, 0 \leq t \leq 1\}$ in X liegen.

Lemma 20.2.1 *Wenn $X \subset \mathbb{R}^m$ konvex und kompakt und nicht leer ist, dann ist X homöomorph zu einer m -dimensionalen Kugel (Ball) B^m und der Rand ∂X homöomorph zu einer $(m-1)$ -dimensionalen Kugeloberfläche (Sphäre) S^{m-1} .*

Beweis: Sei $p_0 \in \overset{\circ}{X}$, $p_\partial \in \partial X$, dann ist wegen der Konvexität von X der Punkt p_∂ der einzige Randpunkt auf der Strecke $\overline{p_0 p_\partial}$. Dann ist die Funktion

$$f : \partial X \rightarrow S^{m-1} \quad \text{mit} \quad f(p_\partial) := \frac{p_\partial - p_0}{|p_\partial - p_0|}$$

bijektiv und stetig, also ein Homöomorphismus. Diese Funktion f kann nun homöomorph auf alle Punkte p der Strecke $\overline{p_0 p_\partial}$, und damit auf ganz X , fortgesetzt werden:

$$p := (1-t)p_0 + tp_\partial, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$f : X \rightarrow B^m \quad \text{mit} \quad f(p) = f((1-t)p_0 + tp_\partial) := t \frac{p_\partial - p_0}{|p_\partial - p_0|}. \quad \square$$

Wir definieren Stöcker u. Zieschang (1994) folgend ein 0-Simplex als Vertex, also als einen Punkt aus \mathbb{R}^m , ein 1-Simplex als Linie ohne die beiden Randpunkte, und ein q -dimensionales Simplex, oder kurz q -Simplex, Δ_q , mit $q \leq m$, als die offene, konvexe Menge innerhalb von q geometrisch unabhängigen Vertizes. Hierbei heißen die $p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^m$ geometrisch unabhängig, wenn die Vektoren $p_1 - p_0, p_2 - p_1, \dots, p_q - p_{q-1}$ linear unabhängig sind.

$$\Delta_0 := \langle p_0 \rangle \quad \text{mit dem Vertex } p_0 \in \mathbb{R}^m,$$

$$\Delta_q := \langle p_0 \dots p_q \rangle \quad \text{offene, konvexe Menge innerhalb der Vertizes } p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^m$$

$$:= \left\{ p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{i=0}^q c_i p_i, \sum_{i=0}^q c_i = 1, c_i > 0 \right\}. \quad (20.2.1)$$

Entsprechend ist das abgeschlossene q -Simplex definiert als

$$\overline{\Delta}_q := \left\{ p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{i=0}^q c_i p_i, \sum_{i=0}^q c_i = 1, c_i \geq 0 \right\}.$$

Wenn man aus dem Simplex $\Delta_q = \langle p_0 \dots p_q \rangle$ nun $r+1$ Punkte mit $r < q$ auswählt, so heißt das entstehende r -Simplex $\Delta_r = \langle p_{i_0} \dots p_{i_r} \rangle$ eine r -Seite von Δ_q , kurz $\Delta_r < \Delta_q$.

Nach dem obigen Lemma ist jeder q -Simplex homöomorph zu B^q und der Rand des q -Simplex homöomorph zu S^{q-1} .

Wir beschränken uns im Weiteren auf orientierbare Simplexe, die folgendermaßen definiert werden. Seien $\Delta_q = \langle p_0 \dots p_q \rangle$ ein q -Simplex und $\{p_{i_0}, \dots, p_{i_q}\}$ eine Permutation von $\{p_0, \dots, p_q\}$, d.h.

$$\pi := \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_q \\ p_{i_0} & p_{i_1} & \dots & p_{i_q} \end{pmatrix}.$$

Diese Permutationen π können nun gerade oder ungerade sein. Die Äquivalenzklasse aller geraden Permutationen von $\{p_0, \dots, p_q\}$ nennen wir einen orientierten q -Simplex, der Einfachheit halber mit demselben Symbol Δ_q bezeichnet:

$$\Delta_q = (p_0 p_1 \dots p_q) \quad \text{mit} \quad \Delta_0 = (p_0) \quad \text{und}$$

$$(p_{i_0} \dots p_{i_q}) = \text{sgn}(\pi) \Delta_q.$$

Ein simplizialer Komplex K ist eine Menge aus einer endlichen Anzahl von Simplexen, die so zusammengefügt sind, daß

1. jede Seite eines Simplex von K zu K gehört,
d.h. $\Delta_q \in K$ und $\Delta_r \leq \Delta_q \Rightarrow \Delta_r \in K$,
2. der Durchschnitt zweier Simplexe ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite,
d.h. $\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} = \emptyset$ oder $[\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} < \Delta_{q_1}$ und $\Delta_{q_1} \cap \Delta_{q_2} < \Delta_{q_2}]$.

Die Dimension eines simplizialen Komplexes K wird definiert als die größte Dimension aller in K vorhandenen Simplexe. Ein Polyeder $|K|$ wird definiert als die Vereinigung der Punktmenge aller Simplexe von K . Ein Punkt $p \in K$ liegt dann in genau einem Simplex von K , genannt $\text{supp}(p, K)$.

Beispiel: Die Menge aller Simplexe eines Dreiecks bildet einen simplizialen Komplex

$$K = \{(p_0), (p_1), (p_2), (p_0 p_1), (p_1 p_2), (p_2 p_0), (p_0 p_1 p_2)\}. \quad \square$$

In diesem Fall ist $|K| = \overline{\Delta_2}$ und $\dim K = \dim |K| = 2$.

Ein topologischer Raum X heißt triangulierbar, wenn es einen Homöomorphismus f eines Polyeders $|K|$ eines simplizialen Komplexes K in X gibt, also $f : |K| \rightarrow X$. Es ist ein relativ schwierig zu beweisender Satz, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine Überdeckung mit Simplexen gestattet, eine sog. Triangulierung. Für eine allgemeine Diskussion ohne Beweis siehe Spivak (1979), I, S. 579 ff.; für einen Beweis in \mathbb{R}^n siehe Bär (2010), S. 263 ff., und für einen Beweis in beliebigen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten siehe Munkres (1966), S. 69 ff. Ob, und wenn ja unter welchen Bedingungen, jeder kompakte topologische Raum mit einer Dimension > 3 triangulierbar ist, ist eine schwierige und noch offene Frage (Stöcker u. Zieschang (1994), S. 73). Wir setzen

im Folgenden die Existenz einer Triangulierung der verwendeten topologischen Räume voraus.

Eine Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ zwischen zwei simplizialen Komplexen K und L mit $\dim K \geq \dim L$ heißt eine simpliziale Abbildung, wenn die Ecken jedes Simplex $\Delta_q \in K$ in die Ecken eines Simplex $\varphi(\Delta_q) \in L$ abgebildet werden. Eine solche simpliziale Abbildung ist recht starr, und wenn K über q_K Ecken verfügt und L über q_L Ecken, dann gibt es $q_K^{q_L}$ simpliziale Abbildungen.

Lemma 20.2.4 *Eine simpliziale Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ induziert eine stetige Abbildung*

$$|\varphi| : |K| \rightarrow |L| \quad \text{mit} \quad |\varphi|\left(\sum_{i=0}^q c_i p_i\right) := \sum_{i=0}^q c_i \varphi(p_i).$$

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden: $p \in |K| \Rightarrow |\varphi|(p) \in |L|$. Sei also $p \in \Delta_q : = \text{supp}(p, K)$, wobei Δ_q durch die Vertizes $p_0, \dots, p_i, \dots, p_q$ bestimmt sei und $\varphi(\Delta_q)$ durch die Vertizes $\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_j), \dots, \varphi(p_r)$ mit $0 \leq r \leq q$. Für alle p_i , welche auf $\varphi(p_j)$ abgebildet werden, definiert man die Koeffizienten $d_j := \sum_i c_i > 0$. Damit ist $\sum_{j=0}^r d_j = \sum_{i=0}^q c_i = 1$ und wir können $|\varphi|$ auf dem abgeschlossenen Simplex $\overline{\Delta}_q$ definieren als

$$|\varphi| : \overline{\Delta}_q \rightarrow |L| \quad \text{mit} \quad |\varphi|(p) = |\varphi|\left(\sum_{i=0}^q c_i p_i\right) := \sum_{i=0}^q c_i \varphi(p_i) = \sum_{j=0}^r d_j \varphi(p_j) \in |L|.$$

Diese Abbildung $|\varphi|$ ist auf jedem abgeschlossenen Simplex $\overline{\Delta}_q$ stetig. Da $|K|$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Simplexe ist, ist $|\varphi|$ also auch auf $|K|$ stetig. \square

20.3 Simpliciale Approximation

Jeder Simplex Δ_q mit seinen Vertizes $\{p_0, \dots, p_q\}$ und all seine Seiten $\Delta_r < \Delta_q$ sind offene Mengen und können daher in kleinere Simplexe zerlegt werden. Üblich ist die sog. baryzentrische Unterteilung, bei welcher als zusätzliche Vertizes die Schwerpunkte der Simplexe eingeführt werden. Die Koordinaten des Schwerpunkts p' eines Simplex Δ_q nennt man die baryzentrischen Koordinaten

$$p' := \frac{1}{q+1}(p_0 + \dots + p_q).$$

Wenn man alle Simplexe eines simplizialen Komplexes K auf diese Weise unterteilt und die so neu entstehenden Vertizes zu den ursprünglichen Vertizes hinzufügt und daraus neue Simplexe konstruiert, so entsteht ein Simplicialkomplex $K^{(1)}$, die1. baryzentrische Unterteilung von K . Dabei ändert sich nichts am Polyeder $|K|$, d.h. $|K| = |K^{(1)}|$ und $m := \dim |K| = \dim |K^{(1)}|$.

Da die Simplexe im \mathbb{R}^m liegen, können wir die Größe eines Simplex Δ_q mit den Vertizes $\{p_0, \dots, p_q\}$ folgendermaßen definieren:

$$d(\Delta_q) := \max_{0 \leq i, j \leq q} |p_i - p_j|.$$

Lemma 20.3.1 Sei K ein Simplicialkomplex der Dimension $m := \dim(K)$ und $K^{(1)}$ die 1. baryzentrische Unterteilung von K , dann gilt für die Größe der Simplexe von $K^{(1)}$

$$d(\Delta^{(1)}) \leq \frac{m}{m+1} \max\{d(\Delta) \mid \Delta \in K\}.$$

Beweis: Seien p' und p'' Schwerpunkte von gewissen Seiten von Δ_q mit

$$p' := \frac{1}{r+1}(p_0 + \dots + p_r), \quad p'' := \frac{1}{s+1}(p_0 + \dots + p_s), \quad 0 \leq r < s \leq q.$$

Aus $s \leq m$ folgt sofort $\frac{s}{s+1} \leq \frac{m}{m+1}$, denn

$$\frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \leq 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

Damit folgt

$$|p' - p''| = \frac{1}{r+1} |(p_0 - p'') + \dots + (p_r - p'')| \leq \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r |p_i - p''| \leq \max_{0 \leq i \leq r} |p_i - p''|.$$

$$|p_i - p''| = \frac{1}{s+1} |(p_i - p_0) + \dots + (p_i - p_s)| \leq \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s |p_i - p_j| \leq \frac{s}{s+1} \max_{0 \leq j \leq s} |p_i - p_j|.$$

$$|p' - p''| \leq \frac{s}{s+1} \max_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq j \leq s}} |p_i - p_j| \leq \frac{s}{s+1} d(\Delta) \leq \frac{m}{m+1} \max_{\Delta \in K} d(\Delta). \quad \square$$

Daraus folgt sofort durch Iteration der baryzentrischen Unterteilung des simplicialen Komplexes K , daß $d(\Delta^{(n)})$ beliebig klein gemacht werden kann, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\max_{\Delta^{(n)} \in K^{(n)}} d(\Delta^{(n)}) \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \max_{\Delta \in K} d(\Delta) < \epsilon,$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0$.

Definition 20.3.3 Seien K und L zwei simpliciale Komplexe und $f : |K| \rightarrow |L|$ eine stetige Abbildung zwischen den Polyedern $|K|$ und $|L|$. Dann heißt die simpliciale Abbildung $\varphi : K \rightarrow L$ eine simpliciale Approximation an f , wenn die Abbildung von $p \in |K|$ nach $|\varphi(p) \in |L|$ im abgeschlossenen Trägersimplex von $f(p)$ liegt, d.h.

$$\varphi \text{ ist eine simpliciale Approximation an } f \quad :\Leftrightarrow \quad |\varphi(p) \in \overline{\text{supp}(f(p), L)}.$$

Von großer Bedeutung für die Homologietheorie ist der folgende Satz, daß sich zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ zwischen zwei Polyedern $|K|$ und $|L|$ eine simpliciale Approximation φ auf einem ggf. feiner unterteilten simplicialen Komplex $K^{(q)}$ finden läßt. Diese simpliciale Approximation $\varphi : K^{(q)} \rightarrow L$ an f führt zu einer Homotopie zwischen f und $|\varphi|$

$$f \simeq |\varphi| : |K| \rightarrow |L| ,$$

denn da jedes Trägersimplex konvex ist gilt

$$f(p) \in \overline{\text{supp}(f(p), L)} , \quad |\varphi|(p) \in \overline{\text{supp}(f(p), L)} \quad \Rightarrow$$

$$h(t, p) := (1 - t)f(p) + t|\varphi|(p) \in \overline{\text{supp}(f(p), L)} ,$$

und damit ist $h : |K| \rightarrow |L|$ eine Homotpie zwischen f und $|\varphi|$.

Satz 20.3.4 *Zu jeder stetigen Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ zwischen zwei Polyedern $|K|$ und $|L|$ gibt es eine q -te baryzentrische Unterteilung $K^{(q)}$ von K mit einem hinreichend großen q , so daß die simpliciale Abbildung $\varphi : K^{(q)} \rightarrow L$ eine simpliciale Approximation von f ist.*

Beweis: Zum Beweis führt man den Begriff eines Vertexsterns (oder Ecksterns) zu einem Vertex $p_i \in K$ eines simplicialen Komplexes K ein. Ein Vertexstern enthält die offene Menge aller Punkte aller Simplexe, für welche p_i einen Vertex darstellt, d.h.

$$St(p_i, K) := \{|\Delta| \mid p_i \in \overline{\Delta}, p_i \text{ Vertex von } K\} .$$

Seien $p_0, \dots, p_i, \dots, p_q$ die Vertizes von K , dann bilden die Vertexsterne $St(p_i, K)$ eine endliche, offene Überdeckung von $|K|$. Für jede beliebige endliche, offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ gibt es eine Überdeckung durch Vertexsterne von $K^{(q)}$, die feiner ist als U , denn da U eine endliche, offene Überdeckung ist, gibt es ein $d_{\min}(U) := \min_i d(U_i) > 0$, und damit gibt es ein hinreichend großes q , so daß alle Simplexe von $K^{(q)}$ einen Durchmesser kleiner als $d_{\min}(U)/2$, und alle Vertexsterne einen Durchmesser kleiner als $d_{\min}(U)$ haben.

Da f stetig ist, ist $U := \{f^{-1}(St(y, L) \mid y \text{ Vertex von } L)\}$ eine offene Überdeckung von $|K|$. Wir wählen q so groß, daß die Überdeckung $\{St(x, K^{(q)}) \mid x \text{ Vertex von } K^{(q)}\}$ feiner ist als jene von U . Damit gibt es für jeden Vertex $x_0 \in K^{(q)}$ einen festen Vertex $y_0 \in L$ mit $St(x_0, K^{(q)}) \subset f^{-1}(St(y_0, L))$, bzw. $f(St(x_0, K^{(q)})) \subset St(y_0, L)$. Wir zeigen nun, daß

$$\varphi : K^{(q)} \rightarrow L \quad \text{mit} \quad \varphi(x_0) := y_0$$

eine simpliciale Abbildung definiert. Dabei erinnern wir an den Zusammenhang $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$, denn

$$f(U_1) = \{f(x) \mid x \in U_1\} , \quad f(U_2) = \{f(x) \mid x \in U_2\} , \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(U_1) \cap f(U_2) &= \{f(x) \mid x \in U_1\} \cap \{f(x) \mid x \in U_2\} = \{f(x) \mid x \in U_1, x \in U_2\} \\ &= \{f(x) \mid x \in U_1 \cap U_2\} = f(U_1 \cap U_2) . \end{aligned}$$

Sei Δ ein r -Simplex mit den Vertizes $x_i, 0 \leq i \leq r \leq q$, dann folgt

$$x \in \Delta \quad \Rightarrow \quad x \in \bigcap_i St(x_i, K^{(q)}) \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \in f\left(\bigcap_i St(x_i, K^{(q)})\right) = \bigcap_i f(St(x_i, K^{(q)})) \subset St(y_i, L) ,$$

wobei die y_i die Vertizes des Simplex $\Delta' := \text{supp}(f(x), L)$ sind. Also definiert $\varphi(\Delta) : \Delta = \Delta'$ eine simpliciale Abbildung $\varphi : K^{(q)} \rightarrow L$. Zugleich ist φ auch eine simpliciale Approximation an f , denn

$$x \in |K| = |K^{(q)}| \quad \text{mit} \quad \Delta = \text{supp}(x, K^{(q)}) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(\Delta) = \Delta' = \text{supp}(f(x), L) \quad \Rightarrow \quad |\varphi|(x) \in \overline{\text{supp}(f(x), L)} . \quad \square$$

20.4 Simpliciale Homologie

Die grundlegende Idee von Emmy Noether, die sie zu den Homologiegruppen führte, war es nun, r -Simplexe eines simplicialen Komplexes mit einer additiven freien, abelschen Gruppe G in Verbindung zu bringen.

Definition 20.4.1 Wenn K ein simplicialer Komplex ist der I_r Simplexe Δ_r enthält, dann wird eine r -Kette c von K bezüglich einer freien, abelschen Gruppe G definiert als:

$$c := \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \text{mit} \quad g_i \in G . \quad (20.4.1)$$

Die Menge aller r -Ketten bildet bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe, die r -Kettengruppe:

$$C_r(K) := \left\{ c \mid c = \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \text{mit} \quad g_i \in G \right\} . \quad (20.4.2)$$

$C_r(K)$ ist also eine additive abelsche Gruppe vom Rang I_r mit

$$C_r(K) \cong \underbrace{G \oplus G \oplus \cdots \oplus G}_{I_r} . \quad (20.4.3)$$

Nakahara (2003) und die üblichen topologischen Lehrbücher verwenden für G die additive abelsche Gruppe \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Diese Gruppe hat im Gegensatz zur additiven abelschen Gruppe \mathbb{R} der reellen Zahlen die Eigenschaft, daß \mathbb{Z} eine freie abelsche Gruppe vom Rang 1 ist, d.h. ganz \mathbb{Z} wird mit der Gruppenoperation der Addition aus dem einen, linear unabhängigen, Element 1 erzeugt. Dies hat dann den Vorteil, daß man mit den Homologiegruppen $H_r(K; \mathbb{Z})$ eine etwaige Torsion des topologischen Raums X 'sehen' kann. Da wir uns hier aber vornehmlich nicht für allgemeine topologische Räume X , sondern für differenzierbare Mannigfaltigkeiten M mit einem affinen Zusammenhang (d.h. mit einer kovarianten Ableitung) interessieren, haben wir über den aus dem affinen Zusammenhang folgenden Torsionstensor Zugang zu einer möglichen Torsion von M und können uns an dieser Stelle die Darstellung erleichtern, indem wir in den behandelten konkreten Fällen als additive abelsche Gruppe G die reellen Zahlen \mathbb{R} betrachten - wobei \mathbb{R} nicht nur eine additive abelsche Gruppe ist, sondern zugleich auch ein Vektorraum.

Um r -dimensionale 'Löcher' in X zu finden, suchen wir r -Zyklen, die keine Randketten sind. Dazu müssen wir jetzt die 'Ränder' definieren. Der Rand-Operator ∂_r wird als ein linearer Operator auf $C_r(K; G)$ wie folgt definiert:

$$\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K) \quad \text{mit}$$

$$\partial_r \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} := \sum_{i=1}^{I_r} g_i (\partial_r \Delta_{r,i}) \quad \text{und} \quad (20.4.4)$$

$$\partial_0(\Delta_0) = \partial_0(p_0) := 0 ,$$

$$\partial_1 \Delta_1 = \partial_1(p_0 p_1) := (p_1) - (p_0) ,$$

$$\partial_r \Delta_r = \partial_r(p_0 p_1 \dots p_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) , \quad (20.4.5)$$

wobei \hat{p}_i anzeigt, daß der Vertex p_i im Simplex $(p_0 p_1 \dots p_i \dots p_r)$ ausgelassen wird. Das alternierende Minuszeichen wird eingeführt, damit der Rand von $(p_0 p_1) \cup (p_1 p_2)$ wie gewünscht tatsächlich $(p_2) - (p_0)$ ist. Der Randoperator ∂_r ist wegen seiner Linearität ein Homomorphismus von $(C_r(K), +)$ in $(C_{r-1}(K), +)$, denn für $c, d \in C_r(K)$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_r(c + d) &= \partial_r\left(\sum_{i=1}^{I_r} g_{c,i} \Delta_{r,i} + \sum_{i=1}^{I_r} g_{d,i} \Delta_{r,i}\right) = \sum_{i=1}^{I_r} g_{c,i} \partial_r \Delta_{r,i} + \sum_{i=1}^{I_r} g_{d,i} \partial_r \Delta_{r,i} \\ &= (\partial_r c) + (\partial_r d) . \end{aligned}$$

Die grundlegende algebraische Eigenschaft des Randoperators ∂_r ist seine Idempotenz:

Lemma 20.4.2

$$\partial_r \partial_{r+1} \Delta_{r+1} = 0. \quad (20.4.6)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \partial_r(\partial_{r+1} \Delta_{r+1}) &= \partial_r(\partial_{r+1}(p_0 p_1 \dots p_r p_{r+1})) = \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r(p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right\} \\ &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ j < i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{\substack{i,j=0 \\ j > i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \\ &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ j < i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &\quad - \sum_{\substack{i,j=0 \\ j < i}}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0 p_1 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Sei K ein m -dimensionaler simplicialer Komplex, dann kann man den folgenden Ketten-Komplex $C(K)$ definieren:

$$0 \hookrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0. \quad (20.4.7)$$

Definition 20.4.4 Sei K ein m -dimensionaler simplicialer Komplex und $m \geq r$. Dann heißt eine r -Kette $c \in C_r(K)$ ein r -Zyklus, wenn sie keinen Rand hat, d.h. $\partial_r c = 0$. Die Menge der r -Zyklen $Z_r(K)$ ist eine Untergruppe der r -Ketten $C_r(K)$ und heißt r -Zyklengruppe.

Sei $m \geq r + 1$. Dann heißt eine r -Kette $c \in C_r(K)$ eine r -Randkette, wenn es eine $(r + 1)$ -Kette $d \in C_{r+1}(K)$ gibt, für welche c der Rand ist, d.h. $c = \partial_{r+1}d$. Die Menge der r -Randketten $B_r(K)$ ist eine Untergruppe der r -Ketten $C_r(K)$ und heißt r -Randkettengruppe. Dabei setzt man $B_m(K) := 0$.

Wegen $\partial_0c = 0$ für $c \in C_0(K)$ ist $Z_0(K) = C_0(K)$.

Aus der Definition der r -Zyklusgruppe und der r -Randkettengruppe folgt sofort:

$$Z_r = \ker \partial_r, \quad B_r = \text{Im } \partial_{r+1}. \quad (20.4.8)$$

Lemma 20.4.5

$$B_r(K) \subseteq Z_r(K). \quad (20.4.9)$$

Beweis:

$$c \in B_r(K) \Rightarrow c = \partial_{r+1}d \quad \text{mit } d \in C_{r+1}(K) \Rightarrow$$

$$\partial_r c = \partial_r \partial_{r+1}d = 0 \Rightarrow B_r(K) \subseteq Z_r(K). \quad \square$$

Damit können wir nun die r -Homologiegruppe $H_r(K)$ eines simplizialen Komplexes K als die Menge der r -Zyklen, die keine r -Randkette sind, definieren:

Definition 20.4.7 Sei K ein m -dimensionaler simplizialer Komplex, $Z_r(K)$ eine r -Zyklengruppe und $B_r(K)$ eine r -Randkettengruppe, dann heißt die Quotientengruppe

$$H_r(K) := \begin{cases} Z_r(K)/B_r(K) & \text{für } r = 0, \dots, m \\ \emptyset & \text{für } r < 0 \text{ oder } r > m. \end{cases} \quad (20.4.10)$$

die r -Homologiegruppe.

Im Fall der Gruppe $G = \mathbb{R}$ wird die r -te Bettizahl $b_r(K)$ definiert als $b_r(K) := \dim(H_r(K))$.

Die Homologiegruppe $H_r(K)$ besteht also aus Klassen von r -Zyklen, wobei zwei r -Zyklen homolog (d.h. äquivalent) sind, wenn sie sich nur um eine r -Randkette unterscheiden.

$$H_r(K) = \{[c] \mid c \in Z_r, [c] = c \cup B_r\}. \quad (20.4.11)$$

Da es bei einem m -dimensionalen Komplex K keine m -Randkettengruppe gibt, d.h. $B_m(K) = 0$ ist, folgt trivialerweise $H_m(K) = Z_m(K)$.

Mit diesen Homologiegruppen kann man nun also r -dimensionale 'Löcher' in einem topologischen Raum X bestimmen.

Poincaré hat nun die Euler-Charakteristik χ (siehe 13.0.1) auf den Fall von m -dimensionalen simplizialen Komplexen verallgemeinert:

Definition 20.4.8 Sei K ein m -dimensionaler simplizialer Komplex der I_r Simplexe Δ^r enthält, dann ist die Euler-Charakteristik $\chi(K)$ definiert als

$$\chi(K) := \sum_{r=0}^m (-1)^r I_r . \tag{20.4.12}$$

Beispiel: Sei K ein 2-dimensionaler simplizialer Komplex, dann folgt aus der obigen Formel für die Euler-Charakteristik sofort der *Eulersche Polyeder-Satz*:

$$\chi(\Delta^2) = \sum_{r=0}^2 (-1)^r I_r = I_0 - I_1 + I_2 = e - k + f , \tag{20.4.13}$$

wenn e die Anzahl der Ecken (Vertizes, Δ_0), k die Anzahl der Kanten (Δ_1) und f die Anzahl der Flächen (Δ_2) bezeichne. □

Weiter hat Poincaré den folgenden Satz bewiesen, der diese verallgemeinerte Euler-Charakteristik mit den Betti-Zahlen in einen Zusammenhang bringt.

Satz 20.4.10 (Euler-Poincaré)

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^m (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(K) . \tag{20.4.14}$$

Um diesen Satz zu beweisen, erinnern wir an ein Lemma aus der linearen Algebra.

Lemma 20.4.11 Seien V_1 und V_2 zwei endlichdimensionale Vektorräume und sei $f : V_1 \rightarrow V_2$ eine lineare Abbildung, dann gilt

$$\dim(V_1) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) . \tag{20.4.15}$$

Beweis: f ist eine lineare Abbildung, also sind $\ker f$ und $\operatorname{Im} f$ Vektor-Unterräume von V_1 , bzw. V_2 . Seien $\{x_1, \dots, x_r\}$ eine Basis von $\ker f \subseteq V_1$ und $\{y_1, \dots, y_s\}$ eine Basis von $\operatorname{Im} f \subseteq V_2$. Für jedes $y_j \in \{y_1, \dots, y_s\} \subset \operatorname{Im} f$ existiert ein $z_j \in V_1$ mit $f(z_j) = y_j$. Jetzt soll gezeigt werden, daß $B := \{x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_s\}$ eine Basis von V_1 bildet. Die Vektoren aus B sind linear unabhängig, denn mit $a^i, b^j \in \mathbb{R}; i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s$; gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r a^i x_i + \sum_{j=1}^s b^j z_j = 0 &\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r a^i x_i + \sum_{j=1}^s b^j z_j\right) = \begin{cases} f(0) = 0 , \\ f\left(\sum_{j=1}^s b^j z_j\right) = b^j y_j , \end{cases} \\ &\Rightarrow \text{alle } b^j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r a^i x_i = 0 \Rightarrow \text{alle } a^i = 0 . \end{aligned}$$

B ist aber auch vollständig, denn sei $v \in V_1$ ein beliebiger Vektor, dann ist $f(v) \in \operatorname{Im} f$, also

$$f(v) = \sum_{j=1}^s b^j y_j = \sum_{j=1}^s b^j f(z_j) \Rightarrow f(v) - f\left(\sum_{j=1}^s b^j z_j\right) = f\left(v - \sum_{j=1}^s b^j z_j\right) = 0 ,$$

und damit ist $(v - \sum_{j=1}^s b^j z_j) \in \ker f$, also

$$(v - \sum_{j=1}^s b^j z_j) = \sum_{i=1}^r a^i x_i, \quad \text{bzw.} \quad v = \sum_{i=1}^r a^i x_i + \sum_{j=1}^s b^j z_j. \quad \square$$

Beweis (Euler-Poincaré): Sei $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ der lineare Randoperator zwischen den linearen Räumen $C_r(K)$ und $C_{r-1}(K)$. Dann folgt dem obigen Lemma und mit $C_{-1}(K) = B_{-1}(K) = B_m(K) = \emptyset$

$$\begin{aligned} I_r &= \dim(C_r(K)) = \dim(\ker \partial_r) + \dim(\text{Im } \partial_r) \\ &= \dim(Z_r(K)) + \dim B_{r-1}(K). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_r(K) &= \dim(H_r(K)) = \dim(Z_r(K)/B_r(K)) \\ &= \dim(Z_r(K)) - \dim(B_r(K)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^m (-1)^r [\dim(Z_r(K)) + \dim(B_{r-1}(K))] \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(Z_r(K)) + \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(B_{r-1}(K)) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(Z_r(K)) + \sum_{r=-1}^{m-1} (-1)^{r+1} \dim(B_r(K)) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(Z_r(K)) - \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(B_r(K)) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(K). \quad \square \end{aligned}$$

Das Studium der Homologie ist deswegen so bedeutsam, weil bereits Poincaré erkannte, daß die Bettizahlen und die Euler-Charakteristik topologische Invarianten sind, d.h. invariant unter Homöomorphismen.

Satz 20.4.14 Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus, d.h. f und f^{-1} seien stetig, sei weiter K ein simplicialer Komplex in X und $f(K)$ ein simplicialer Komplex in Y , dann sind $H_r(K)$ und $H_r(f(K))$ isomorph.

Beweis: Der Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ induziert einen Homomorphismus f_* auf der r -Kettengruppe $C_r(K)$:

$$f_* : C_r(K) \rightarrow C_r(f(K)) , \quad \text{mit}$$

$$f_*\left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i}\right) := \sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i}) \quad \text{mit } g_i \in G \} .$$

Dann ist $\partial_r f_* = f_* \partial_r$ auf $C_r(f(K))$, denn für $\Delta_{r,i} = (p_{i_0}, \dots, p_{i_r})$ folgt

$$\begin{aligned} \partial_r \Delta_{r,i} &= \sum_{j=0}^r (-1)^j (p_{i_0}, \dots, \widehat{p_{i_j}}, \dots, p_{i_r}) \Rightarrow \\ f_* \partial_r \left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \right) &= f_* \left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \partial_r \Delta_{r,i} \right) = f_* \left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^r (-1)^j (p_{i_0}, \dots, \widehat{p_{i_j}}, \dots, p_{i_r}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^r (-1)^j f(p_{i_0}, \dots, \widehat{p_{i_j}}, \dots, p_{i_r}) \\ &= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \sum_{j=0}^r (-1)^j (f(p_{i_0}), \dots, \widehat{f(p_{i_j})}, \dots, f(p_{i_r})) \\ &= \partial_r \sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i}) = \partial_r f_* \left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \right) . \end{aligned}$$

Daraus folgt dann sofort

$$z_r \in Z_r(K) \quad \Rightarrow \quad \partial_r f_*(z_r) = f_* \partial_r z_r = f_*(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_*(z_r) \in Z_r(f(K)) .$$

$$b_r \in B_r(K) \quad \Rightarrow \quad b_r = \partial_{r+1} c_{r+1} \quad \text{mit } c_{r+1} \in C_{r+1}(K) \quad \Rightarrow$$

$$f_*(b_r) = f_*(\partial_{r+1} c_{r+1}) = \partial_{r+1} f_*(c_{r+1}) \quad \Rightarrow \quad f_*(b_r) \in B_r(f(K)) .$$

$$(z_r + B_r(K)) \in H_r(K) \quad \Rightarrow$$

$$f_*(z_r + B_r(K)) = f_*(z_r) + B_r(f(K)) \in H_r(f(K)) .$$

Also werden durch den Homomorphismus f_* die r -Zyklen von $Z_r(K)$ in die r -Zyklen von $Z_r(f(K))$ und die r -Randketten von $B_r(K)$ in die r -Randketten von $B_r(f(K))$ abgebildet, und damit auch die r -Homologiegruppen von $H_r(K)$ in die r -Homologiegruppen von $H_r(f(K))$.

Tatsächlich ist f_* sogar ein Isomorphismus, denn

$$\begin{aligned} f_*^{-1}\left(f_*\left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i}\right)\right) &= f_*^{-1}\left(\sum_{i=1}^{I_r} g_i f(\Delta_{r,i})\right) = \sum_{i=1}^{I_r} g_i f_*^{-1}(f(\Delta_{r,i})) \\ &= \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} . \end{aligned} \quad \square$$

Wenn nun im obigen Satz für den Homöomorphismus $f : X \rightarrow X$ angenommen wird, dann sind für die beiden Triangulierungen K und $f(K)$ die Homologiegruppen $H_r(K)$ und $H_r(f(K))$ wieder isomorph, und daher kann man die simplicialen Homologiegruppen von X *definieren* als $H_r(X) := H_r(K)$.

Wenn der topologische Raum X eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M ist, dann können wir die Euler-Charakteristik anstatt über die Homologiegruppen und deren Betti-Zahlen auch über den Index eines speziellen Vektorfeldes V , d.h. mit $V_p : M_p \rightarrow T_p M$ an der Stelle $p \in M$, auf dem simplicialen Komplex K einer Triangulation von M berechnen. Da die Euler-Charakteristik eine topologische Invariante ist, hängt sie nicht von der Triangulierung und dem darauf konstruierten speziellen Vektorfeld ab.

Dies deutet bereits die innere Verbindung der Homologiegruppen mit den Kohomologiegruppen an.

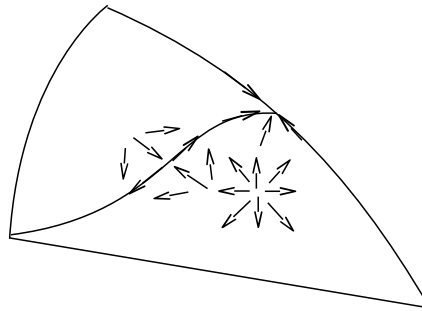


Abbildung 20.1: Konstruktion des Vektorfeldes V auf der Mannigfaltigkeit M

Wir konstruieren ein Vektorfeld V , das im Zentrum eines jeden Simplex eine isolierte, nichtentartete Nullstelle u_i hat. Die Anzahl der Nullstellen ist $s := \sum_{r=0}^m I_r$, also ist $i = 1, \dots, s$. Hierbei zeige der Fluß von V_p von absoluten Maxima im Zentrum der $\Delta_{m,i}$, $i = 1, \dots, I_m$ und von Sattelpunkten im Zentrum der $\Delta_{r,j}$, $r = 1, \dots, m-1$; $j = 1, \dots, I_r$ hin zu Minima in den Vertizes $\Delta_{0,k}$, $k = 1, \dots, I_0$.

In 17.3.2 hatten wir für den Index eines Vektorfeldes V an einer Nullstelle u_i gefunden

$$\text{ind}(V, u_i) = \text{sgn} \det \left(\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u_i} \right) = (-1)^{\text{card}\{j | \lambda_j < 0\}} ,$$

wobei λ_j die Eigenwerte von $\frac{\partial f}{\partial u}|_{u_i}$ sind. In den Maxima im Zentrum der $\Delta_{m,i}$ sind alle m Eigenwerte negativ, in den Sattelpunkten im Zentrum der $\Delta_{r,j}$ sind r Eigenwerte negativ und in Minima der Vertizes $\Delta_{0,k}$ sind 0 Eigenwerte negativ. Wenn wir jetzt die Summe über alle Nullstellen von V bilden erhalten wir

$$\sum_{i=1}^s \text{ind}(V, u_i) = \sum_{r=0}^m \sum_{j=1}^{I_r} \text{ind}(V, u_{i(r,j)}) = \sum_{r=0}^m I_r \cdot (-1)^r = \chi(K) = \chi(M). \quad (20.4.16)$$

20.5 Berechnung simplizialer Homologiegruppen

Die Bestimmung der simplizialen Homologiegruppen wird mit zunehmender Dimension des simplizialen Komplexes rasch recht aufwendig und unübersichtlich. Daher sind einige allgemeine Sätze sehr hilfreich.

Satz 20.5.1 *Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen und $f : G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus, dann gilt:*

ker f ist eine Untergruppe von G_1 ,

Im f ist eine Untergruppe von G_2 ,

Im $f \cong G_1 / \text{ker } f$.

Beweis: 1. ker f ist eine Untergruppe von G_1 , denn

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \text{ker } f &\Rightarrow f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 + x_2) \in \text{ker } f, \end{aligned}$$

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \text{ker } f,$$

$$0 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) + f(-x_1) = 0 + f(-x_1) \Rightarrow -x_1 \in \text{ker } f.$$

2. Im f ist eine Untergruppe von G_2 , denn

$$\begin{aligned} y_1, y_2 \in \text{Im } f &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in G_1 \text{ mit } y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \\ &\Rightarrow y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in \text{Im } f, \end{aligned}$$

$$0 = f(0) \Rightarrow 0 \in \text{Im } f,$$

$$\begin{aligned} y_1 = f(x_1) &\Rightarrow 0 = f(0) = f(x_1 - x_1) = f(x_1) + f(-x_1) \\ &\Rightarrow -y_1 = -f(x_1) = f(-x_1) \in \text{Im } f. \end{aligned}$$

3. In der Gleichung $\text{Im } f \cong G_1 / \ker f$ sind zunächst einmal beide Seiten dieser Gleichung Gruppen. Jetzt definieren wir eine Abbildung $\varphi : G_1 / \ker f \rightarrow \text{Im } f$ mit $\varphi([x_1]) = f(x_1)$ für $x_1 \in G_1$. Dann gilt für $x_2 \in [x_1]$

$$x_2 = x_1 + h \text{ mit } h \in \ker f \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + f(h) = f(x_1) .$$

Weiter ist φ ein Homomorphismus, denn seien $x_1, x_2 \in G_1$ mit $[x_1] \neq [x_2]$, dann folgt

$$\varphi([x_1] + [x_2]) = \varphi([x_1 + x_2]) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \varphi([x_1]) + \varphi([x_2]) .$$

φ ist injektiv, denn

$$\begin{aligned} [x_1] \neq [x_2] &\Rightarrow [x_1 - x_2] \neq [0] \Rightarrow (x_1 - x_2) \notin \ker f \\ &\Rightarrow \varphi([x_1]) - \varphi([x_2]) = \varphi([x_1 - x_2]) = f(x_1 - x_2) \neq 0 , \end{aligned}$$

und φ ist auch surjektiv, denn für alle $y_1 \in \text{Im } f$ existiert ein $x_1 \in G_1$ mit $y_1 = f(x_1) = \varphi([x_1])$. Damit ist φ ein Isomorphismus. \square

Für wegzusammenhängende simpliciale Komplexe, und damit für wegzusammenhängende topologische Räume, findet man eine wichtige allgemeine Aussage über $H_0(K)$.

Satz 20.5.3 *K ist genau dann ein wegzusammenhängender simplicialer Komplex, wenn gilt*

$$H_0(K) \simeq G . \quad (20.5.1)$$

Wenn K ein m -dimensionaler, simplicialer Komplex ist, der aus n disjunkten simplicialen Unterkomplexen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sind, also

$$K := \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{mit } K_i \cap K_j = \emptyset \text{ für } i, j = 1, \dots, n ,$$

dann gilt

$$H_r(K) = \bigoplus_{i=1}^n H_r(K_i) \quad \text{für } r = 0, \dots, m . \quad (20.5.2)$$

Beweis: 1. Sei K ein wegzusammenhängender simplicialer Komplex. Dann gibt es für zwei beliebige Vertices (p_i) und (p_j) einen Weg von 1-Simplexen $(p_i p_{k_1}) + (p_{k_1} p_{k_2}) + \dots + (p_{k_s} p_j)$, der (p_i) und (p_j) verbindet und dessen Randkette ist nun

$$\partial_1((p_i p_{k_1}) + (p_{k_1} p_{k_2}) + \dots + (p_{k_s} p_j)) = (p_j) - (p_i) .$$

Also sind (p_i) und (p_j) homolog, d.h. $[p_i] = [p_j]$. Also ist jeder Vertex in K homolog zum 0-Simplex (p_1) .

Sei jetzt z ein 0-Zyklus, also

$$z = \sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \in Z_0(K).$$

Für die Homologie-Klasse $[z]$ gilt dann

$$[z] = \left[\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \right] = \sum_{i=1}^{I_0} g_i[p_i] = [p_1] \sum_{i=1}^{I_0} g_i.$$

Wenn also $\sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0$ ist, so folgt $[z] = 0$, und das bedeutet $z \in B_0(K)$.

Jetzt soll die Umkehrung gezeigt werden. Seien $\Delta_{1,j} = (p_{j,1}p_{j,2})$ mit $j = 1, \dots, I_1$ nun 1-Simplexe in K , dann ist die 0-Randkettengruppe $B_0(K)$

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \partial_1 \left(\sum_{j=1}^{I_1} g_j \Delta_{1,j} \right) = \partial_1 \left(\sum_{j=1}^{I_1} g_j (p_{j,1}p_{j,2}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{I_1} g_j \partial_1(p_{j,1}p_{j,2}) = \sum_{j=1}^{I_1} g_j (p_{j,2} - p_{j,1}) \\ &= \sum_{i=1}^{2I_1} g_i(p_i) = \sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir $p_{2i} := p_{j,2}$, $p_{2i-1} := p_{j,1}$, $g_{2i} = -g_{2i-1}$ gesetzt, und $I_0 := 2I_1$.

$$z \in B_0(K) \quad \Rightarrow \quad [z] = \left[\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \right] = [p_1] \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0.$$

Damit gilt

$$z \in B_0(K) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{I_0} g_i = 0, g_i \in G.$$

Jetzt kann man einen surjektiven Homomorphismus $f : Z_0(K) \rightarrow G$ definieren durch

$$f \left(\sum_{i=1}^{I_0} g_i(p_i) \right) := \sum_{i=1}^{I_0} g_i \quad \Rightarrow$$

$$\ker f = f^{-1}(0) = B_0(K).$$

Da $Z_0(K)$ und $B_0(K)$ Gruppen sind, und $B_0(K)$ eine Untergruppe von $Z_0(K)$ ist, so folgt mit 20.5.1

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = Z_0(K)/\ker f \cong \text{Im } f = G.$$

2. Sei jetzt K ein m -dimensionaler, simplicialer Komplex, der aus n disjunkten Unterkomplexen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sein mögen, also

$$K := \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{mit } K_i \cap K_j = \emptyset \quad \text{für } i, j \in 1, \dots, n.$$

Weil die r -Simplexe linear in den r -Ketten vorkommen ($r = 0, \dots, m$), ist auch die r -Kettengruppe $C_r(K)$ eine direkte Summe der Unterkomplexe, d.h.

$$C_r(K) := \left\{ c \mid c = \sum_{i=1}^{I_r} g_i \Delta_{r,i} \quad \text{mit } g_i \in G \right\} = \bigoplus_{i=1}^n C_r(K_i).$$

Dies gilt nun natürlich auch für die Untergruppen $Z_r(K)$ und $B_r(K)$. Und weil für jeden einzelnen Unterkomplex wieder $B_r(K_i) \subset Z_r(K_i)$ gilt, kann man die Unterhomologiegruppen definieren als

$$H_r(K_i) = Z_r(K_i) / B_r(K_i).$$

Und damit folgt für die Gesamthomologiegruppe

$$\begin{aligned} H_r(K) &= Z_r(K) / B_r(K) = \left(\bigoplus_{i=1}^n Z_r(K_i) \right) / \left(\bigoplus_{i=1}^n B_r(K_i) \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n (Z_r(K_i) / B_r(K_i)) = \bigoplus_{i=1}^n H_r(K_i). \end{aligned}$$

Speziell für $H_0(K)$ ergibt sich

$$H_0(K) = \bigoplus_{i=1}^n H_0(K_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n G.$$

Wenn also $H_0(K) \cong G$, dann ist K wegzusammenhängend. \square

Korollar 20.5.5 *Wenn ein m -dimensionaler simplicialer Komplex einfach zusammenhängend ist (d.h. 0-homotop) und also keine 'Löcher' besitzt, dann sind für $r = 1, \dots, m$ alle r -Zyklen aus $Z_r(K)$ gleichzeitig auch r -Randketten aus $B_r(K)$ und damit die Homologiegruppen leer:*

$$K \text{ einfach zusammenhängend} \quad \Rightarrow \quad H_r(K) = \emptyset \quad \text{für } r > 0. \quad (20.5.3)$$

Da in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie häufig Abbildungen auf abgeschlossene Kugeln (Bälle) B^n oder Kugeloberflächen (Sphären) S^{n-1} vorkommen, sind deren Homologiegruppen von besonderer Bedeutung. Zuvor benötigen wir aber noch ein Lemma, das auch für sich betrachtet interessant ist.

Lemma 20.5.6 *Ein simplizialer Komplex K mit $\dim(K) = m$ liege in einem Teilraum $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Ein einzelner Punkt p sei von den Vertizes p_0, \dots, p_m von K geometrisch unabhängig, d.h. $p \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus M$. Man bildet jetzt aus den Vertizes p, p_0, \dots, p_r mit $0 \leq r \leq m$ den $(r+1)$ -Simplex $p * \Delta_r$ und entsprechend den $(m+1)$ -Simplizialkomplex*

$$p * K := K \cup \{p\} \cup \{p * \Delta_r \in K, 0 \leq r \leq m\},$$

welcher Kegel über K mit Spitze p heißt, und der offensichtlich zusammenhängend ist. Dann gilt

$$H_r(p * K) = 0, \text{ für } r > 0.$$

Beweis: Sei $c_r \in C_r(K)$ ein r -Kette mit $r > 0$. Dann gilt

$$\partial_{r+1}(p * c_r) = c_r - p * \partial_r c_r.$$

Wegen der Linearität von ∂ genügt es, dies für $c_r = (p_0, \dots, p_r)$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} \partial_{r+1}(p * c_r) &= \partial(p, p_0, \dots, p_r) \\ &= (p_0, \dots, p_r) - \sum_{i=0}^r (-1)^i (p, p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r) \\ &= c_r - p * \partial_r c_r. \end{aligned}$$

Sei jetzt $z_r \in Z_r(p * K)$ mit $r > 0$ ein r -Zyklus. Dann ist z_r eine Linearkombination von c_r und $p * c_{r-1}$. Wegen der Linearität von ∂ genügt es ein $z_r = c_r + p * c_{r-1}$ zu untersuchen:

$$\begin{aligned} z_r &= c_r + p * c_{r-1} = \partial_{r+1}(p * c_r) + p * \partial_r c_r + p * c_{r-1} \\ &= \partial_{r+1}(p * c_r) + p * (\partial_r c_r + c_{r-1}) \Rightarrow \\ \partial_r z_r &= 0 \Rightarrow \partial_r(p * (\partial_r c_r + c_{r-1})) = 0. \end{aligned}$$

$\partial_r(p * c'_r)$ kann aber nur dann Null sein, wenn $c'_r = 0$ ist, also folgt

$$\partial_r c_r + c_{r-1} = 0 \Rightarrow z_r = \partial_{r+1}(p * c_r) \Rightarrow$$

$$z_r \in B_r(p * c_r) \Rightarrow Z_r(p * c_r) = B_r(p * c_r) \Rightarrow H_r(p * c_r) = 0. \quad \square$$

Der Simplizialkomplex $K(\Delta_m)$ aller Seiten eines m -Simplex Δ_m bildet einen Polyeder $|K(\Delta_m)| = \overline{\Delta_m}$ und dieser ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Kugel (Ball) B^m . Also sind Bälle triangulierbar.

Der Simplizialkomplex $K(\partial\Delta_m)$ aller eigentlichen Seiten eines m -Simplex Δ_m ist ein Simplizialkomplex mit $|K(\partial\Delta_m)| = \partial\overline{\Delta_m}$ und dieser ist homöomorph zu einer Kugeloberfläche (Sphäre) S^{m-1} . Also sind auch Sphären triangulierbar.

Satz 20.5.8

a. Für die Triangulierung einer abgeschlossenen Kugel $K(B^m)$ gilt $H_r(K(B^m)) = 0$ für $r > 0$.

b. Für die Triangulierung einer Kugeloberfläche $K(S^{m-1})$ gilt $H_r(K(S^{m-1})) = 0$ für $0 < r < m - 1$ und $H_{m-1}(K(S^{m-1})) \simeq G$.

c. Da $K(B^m)$ und $K(S^{m-1})$ wegzusammenhängend sind, gilt auch:

$$H_0(K(B^m)) \simeq G, \quad H_0(K(S^{m-1})) = H_{m-1}(K(S^{m-1})) \simeq G.$$

Beweis: a. Sei Δ_m ein m -Simplex, $K(\Delta_{m-1}) := \{\Delta_r \mid \Delta_r < \Delta_m\}$ der $(m-1)$ -dimensionale simpliciale Komplex aller Seiten von Δ_m und $p \in \Delta_m \setminus K(\Delta_{m-1})$, dann ist $K(\Delta_m) = p * K(\Delta_{m-1})$. Mit dem obigen Lemma folgt sofort $H_r(K(\Delta^m)) = 0$ für $r > 0$ und wegen $\Delta_m \simeq K(B^m)$ folgt $H_r(K(B^m)) = 0$ für $r > 0$.

b. Sei Δ_m ein m -Simplex, $K(\Delta_m)$ der m -dimensionale simpliciale Komplex über Δ_m , $L(\Delta_{m-1}) := \partial K(\Delta_m)$ der $(m-1)$ -dimensionale simpliciale Teilkomplex von K aller Seiten von Δ_m . Dann kann man die folgende Sequenz von r -Ketten bilden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & \rightarrow & C_m(K) & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial_r} & \dots \\ & & & & = & & & & = & & = & & \\ & & \emptyset & & \rightarrow & C_{m-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(L) & \xrightarrow{\partial_r} & \dots \end{array}$$

Wegen $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ ist das Bild $\text{Im } \partial_{r+1} C_{r+1}(K)$ eine Teilmenge des Kern $\ker \partial_r C_r(K)$. Zudem ist für $r < m$ die r -Kette $C_r(K) = C_r(L)$, da ja L aus allen Seiten von K besteht.

Sei jetzt y_r ein r -Zyklus der r -Kette $C_r(L)$ für $0 < r < m - 1$, d.h. $y_r \in Z_r(L)$, dann ist auch $y_r \in Z_r(K)$, und da $H_r(K) = 0$ ist, existiert also ein $c_{r+1} \in C_{r+1}(K)$ mit $y_r = \partial c_{r+1}$. Dieses c_{r+1} ist aber auch ein Element von $C_{r+1}(L)$, so daß $y_r = \partial c_{r+1}$ auch bzgl. $C_{r+1}(L)$ und $C_r(L)$ gilt. Also ist $y_r \in B_r(L)$ und damit ist $H_r(L) = 0$.

Jetzt soll der Fall $m - 1$ betrachtet werden. Sei $y_{m-1} \in Z_{m-1}(L) = Z_{m-1}(K)$. Wie oben existiert ein $c_m \in C_m(K)$ mit $y_{m-1} = \partial c_m$. Nun enthält aber K nur ein einziges m -Simplex, nämlich Δ_m , und damit ist $c_m = g \cdot (p_0, \dots, p_m)$ mit $g \in G$. Damit folgt

$$y_{m-1} = \partial c_m = g \cdot (p_0, \dots, p_m) = g \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i (p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m).$$

Für die $C_{m-1}(L)$ Sequenz gilt: $B_{m-1}(L) = 0$, und damit ist

$$H_{m-1}(L) = Z_{m-1}(L) = Z_{m-1}(K) \simeq G.$$

□

20.6 Relative simpliziale Homologiegruppen

Manchmal erhält man in der Mathematik einfachere Strukturen indem man auf gewisse Informationen verzichtet. So ist es auch in der algebraischen Topologie immer wieder hilfreich einen topologischen Raum modulo eines Teilraums zu untersuchen. Im Fall der Homologiegruppen gelangt man so zu den *relativen* Homologiegruppen.

Definition 20.6.1 Sei K ein Simplizialkomplex, $A \subset K$ ein nichtleerer, abgeschlossener, simplizialer Teilkomplex, dann heißt (K, A) ein Raumpaare. Eine stetige Abbildung $f : K \rightarrow L$ mit $A \subset K$, $B \subset L$ und $f(A) \subseteq B$ nennt man eine stetige Abbildung von Simplizialkomplex-Paaren $f : (K, A) \rightarrow (L, B)$.

Sei K ein Simplizialkomplex, $A \subset K$ ein simplizialer Teilkomplex, $C_r(K)$ eine r -Kettengruppe, dann kann man eine relative r -Kettengruppe als die Ketten von K modulo der Ketten von A definieren, genauer gesagt

$$C_r(K, A) := C_r(K)/C_r(A) . \quad (20.6.1)$$

Die Elemente von $C_r(K, A)$ sind also die Klassen $[s_r] := \{s_r + s_{r,A} \mid s_r \in C_r(K) \text{ fixiert, } s_{r,A} \in C_r(A)\}$.

Der Randoperator $\partial_r : C_r(K) \rightarrow C_{r-1}(K)$ wirkt per Definition auf Ketten von A in gleicher Weise $\partial_r : C_r(A) \rightarrow C_{r-1}(A)$ wie auf Ketten von K . Damit induziert er einen relativen Randoperator, den wir der Einfachheit halber auch wieder mit ∂_r bezeichnen, also

$$\partial_r : C_r(K, A) \rightarrow C_{r-1}(K, A) . \quad (20.6.2)$$

Da $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ für $C_r(K)$ und $C_r(A)$ gültig ist, gilt dies auch für die Klassen $[s_r]$, also für $C_r(A)$.

Relative r -Zyklen und relative r -Randketten werden dann definiert als:

$$Z_r(K, A) := \{\alpha \mid \alpha \in C_r(K), \partial_r \alpha \in C_{r-1}(A)\} , \quad (20.6.3)$$

$$B_r(K, A) := \{\beta = \partial_{r+1} \gamma + \delta \mid \gamma \in C_{r+1}(K), \delta \in C_r(A)\} . \quad (20.6.4)$$

Damit kann man relative Homologiegruppen wie üblich definieren als:

$$H_r(K, A) := Z_r(K, A)/B_r(K, A) = \ker(\partial_r)/\text{Im}(\partial_{r+1}) . \quad (20.6.5)$$

Das heißt, die Klassen von $H_r(K, A)$ bestehen aus relativen r -Zyklen modulo relativen r -Randketten.

Einige Beispiele sind zu einem besseren Verständnis der relativen Homologiegruppen vielleicht hilfreich.

1. $C_r(K, K) = C_r(K)/C_r(K) = \emptyset \Rightarrow H_r(K, K) = \emptyset$ für alle r .

2. $C_r(K, \emptyset) = C_r(K)/C_r(\emptyset) = C_r(K) \Rightarrow Z_r(K, \emptyset) = Z_r(K)$,
 $B_r(K, \emptyset) = B_r(K) \Rightarrow H_r(K, \emptyset) = H_r(K)$ für alle r .
3. Sei K wegzusammenhängend und $\emptyset \neq A \subset K$ dann ist $H_0(K, A) = \emptyset$, denn: sei $x \in K$ ein 0-Simplex, dann gibt es ein 0-Simplex $a \in A$ und eine 1-Kette c_1 in K mit $\partial c_1 := (x - a)$. Also ist x ein Rand relativ zu A , und damit ist $\{x\} = Z_0(K, A) = B_0(K, A)$ und damit ist $H_0(K, A) = \emptyset$.
4. Im Beweis von 20.5.8 hatten wir die beiden folgenden simplizialen Ketten-Komplexe untersucht: Δ_m ein m -Simplex, $K(\Delta_m)$ der m -dimensionale simpliziale Komplex über Δ_m , $L(\Delta_{m-1}) := \partial K(\Delta_m) = K(\partial\Delta_m)$ der $(m-1)$ -dimensionale simpliziale Teilkomplex von K aller Seiten von Δ_m . Wir hatten die folgende Sequenz von r -Ketten gebildet:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & \rightarrow & C_m(K) & \xrightarrow{\partial_m} & C_{m-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(K) & \xrightarrow{\partial_r} & \\ & & & & = & & = & & = & & \\ & & \emptyset & \rightarrow & C_{m-1}(L) & \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{r+2}} & C_{r+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{r+1}} & C_r(L) & \xrightarrow{\partial_r} & \end{array}$$

Wegen $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ ist das Bild $\text{Im } \partial_{r+1} C_{r+1}(K)$ eine Teilmenge des Kerns $\ker \partial_r C_r(K)$. Zudem ist für $r < m$ die r -Kette $C_r(K) = C_r(L)$, da ja L aus allen Seiten von K besteht. Damit ist

$$C_r(K, L) = C_r(K)/C_r(L) = \emptyset \Rightarrow H_r(K, L) = \emptyset \quad \text{für } r < m .$$

Für den Fall $r = m$ hatten wir in 20.5.8 gezeigt, daß $C_m(K) \simeq G$ ist und damit folgt

$$C_m(K, L) = C_m(K)/C_m(L) = C_m(K)/\emptyset = C_m(K) \simeq G .$$

Die Kette $(x_0, x_1, \dots, x_m) \in C_m(K)$ ist kein Zyklus in K , wohl aber ein Zyklus relativ zu L , denn

$$\partial_m(x_0, x_1, \dots, x_m) \in C_{m-1}(K) = C_{m-1}(L) \Rightarrow$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \in Z_m(K, L) \simeq G .$$

$$B_m(K, L) = \emptyset \quad \text{weil } B_m(K) = \emptyset \Rightarrow$$

$$H_m(K, L) \simeq G , \quad \text{bzw.} \quad H_m(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq G , \quad (20.6.6)$$

und (x_0, x_1, \dots, x_m) ist ein Generator von $H_m(K, L)$.

21 Singuläre Homologie

Obwohl Poincaré die Grundgedanken der *simplizialen Homologie* bereits im Jahr 1900 eingeführt hatte, dauerte es doch bis zum Jahr 1944 bis Eilenberg die endgültige Definition der *singulären Homologie* vorlegen konnte. Es ist nun kein Zufall, daß die Entwicklung von der simplizialen Homologie zur singulären Homologie so lange Zeit in Anspruch genommen hat, denn die simpliziale Homologie ist letztlich ein Teilgebiet der *kombinatorischen Topologie*. Und es hat sich dann in den Jahren nach Poincaré recht mühsam gezeigt, daß mit diesen Hilfsmitteln grundlegende Fragen der Homologie nicht ohne weiteres beantwortet werden können. Den Durchbruch in der Homologie-Theorie brachte erst die Anwendung algebraischer Methoden, also die Entwicklung der *algebraischen Topologie*. So wurde die singuläre Homologie zu einem der ersten großen Erfolge der neu entstehenden algebraischen Topologie.

Für Anfänger und insbesondere auch mathematische Physiker und Physikerinnen ist das Gebiet der algebraischen Topologie zunächst einmal gewöhnungsbedürftig: viele neue Begriffe und Definitionen tauchen auf, sowie viele sehr spezielle technische Werkzeuge mit langen und komplexen Lemmata, die schließlich zu mächtigen Sätzen führen. Doch wenn man sich etwas länger und geduldig genug mit diesem Gebiet beschäftigt, dann erschließen sich die Schönheit und Reichweite des Gebietes - und letztlich die tiefliegenden Verbindungen zwischen der Topologie und der Theorie der Pseudodifferential-Operatoren, die in die berühmten Atiyah-Singer-Indexsätze münden.

Dabei werden wir einige Standardwerkzeuge der algebraischen Topologie, wie *exakte Sequenzen* und das *Fünfer-Lemma* kennenlernen. Diese Werkzeuge werden sich auch später noch als sehr hilfreich herausstellen, wenn wir den Isomorphismus zwischen den Homologie- und den entsprechenden Kohomologie-Gruppen zeigen.

Wir folgen hier den beiden hervorragenden Darstellungen von Stöcker u. Zieschang (1994) und Hatcher (2001). Als Ergänzung bietet sich die im Internet verfügbare Vorlesung von Kriegl (2006) an, der sich auf Stöcker u. Zieschang (1994) stützt, aber zahlreiche Zusammenhänge ausführlicher, und damit verständlicher darstellt. Und Allen Hatcher hat uns sein schönes Buch erfreulicherweise zusätzlich zur gedruckten Ausgabe auch im Internet zur Verfügung gestellt.

21.1 Der Satz von Stokes

Die Integration einer Differentialform $\omega = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r \in \Omega^r(\mathbb{R}^n)$ mit $r \leq n$ über einen abgeschlossenen, orientierbaren Simplex $\overline{\Delta_r}$ wird definiert als

$$\int_{\overline{\Delta_r}} \omega := \int_{\overline{\Delta_r}} a(x_1, \dots, x_n) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^r .$$

Jetzt möchte man aber gerne auch über andere geometrische Gebilde als nur über Simplexe im \mathbb{R}^n integrieren. Daher definiert man einen sog. *singulären r -Simplex* s_r als die stetige Abbildung eines Simplex $\overline{\Delta_r}$ eines Simplicial-Komplexes K in einen topologischen Raum X .

Satz 21.1.1 (Stokes) *Sei ω eine $(r-1)$ -Form auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit $r \leq n$, also $\omega \in \Omega^{r-1}(M)$, und sei s_r ein singulärer r -Simplex mit $s_r(\overline{\Delta_r}) \subset M$, dann gilt:*

$$\int_{s_r(\overline{\Delta_r})} d\omega = \int_{\partial s_r(\overline{\Delta_r})} \omega . \quad (21.1.1)$$

Beweis: Wir folgen Nakahara (2003), S 228 ff.
Zunächst einmal folgt mit 11.3.4: $d(s_r^*\omega) = s_r^*(d\omega)$

$$\int_{s_r(\overline{\Delta_r})} d\omega = \int_{\overline{\Delta_r}} s_r^*(d\omega) = \int_{\overline{\Delta_r}} d(s_r^*\omega) , \quad \int_{\partial s_r(\overline{\Delta_r})} \omega = \int_{\partial \overline{\Delta_r}} s_r^*\omega .$$

Es genügt also den Satz im \mathbb{R}^r auf einem orientierbaren Simplex $\overline{\Delta_r}$ zu beweisen, d.h.

$$\int_{\overline{\Delta_r}} d(s_r^*\omega) \stackrel{!}{=} \int_{\partial \overline{\Delta_r}} s_r^*\omega .$$

Wir wählen $\psi := s_r^*\omega \in \Omega^{r-1}(\mathbb{R}^r)$ in der Form $\psi := a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$. Komplexere Differentialformen lassen sich distributiv aus solchen ψ bilden und die Integration ist ja auch ein distributiver Operator. Damit gilt für $d\psi$

$$d\psi = \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^r \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1} = (-1)^{r-1} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1} \wedge dx^r .$$

Die Integration einer 2-Form $\psi = dx^1 \wedge dx^2$ über einen 2-Simplex, also über ein Dreieck $\overline{\Delta_2}$, sieht ja folgendermaßen aus

$$\overline{\Delta_2} = [p_0 p_1 p_2] = [(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)] ,$$

$x^i =$ Koordinate auf der Strecke $\overline{p_{i-1}p_i}$, $i \in \{1, 2\}$,

$$\int_{\overline{\Delta_2}} \psi = \int_{\overline{\Delta_2}} dx^1 dx^2 = \int_0^1 dx^1 \int_0^{1-x^1} dx^2.$$

Die linke Seite der Stokes-Formel ergibt sich sofort als Verallgemeinerung der Integration von einem 2-Simplex auf einen r -Simplex:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Delta_r}} d\psi &= (-1)^{r-1} \int_{\overline{\Delta_r}} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \cdot dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int_{\overline{\Delta_{r-1}}} dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \int_0^{1-\sum_{i=1}^{r-1} x^i} \frac{\partial a(x)}{\partial x^r} dx^r \\ &= (-1)^{r-1} \int_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \\ &\quad - (-1)^{r-1} \int_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1}. \end{aligned}$$

Nun zur rechten Seite. Hier muß man sich zunächst einmal über den Rand $\partial \overline{\Delta_r}$ klar werden. Der orientierte Simplex $\overline{\Delta_r} = [p_0 p_1 \dots p_r]$ hat den Rand

$$\partial \overline{\Delta_r} = [p_1 \dots p_r] - [p_0 p_2 \dots p_r] + \dots + (-1)^r [p_0 p_1 \dots p_{r-1}].$$

Nun ist $\psi(x) = 0$ auf Hyperflächen, auf denen ein x^i , $1 \leq i \leq r-1$ konstant ist. Dadurch fallen die meisten Beiträge im Randintegral über ψ weg:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \overline{\Delta_r}} \psi &= \int_{[p_1 \dots p_r] - [p_0 p_2 \dots p_r] + \dots + (-1)^r [p_0 p_1 \dots p_{r-1}]} \psi \\ &= \int_{[p_1 \dots p_r]} \psi - \int_{[p_0 p_2 \dots p_r]} \psi + \dots + (-1)^r \int_{[p_0 \dots p_{r-1}]} \psi \\ &= \int_{[p_1 \dots p_r]} \psi + (-1)^r \int_{[p_0 \dots p_{r-1}]} \psi \\ &= \int_{[p_1 \dots p_r]} a(x^1, \dots, x^r) dx^2 \cdot \dots \cdot dx^r \end{aligned}$$

$$+ (-1)^r \int_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1}.$$

Jetzt kann man statt über $[p_1 \dots p_r]$ auch über $[p_0 \dots p_{r-1}]$ integrieren, also geometrisch betrachtet die Hyperfläche $[p_1 \dots p_r]$ orientierungserhaltend auf die Hyperfläche $[p_0 \dots p_{r-1}]$ projizieren.

$$\begin{aligned} \int_{\partial \overline{\Delta_r}} \psi &= \int_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \\ &\quad - (-1)^{r-1} \int_{[p_0 \dots p_{r-1}]} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \\ &= \int_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1} x^i) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \\ &\quad - (-1)^{r-1} \int_{\overline{\Delta_{r-1}}} a(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{r-1} \\ &= \int_{\overline{\Delta_r}} d\psi. \end{aligned} \quad \square$$

21.2 Von Simplex zu singulären Simplex

Man definiert einen sog. *singulären r -Simplex* s_r als die stetige Abbildung eines Simplex $\overline{\Delta_r}$ eines Simplicial-Komplexes K in einen topologischen Raum X . Im Gegensatz zur simplizialen Homologie verwendet man in der singulären Homologie als Ausgangspunkt immer *abgeschlossene* Simplexe, also:

$$\overline{\Delta_r} := [p_0 p_1 \dots p_r].$$

In der algebraischen Topologie verwendet man für s_r stetige Abbildungen, d.h. $s_r \in C^0$. Die Menge der singulären Simplexe S_r ist also keine Menge von einfachen Simplexen oder deren Bildern, sondern eine Menge von Abbildungen!

$$S_r := \{s_r \mid s_r : K \rightarrow X, \overline{\Delta_r} \mapsto s_r(\overline{\Delta_r}), s_r \in C^0\}. \quad (21.2.1)$$

Mit $s_r|_{[p_0 p_1 \dots p_r]}$ wird die Einschränkung von s_r auf den abgeschlossenen Simplex $[p_0 p_1 \dots p_r]$ bezeichnet.

Der singuläre s_r Simplex heißt singulär, weil zum ersten nicht verlangt wird, daß s_r invertierbar sein muß, und weil man zum zweiten in X nicht mehr wie in \mathbb{R}^n von einer geometrischen Unabhängigkeit der Eckpunkte sprechen kann.

Wenn jetzt der topologische Raum X eine Mannigfaltigkeit M ist, dann kann man mittels dieser singulären Simplexe jetzt die Integration in einer Mannigfaltigkeit M verallgemeinern:

$$\int_{s_r(\overline{\Delta_r})} \omega := \int_{\overline{\Delta_r}} s_r^* \omega . \tag{21.2.2}$$

Weiter definiert man genau wie im Fall der simplizialen Homologie eine r -Kettengruppe $C_r(X)$, eine r -Zyklusgruppe $Z_r(X)$, einen Randoperator ∂_r , eine r -Randkettengruppe $B_r(X)$ und eine r -Homologiegruppe $H_r(X)$.

Die r -Kettengruppe $C_r(X)$ bezüglich einer abelschen Gruppe G definiert man als die *endliche* Summe über singuläre Simplexe s_r :

$$C_r(K) := \{c \mid c = \sum_k g_k s_{r,k} \text{ mit } g_k \in G\} . \tag{21.2.3}$$

Für einen Simplex Δ_r hatten wir den Randoperator in 20.4.5 definiert als

$$\partial_r \Delta_r = \partial_r(p_0 p_1 \dots p_r) := \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) ,$$

wobei \hat{p}_i anzeigt, daß der Vertex p_i im Simplex $\Delta_r := (p_0 p_1 \dots p_i \dots p_r)$ ausgelassen wird.

Entsprechend definiert man den singulären Randoperator eines singulären Simplex s_r als

$$\partial_0 s_0 := 0 , \tag{21.2.4}$$

$$\partial_r s_r = \partial_r(s_r \mid [p_0 p_1 \dots p_r]) := \sum_{i=0}^r (-1)^i s_{r-1} \mid [p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r] \text{ für } r > 0 . \tag{21.2.5}$$

Dies kann man, wenn man mag, Stöcker u. Zieschang (1994) folgend, noch etwas kompakter formulieren. Sei δ_{r-1}^i die Abbildung eines $(r-1)$ -Standardsimplex $\overline{\Delta_{r-1}} = [p_0 p_1 \dots p_{r-1}]$ auf die i -te Randseite von $\overline{\Delta_r}$, also auf $\overline{\Delta_{r-1}^i} = [p'_0 p'_1 \dots \hat{p}'_i \dots p'_r]$:

$$\delta_{r-1}^i : \overline{\Delta_{r-1}} \rightarrow \overline{\Delta_{r-1}^i} \text{ mit}$$

$$\delta_{r-1}^i : [p_0 p_1 \dots p_i \dots p_{r-1}] \mapsto [p'_0 p'_1 \dots \hat{p}'_i \dots p'_r] \text{ mit} \tag{21.2.6}$$

$$p'_0 = p_0, p'_1 = p_1, \dots, p'_{i-1} = p_{i-1}, p'_{i+1} = p_i, \dots, p'_r = p_{r-1}.$$

Damit kann man den singulären Randoperator schreiben als

$$\partial_r : S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X) \quad \partial_r s_r := \sum_{i=0}^r (-1)^i (s_{r-1} \circ \delta_{r-1}^i), \quad (21.2.7)$$

$$\partial_r \sum_k g_k s_{r,k} := \sum_k g_k (\partial_r s_{r,k}).$$

Wie bei den einfachen Simplexen zeigt man leicht, daß ∂_r auch für singuläre Simplexe idempotent ist.

Lemma 21.2.1 1. Für $r \geq 2$ und $0 \leq k < j \leq r$ gilt $\delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k = \delta_{r-1}^k \circ \delta_{r-2}^{j-1}$.

2. ∂_r ist idempotent, d.h. $\partial_{r-1} \partial_r s_r = 0$.

Beweis: 1. Sei $r \geq 2$ und $0 \leq k < j \leq r$, dann folgt:

$$\begin{aligned} & \delta_{r-2}^k ([p_0 p_1 \dots p_{k-1} p_k \dots p_{r-2}]) \\ &= [p'_0 p'_1 \dots p'_{k-1} \hat{p}'_k p'_{k+1} \dots p'_{r-1}] = [p_0 p_1 \dots p_{k-1} \hat{p}'_k p_k \dots p_{r-2}] \\ & \delta_{r-1}^j ([p'_0 p'_1 \dots p'_{k-1} \hat{p}'_k p'_{k+1} \dots p'_{j-1} p'_j p'_{j+1} \dots p'_{r-1}]) \\ &= [p''_0 p''_1 \dots p''_{k-1} \hat{p}''_k p''_{k+1} \dots p''_{j-1} \hat{p}''_j p''_{j+1} \dots p''_r] \\ &= [p_0 p_1 \dots p_{k-1} \hat{p}''_k p_k \dots p_{j-2} \hat{p}''_j p_{j-1} \dots p_{r-2}]. \\ & \delta_{r-2}^{j-1} ([p_0 p_1 \dots p_{j-2} p_{j-1} \dots p_{r-2}]) \\ &= [p'_0 p'_1 \dots p'_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p'_j \dots p'_{r-1}] = [p_0 p_1 \dots p_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p_{j-1} \dots p_{r-2}] \\ & \delta_{r-1}^k ([p'_0 p'_1 \dots p'_{k-1} p'_k p'_{k+1} \dots p'_{j-2} \hat{p}'_{j-1} p'_j \dots p'_{r-1}]) \\ &= [p''_0 p''_1 \dots p''_{k-1} \hat{p}''_k p''_{k+1} \dots p''_{j-1} \hat{p}''_j p''_{j+1} \dots p''_r] \\ &= [p_0 p_1 \dots p_{k-1} \hat{p}''_k p_k \dots p_{j-2} \hat{p}''_j p_{j-1} \dots p_{r-2}]. \end{aligned}$$

Also gilt $\delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k = \delta_{r-1}^k \circ \delta_{r-2}^{j-1}$.

2.

$$\partial_{r-1} \partial_r s_r = \partial_{r-1} \left(\sum_{j=0}^r (-1)^j (s_{r-1} \circ \delta_{r-1}^j) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^r (-1)^k (-1)^j (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) \\
 &= \sum_{\substack{k=0 \\ j \leq k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ k < j}}^{j=r} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) \\
 &= \sum_{\substack{k=0 \\ j \leq k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) + \sum_{\substack{j=1 \\ k < j}}^{j=r} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^k \circ \delta_{r-2}^{j-1}) .
 \end{aligned}$$

Jetzt ersetzt man im 2. Summanden $k \rightarrow j$, $j \rightarrow k + 1$ und erhält:

$$\begin{aligned}
 \partial_{r-1} \partial_r s_r &= \sum_{\substack{k=0 \\ j \leq k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) + \sum_{\substack{k+1=1 \\ j < k+1}}^{k+1=r} (-1)^{k+1+j} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^{k+1-1}) \\
 &= \sum_{\substack{k=0 \\ j \leq k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) + \sum_{\substack{k=0 \\ j \leq k}}^{k=r-1} (-1)^{j+k+1} (s_{r-2} \circ \delta_{r-1}^j \circ \delta_{r-2}^k) \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

□

Die Gruppe der r -Zyklen $Z_r(X)$ ist die Untergruppe der r -Ketten $C_r(X)$ ohne Rand, d.h.

$$Z_r(X) = \{c \mid c \in C_r(X), \partial_r c = 0\} = \ker(\partial_r) . \tag{21.2.8}$$

Wegen $\partial_0 s_0 = 0$ ist die 0-Kette $C_0(X)$ stets ein Zyklus, also $C_0(X) = Z_0(X)$.

Die Gruppe der r -Randketten $B_r(X)$ ist die Untergruppe der r -Ketten $C_r(X)$, die Rand für eine $(r + 1)$ -Kette aus $C_{r+1}(X)$ sind, d.h.

$$B_r(X) = \{c \mid c \in C_r(X), c = \partial_{r+1} d \text{ mit } d \in C_{r+1}(X)\} = \text{Im}(\partial_{r+1}) . \tag{21.2.9}$$

Die r -Homologiegruppe $H_r(X)$ ist dann wieder die Quotientengruppe

$$H_r(X) := Z_r(X) / B_r(X) = \ker(\partial_r) / \text{Im}(\partial_{r+1}) \quad \text{für } r \geq 0 . \tag{21.2.10}$$

Soweit, so einfach :-)

Doch während ein simplizialer Komplex K aus endlich vielen Basis-Simplex erzeugt wird und daher $H_r(K) = 0$ ist für $r > m$, wenn m die Raumdimension von K ist, kann sich ein singulärer Komplex aus einer *sehr großen* Anzahl singulärer Simplexe zusammensetzen, kurzum: die Dimension der r -Kettengruppe $C_r(X)$ ist überabzählbar.

Es ist daher alles andere als trivial, daß die simplizialen und die singulären Homologiegruppen tatsächlich in irgendeiner Weise zueinander isomorph sein könnten! Diese Aussage soll am Ende dieses Kapitels über singuläre Homologie bewiesen werden.

Zuvor sollen aber noch einige Zusammenhänge gezeigt werden, die wir bereits bei der simplizialen Homologie gefunden hatten.

Lemma 21.2.3 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y , und sei $C_r(X)$ eine r -Kettengruppe, dann gilt für die induzierten Abbildungen $f_{r*} : C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$ die Eigenschaft $f_*\partial = \partial f_*$, oder ausführlicher geschrieben $f_{r-1*}\partial_r = \partial_r f_{r*}$. Ein solches System von Abbildungen f_{r*} mit dieser Kommutativität bzgl. der Randoperatoren ∂_r heißt eine Kettenabbildung.*

Beweis:

$$\partial_r(f_{r*}s_r) = \partial_r(f_r \circ s_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (f_{r-1} \circ s_{r-1}) \circ \delta_{r-1}^i = \sum_{i=0}^r (-1)^i (f_{r-1*}s_{r-1}) \circ \delta_{r-1}^i ,$$

$$f_{r-1*}(\partial_r s_r) = f_{r-1*} \sum_{i=0}^r (-1)^i s_{r-1} \circ \delta_{r-1}^i = \sum_{i=0}^r (-1)^i (f_{r-1*}s_{r-1}) \circ \delta_{r-1}^i . \quad \square$$

Lemma 21.2.5 *Sei $P := \{p_0\}$ ein topologischer Raum, der nur aus dem Punkt p_0 bestehe. Dann ist*

$$H_0(P) = G , \quad H_r(P) = \emptyset \quad \text{für } r > 0 \} . \quad (21.2.11)$$

Beweis: Für $r < 0$ ist $H_r(P) = \emptyset$ per Definition. Für $r \geq 0$ gibt es nur ein einziges singuläres Simplex $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow P$, nämlich die konstante Abbildung. Also folgt für $r > 0$:

$$\partial_r s_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (s_{r-1} \circ \delta_{r-1}^i) = \sum_{i=0}^r (-1)^i s_{r-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } r > 0 \text{ und } r \text{ ungerade ,} \\ s_{r-1} & \text{für } r > 0 \text{ und } r \text{ gerade .} \end{cases}$$

Für $r > 0$ und r ungerade ist s_r wegen $\partial_r s_r = 0$ ein Zyklus, und wegen $\partial_{r+1} s_{r+1} = s_r$ gleichzeitig eine Randkette, also ist $H_r(P) = \emptyset$. Für $r > 0$ und r gerade ist der $\ker(\partial_r) = 0$ und damit ist $Z_r(P) = \emptyset$ und damit auch $H_r(P) = \emptyset$.

Im Fall $r = 0$ gilt $B_0(P) = \text{Im}(\partial_1) = \emptyset$ und $Z_0(P) = \{\sum_k g_k s_{0,k} \text{ mit } g_k \in G\} = \{g s_0\} \simeq G$. Also ist $H_0(P) \simeq G$. \square

Für wegzusammenhängende topologische Räume X findet man wie im Fall der simplizialen Komplexe K eine wichtige allgemeine Aussage über $H_0(X)$.

Satz 21.2.7 *X ist genau dann ein wegzusammenhängender topologischer Raum, wenn gilt*

$$H_0(X) \simeq G . \quad (21.2.12)$$

Wenn X ein topologischer Raum ist, der aus n disjunkten Teilmengen besteht, die jeweils wegzusammenhängend sind, also

$$X := \bigcup_{i=1}^n X_i \quad \text{mit } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für } i, j = 1, \dots, n ,$$

dann gilt

$$H_r(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^n H_r(X_i) \quad \text{für } r \geq 0 . \quad (21.2.13)$$

Beweis: Sei $s_r : \bar{\Delta}_r \rightarrow X$, dann ist $s_r(\bar{\Delta}_r) \subset X_i$ für genau ein $i \in \{1, \dots, n\}$, da $\bar{\Delta}_r$ wegzusammenhängend und s_r stetig ist. Also kann man jede r -Kette $c \in C_r(X)$ eindeutig als Summe über endlich viele Summanden $c_i \in C_r(X_i)$ schreiben, d.h.

$$\bigoplus_{i=1}^n C_r(X_i) = C_r(X) .$$

Der Randoperator $\partial_r : C_r(X_i) \rightarrow C_{r-1}(X_i)$ erhält diese Zerlegung in die verschiedenen X_i und daher folgt

$$\bigoplus_{i=1}^n Z_r(X_i) = Z_r(X) \quad \text{und} \quad \bigoplus_{i=1}^n B_r(X_i) = B_r(X) ,$$

$$\begin{aligned} H_r(X) &= Z_r(X)/B_r(X) = \left(\bigoplus_{i=1}^n Z_r(X_i) \right) / \left(\bigoplus_{i=1}^n B_r(X_i) \right) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (Z_r(X_i)/B_r(X_i)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n H_r(X_i) . \end{aligned}$$

Wenn nun X nur aus einer einzigen wegzusammenhängenden Komponente besteht, dann soll jetzt $H_0(X) \simeq G$ gezeigt werden. Wegen $\partial_0 = 0$ ist $Z_0(X) = C_0(X)$ und also $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) = C_0(X)/\text{Im } \partial_1$. Man definiert einen Homomorphismus

$$\epsilon : C_0(X) \rightarrow G \quad \text{mit} \quad \epsilon\left(\sum_k g_k s_{0,k}\right) = \sum_k g_k , \quad \text{wobei die } g_k \in G \text{ sind.}$$

Zunächst beweist man, daß $\ker(\epsilon) = \text{Im}(\partial_1)$ ist:

1. $\text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon)$: denn sei $s_1 : \Delta_1 \rightarrow X$, dann gilt

$$\epsilon(\partial_1 s_1) = \epsilon(s_1|_{p_1} - s_1|_{p_0}) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon) .$$

2. $\ker(\epsilon) \subset \text{Im}(\partial_1)$: denn sei $\epsilon(\sum_k g_k s_{0,k}) = 0$, dann ist auch $\sum_k g_k = 0$. Die Bilder $s_{0,k}(p_i)$ sind einfach Punkte in X , also kann man sich einen festen Punkt x_0 nehmen und einen singulären 0-Simplex $s_{0,0}$, dessen Bild von p_0 gerade x_0 ist, d.h. $x_0 = s_{0,0}(p_0)$, als Ausgangspunkt für die folgenden Pfade $\tau_k : [p_0, p_1] \rightarrow X$ von $s_{0,0}(p_0)$ nach $s_{0,k}(p_1)$ wählen. Diese Pfade τ_k sind nun singuläre 1-Simplexe und es gilt

$$\partial_1(\tau_k | [p_0, p_1]) = s_{0,k}|_{p_1} - s_{0,0}|_{p_0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \partial_1\left(\sum_k g_k \tau_k\right) &= \sum_k g_k s_{0,k}|_{p_1} - \sum_k g_k s_{0,0}|_{p_0} = \sum_k g_k s_{0,k}|_{p_1} - s_{0,0}|_{p_0} \sum_k g_k \\ &= \sum_k g_k s_{0,k}|_{p_1} . \end{aligned}$$

Damit ist $\sum_k g_k s_{0,k}|_{p_1}$ ein Rand und also $\ker(\epsilon) \subset \text{Im}(\partial_1)$.

Aus 1. und 2, folgt $\ker(\epsilon) = \text{Im}(\partial_1)$. Nun gilt für die Abbildung $\epsilon : C_0(X) \rightarrow G$, daß die Abbildung $C_0(X)/\ker(\epsilon) \rightarrow G$ ein Isomorphismus ist und damit folgt

$$H_0(X) = C_0(X)/\text{Im} \partial_1 = C_0(X)/\ker(\epsilon) \simeq G .$$

Wenn also X aus n wegzusammenhängenden Teilmengen X_i besteht, dann folgt

$$H_0(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^n H_0(X_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n G ,$$

und damit gilt $H_0(X) \simeq G$ genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist. \square

In der simplizialen Homologie hatten wir für m -dimensionale, wegzusammenhängende, simpliziale Komplexe K gefunden, daß die höheren Homologiegruppen alle leer sind, daß also $H_r(K) = \emptyset$ für $r = 1, \dots, m$. Dies beruhte aber nicht zuletzt darauf, daß die entsprechenden Polyeder $|K|$ alle Teilmengen des \mathbb{R}^m waren. Für beliebige topologische Räume X und die singuläre Homologie können wir dies nicht beweisen.

Definition 21.2.9 *Wegzusammenhängende topologische Räume X mit der Eigenschaft $H_r(X) = \emptyset$ für $r > 0$ nennt man azyklische Räume, weil es keine Zyklen gibt, die nicht gleichzeitig auch Ränder sind.*

Für konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ jedoch können wir jedoch wie in der simplizialen Homologie mittels der Kegelkonstruktion zeigen, daß $H_r(A) = \emptyset$ für $r > 0$ gilt, d.h. das solche A azyklisch sind.

Definition 21.2.10 Seien $\overline{\Delta}_r = [p_0, \dots, p_r]$ ein r -dimensionaler Simplex, $p \in \mathbb{R}$, $\overline{\Delta}_{r+1} = [p'_0, p'_1, \dots, p'_{r+1}] = [p, p_0, \dots, p_r]$ ein $(r+1)$ -dimensionaler Simplex und $p * \overline{\Delta}_r$ der simpliziale Kegel mit Spitze p :

$$p * : \overline{\Delta}_r \rightarrow \overline{\Delta}_{r+1} \quad \text{mit} \quad p * [p_0, \dots, p_r] := (1-t)p + t\delta_r^0(\overline{\Delta}_r) \quad \text{mit } t \in [0, 1]. \quad (21.2.14)$$

Seien weiter $A \subset \mathbb{R}^m$ konvex, $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow A$, und $x \in A$, dann definiert man den singulären Kegel über s_r mit Spitze x als

$$x * s_r : \overline{\Delta}_{r+1} \rightarrow A \quad \text{mit}$$

$$(x * s_r)((1-t)p + t\delta_r^0(\overline{\Delta}_r)) := (1-t)x + ts_r(\overline{\Delta}_r) \quad \text{mit } t \in [0, 1]. \quad (21.2.15)$$

Entsprechend definiert man einen Kegel über einer r -Kettengruppe $c \in C_r(X)$ als

$$x * c := \sum_k g_k(x * s_{r,k}) \quad \text{mit } g_k \in G.$$

Mit Hilfe dieser Kegelkonstruktion kann man nun beweisen, daß konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ azyklisch sind.

Lemma 21.2.11 1. Sei $A \subset \mathbb{R}^m$, $x \in A$, $c \in C_r(A)$ dann gilt

$$\partial_{r+1}(x * c) = \begin{cases} c - x & \text{für } r = 0, \\ c - x * \partial_r c & \text{für } r > 0. \end{cases} \quad (21.2.16)$$

2. Wenn $A \subset \mathbb{R}^m$ und A konvex ist, dann gilt

$$A \text{ ist azyklisch, d.h. } H_r(A) = \emptyset \text{ für } r > 0. \quad (21.2.17)$$

Beweis: 1. Wegen der Linearität von ∂_r genügt es, diese Aussage für $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow A$ zu beweisen. Sei zunächst $r = 0$, dann ist $x * s_0 : \overline{\Delta}_1 \rightarrow A$ ein Weg von x nach $s_0(p_0)$ und damit ist

$$\partial_1(x * s_0) = s_0 - x.$$

Für $r > 0$ folgt

$$\begin{aligned} \partial_{r+1}(x * s_r) &= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i ((x * s_r) | [p'_0, \dots, \hat{p}'_i, \dots, p'_{r+1}]) \\ &= (x * s_r) | [\hat{p}'_0, p'_1, \dots, p'_{r+1}] + \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i ((x * s_r) | [p'_0, p'_1, \dots, \hat{p}'_i, \dots, p'_{r+1}]) \\ &= (s_r) | [p'_1, \dots, p'_{r+1}] + x * \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i ((s_r) | [p'_1, \dots, \hat{p}'_i, \dots, p'_{r+1}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s_r) | [p_0, \dots, p_r] + x * (-1) \sum_{i=0}^r (-1)^i ((s_r) | [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_r]) \\
&= s_r - x * \partial_r s_r .
\end{aligned}$$

2. Sei $r > 0$ und $c \in Z_r(A)$ ein Zyklus, d.h. $\partial_r c = 0$. Dann gilt für den Rand des Kegels über c : $\partial_{r+1}(x * c) = c$. Also ist jeder Zyklus ein Rand, d.h. $Z_r(A) = B_r(A)$ und damit ist $H_r(A) = Z_r(A)/B_r(A) = \emptyset$. \square

21.3 Exakte Sequenzen und Diagrammjagd

Zu den Standardwerkzeuge der algebraischen Topologie gehören die sog. *exakten Sequenzen* und das *Fünfer-Lemma*. Diese Werkzeuge werden sich auch später noch als sehr hilfreich herausstellen, wenn wir den Isomorphismus zwischen den Homologie- und den entsprechenden Kohomologie-Gruppen zeigen werden.

Eine Sequenz von Homomorphismen

$$\dots \longrightarrow A_{r+1} \xrightarrow{\alpha_{r+1}} A_r \xrightarrow{\alpha_r} A_{r-1} \longrightarrow \dots$$

heißt *exakt*, wenn $\ker(\alpha_r) = \text{Im}(\alpha_{r+1})$ ist.

Wenn es sich bei der Sequenz um eine r -Kettengruppe $C_r(K)$ handelt, bei der die Abbildungen α_r die Randoperatoren ∂_r seien, dann gilt wegen $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ ja grundsätzlich $\text{Im} \alpha_{r+1} \subset \ker \alpha_r$. Und wenn dann auch die Umkehrung $\ker \alpha_r \subset \text{Im} \alpha_{r+1}$ gelten sollte, dann ist ja jeder r -Zyklus aus $Z_r(K)$ zugleich eine r -Randkette aus $B_r(K)$ und damit ist die r -Homologiegruppe trivial, d.h. $H_r(K) = 0$.

Einige einfache Beispiele:

1. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B$ exakt $\Leftrightarrow \ker(j) = \text{Im}(i) = 0$, d.h. j injektiv ; (21.3.1)
2. $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} 0$ exakt $\Leftrightarrow B = \ker(k) = \text{Im}(j)$, d.h. j surjektiv ;
3. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} 0$ exakt $\Leftrightarrow \text{Im}(i) = B$, j injektiv & surjektiv=isomorph ;
4. $0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} 0$ exakt $\Leftrightarrow j$ injektiv, k surjektiv, $\ker(k) = \text{Im}(j)$.

Im Beispiel 4 induziert k einen Isomorphismus $k_{\#} : B/\text{Im}(j) \rightarrow C$. Wenn nun $j : A \rightarrow B$ eine Einbettung ist, dann ist $A \simeq \text{Im}(j)$ und $k_{\#} : B/A \rightarrow C$ ist ein Isomorphismus.

Eine solche exakte Sequenz wie in 4., also

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0 \Leftrightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j_{\#}} B/A \rightarrow 0 \quad (21.3.2)$$

heißt eine *kurze exakte Sequenz* und ist ein Standardelement für die folgenden Betrachtungen.

Wenn im folgenden Diagramm die Zeilen exakte Sequenzen sind und die Spalten Kettenkomplexe, dann ist das Diagramm kommutativ und heißt *kurze exakte Sequenz eines Ketten-Komplexes*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & A_{r+1} & \xrightarrow{i} & B_{r+1} & \xrightarrow{j} & C_{r+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & A_r & \xrightarrow{i} & B_r & \xrightarrow{j} & C_r \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & A_{r-1} & \xrightarrow{i} & B_{r-1} & \xrightarrow{j} & C_{r-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir im obigen Bild und im folgenden Text die Abbildungen i_r, j_r, \dots einfach zu i, j, \dots abgekürzt.

Dieser kurzen exakten Sequenz eines Ketten-Komplexes entspricht eine *lange exakte Sequenz* der entsprechenden Homologiegruppen:

$$\dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(B) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(C) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(B) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \quad (21.3.3)$$

Beweis: 1. Nach Voraussetzung sind die oben definierten Abbildungen i, j Ketten-Abbildungen. Sie induzieren daher die Abbildungen i_\bullet, j_\bullet zwischen den entsprechenden Homologiegruppen. Der zentrale Punkt ist jedoch die Konstruktion der Abbildung $\partial_\bullet : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$, womit wir beginnen wollen. Sei $c \in C_n$ ein Zyklus, d.h. $\partial c = 0$. Da j surjektiv ist existiert ein $b \in B_n$ mit $c = j(b)$ und dafür gilt

$$j(\partial b) = \partial(j(b)) = \partial c = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial b \in B_{n-1} \text{ mit } \partial b \in \ker(j) .$$

Wegen der Exaktheit, d.h. wegen $\ker(j) = \text{Im}(i)$, gibt es ein $a \in A_{n-1}$ mit $\partial b = i(a)$. Wegen

$$i(\partial a) = \partial(i(a)) = \partial(\partial b) = 0 \quad \text{und } i \text{ injektiv} \quad \Rightarrow \quad \partial a = 0 .$$

Also ist $a \in A_{n-1}$ ein Zyklus. Damit kann man ∂_\bullet definieren als die Abbildung, welche die Klasse $[c] \in H_n(C)$ in die Klasse $[a] \in H_{n-1}(A)$ abbildet, also $\partial_\bullet[c] = [a]$.

Daß diese Definition eindeutig ist, sieht man folgendermaßen:

$$c' \in [c] \Leftrightarrow c' = c + \partial c_0 \quad \text{mit} \quad c_0 = j(b_0) \quad \text{für ein} \quad b_0 \in B_n \Rightarrow$$

$$c' = c + \partial c_0 = c + \partial j(b_0) = j(b) + j(\partial b_0) = j(b + \partial b_0).$$

Nun ist allerdings die Zuordnung von $c = j(b)$ nicht eindeutig, denn da j surjektiv ist könnte es zusätzlich zu b auch ein oder mehrere $b' \in B_n$ mit $c = j(b')$ geben.

$$c = j(b) = j(b') \Rightarrow j(b - b') = 0 \Rightarrow (b - b') \in \ker(j) = \text{Im}(i),$$

also gibt es ein $a_0 \in A_n$ mit $(b - b') = i(a_0)$. Damit ist die allgemeine Form von c'

$$c' = j(b' + i(a_0) + \partial b_0) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \partial(b' + i(a_0) + \partial b_0) &= \partial(b') + \partial i(a_0) + \partial \partial b_0 = \partial(b') + i(\partial a_0) \\ &= i(a') + i(\partial a_0) = i(a' + \partial a_0). \end{aligned}$$

d.h. verschiedene $c' \in [c]$ werden in die gleiche Klasse $[a]$ abgebildet.

2. $\partial_\bullet : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ ist ein Homomorphismus, denn seien $b_1, b_2 \in B_n$, $c_1, c_2 \in C_n$, $a_1, a_2 \in A_{n-1}$ Elemente wie in der obigen Konstruktion von ∂_\bullet , dann gilt ja $\partial_\bullet[c_1] = [a_1]$ und $\partial_\bullet[c_2] = [a_2]$. Es folgt

$$i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial(b_1) + \partial(b_2) = \partial(b_1 + b_2)$$

$$j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2 \Rightarrow$$

$$\partial_\bullet([c_1] + [c_2]) = \partial_\bullet[(c_1 + c_2)] = [(a_1 + a_2)] = [a_1] + [a_2] = \partial_\bullet[c_1] + \partial_\bullet[c_2].$$

3. Jetzt soll gezeigt werden, daß die obige lange Sequenz tatsächlich exakt ist.

a. $\text{Im}(i_\bullet) \subset \ker(j_\bullet)$: die Sequenz $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$ ist exakt und daraus folgt

$$\ker(j) = \text{Im}(i) \Rightarrow j i = 0 \Rightarrow j_\bullet i_\bullet = 0 \Rightarrow \text{Im}(i_\bullet) \subset \ker(j_\bullet).$$

b. $\text{Im}(j_\bullet) \subset \ker(\partial_\bullet)$: aus der Injektivität von i folgt

$$[b] \in H_n(B) \Rightarrow \partial b = 0 \Rightarrow \partial b = i(a) = 0 \quad \text{mit} \quad a \in A_{n-1} \Rightarrow a = 0,$$

$$\partial_\bullet j_\bullet [b] = [a] = 0 \Rightarrow \text{Im}(j_\bullet) \subset \ker(\partial_\bullet).$$

c. $\text{Im}(\partial_\bullet) \subset \ker(i_\bullet)$:

$$[b] \in H_n(B) \Rightarrow \partial b = 0, [c] \in H_n(C), [a] \in H_{n-1}(A) \quad \text{und}$$

$$[c] \xrightarrow{\partial_\bullet} [a] \xrightarrow{i_\bullet} i_\bullet[a] = [i(a)] = [\partial b] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\partial_\bullet) \subset \ker(i_\bullet).$$

d. $\ker(j_\bullet) \subset \text{Im}(i_\bullet)$: sei $[b] \in \ker(j_\bullet) \subseteq H_n(B)$, dann ist b ein Zyklus aus B_n , der durch j auf eine Randkette $j(b) \in C_n$ abgebildet wird, denn $[j(b)] = 0 = \ker(j_\bullet)$. Wegen der Kommutativität des Kettenkomplexes gibt es ein $c' \in C_{n+1}$ mit $j(b) = \partial c'$. Weil j surjektiv ist gibt es aber auch ein $b' \in B_{n+1}$ mit $c' = j(b')$. Damit folgt

$$j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = j(b) - \partial c' = j(b) - j(b) = 0.$$

Also ist $b - \partial b' \in \ker(j) = \text{Im}(i)$ und damit gibt es ein $a \in A_n$ mit $i(a) = b - \partial b'$. Weil b ein Zyklus ist folgt

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0.$$

Weil i injektiv ist folgt $\partial a = 0$ und damit ist $a \in A_n$ ein Zyklus. Also gilt für $[b] \in \ker(j_\bullet)$

$$[b] = [b - \partial b'] = [i(a)] = i_\bullet[a] \quad \Rightarrow \quad \ker(j_\bullet) \subset \text{Im}(i_\bullet).$$

e. $\ker(\partial_\bullet) \subset \text{Im}(j_\bullet)$: sei $[c] \in \ker(\partial_\bullet) \subseteq H_n(C)$, dann gilt für $[a] = \partial_\bullet[c] \in H_{n-1}(A)$, daß a eine Randkette in A_{n-1} ist, d.h. es gibt ein $a' \in A_n$ mit $a = \partial a'$. Weiter gilt aufgrund der Konstruktion von ∂_\bullet für $b \in B_n$ der Zusammenhang $\partial b = i(a)$ und damit folgt:

$$\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0.$$

Also ist $b - i(a')$ ein Zyklus in B_n , und wegen

$$j(b - i(a')) = j(b) - j i(a') = j(b) = c \in C_n \quad \Rightarrow$$

$$j_\bullet : [b - i(a')] \mapsto [c] \quad \Rightarrow \quad \ker(\partial_\bullet) \subset \text{Im}(j_\bullet).$$

f. $\ker(i_\bullet) \subset \text{Im}(\partial_\bullet)$: sei $[a] \in \ker(i_\bullet) \subseteq H_{n-1}(A)$ mit einem Zyklus $a \in A_{n-1}$. Deshalb und wegen der Konstruktion von ∂_\bullet gibt es ein $b \in B_n$ mit $\partial b = i(a)$. Dann ist

$$\partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0$$

und damit ist $j(b)$ ein Zyklus aus C_n mit

$$\partial_\bullet : [j(b)] \mapsto [a] \quad \Rightarrow \quad \ker(i_\bullet) \subset \text{Im}(\partial_\bullet). \quad \square$$

Das folgende berühmte *Fünfer-Lemma* der algebraischen Topologie sieht zunächst einmal nur recht technisch aus, stellt aber in vielen Zusammenhängen ein starkes Werkzeug dar und erleichtert zahlreiche Beweise. Wir werden dieses Lemma u.a. beim Beweis des Isomorphismus von simplizialen und singulären Homologiegruppen anwenden.

Lemma 21.3.2 (Fünfer-Lemma)

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\
A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
\end{array}$$

Dieses Diagramm sei ein kommutatives Diagramm zwischen den additiven, abelschen Gruppen $A, A', B, B', C, C', D, D', E, E'$, wobei beide Zeilen exakte Sequenzen seien. Weiter seien von den fünf Gruppenhomomorphismen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ gerade $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ Isomorphismen. Dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Beweis: Der Beweis gliedert sich in 2 Teile und ist ein schönes Beispiel für die sog. Diagrammjagd:

1. γ ist surjektiv, wenn β, δ surjektiv und ϵ injektiv sind,
2. γ ist injektiv, wenn β, δ injektiv und α surjektiv sind.

1. Sei $c' \in C'$, dann gibt es ein $d \in D$ mit $k'(c') = \delta(d)$, da δ surjektiv ist. Weiter ist $\epsilon l(d) = l' \delta(d) = l' k'(c') = 0$, da die untere Zeile exakt ist, d.h. $\text{Im}(k') = \ker(l')$. Da ϵ injektiv ist, ist also auch $l(d) = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\text{Im}(k) = \ker(l)$, gibt es also eine $c \in C$ mit $d = k(c)$. Jetzt betrachtet man $c' - \gamma(c)$ unter dem Homomorphismus k' und erhält

$$k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'(\gamma(c)) = k'(c') - \delta(k(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0.$$

Wegen der Exaktheit der unteren Zeile, d.h. $\text{Im}(j') = \ker(k')$, gibt es also ein $b' \in B'$ mit $c' - \gamma(c) = j'(b')$. Weil β surjektiv ist gibt es ein $b \in B$ mit $b' = \beta(b)$. Weil γ ein Homomorphismus ist folgt

$$\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma(j(b)) = \gamma(c) + j'(\beta(b)) = \gamma(c) + j'(b') = c',$$

d.h. zu jedem $c' \in C'$ existiert mit $(c + j(b)) \in C$ ein Element aus C das auf c' abgebildet wird und also ist γ surjektiv.

2. Sei jetzt $c \in \ker(\gamma)$, also $\gamma(c) = 0$. Weiter ist $\delta(k(c)) = k'(\gamma(c)) = 0$ und da δ injektiv ist folgt $k(c) = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\text{Im}(j) = \ker(k)$, gibt es ein $b \in B$ mit $c = j(b)$. Für $\beta(b)$ gilt dann

$$j'(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0.$$

Wegen der Exaktheit der unteren Zeile, d.h. $\text{Im}(i') = \ker(j')$, gibt es ein $a' \in A'$ mit $\beta(b) = i'(a')$. Da α surjektiv ist gibt es ein $a \in A$ mit $a' = \alpha(a)$.

$$\beta(i(a) - b) = \beta(i(a)) - \beta(b) = i'(\alpha(a)) - \beta(b) = i'(a') - \beta(b) = 0.$$

Weil β injektiv ist folgt $i(a) - b = 0$, oder $b = i(a)$. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile, d.h. $\text{Im}(i) = \ker(j)$, folgt $c = j(b) = j(i(a)) = 0$. Damit besteht der $\ker(\gamma)$ nur aus $c = 0$ und also ist γ injektiv. \square

21.4 Relative singuläre Homologiegruppen

Wir wiederholen zunächst die einführenden Sätze aus dem Abschnitt über relative simpliziale Homologiegruppen, die hier bei relativen singulären Homologiegruppen gleichermaßen gültig sind.

Manchmal erhält man in der Mathematik einfachere Strukturen indem man auf gewisse Informationen verzichtet. So ist es auch in der algebraischen Topologie immer wieder hilfreich einen topologischen Raum modulo eines Teilraums zu untersuchen. Im Fall der Homologiegruppen gelangt man so zu den *relativen* Homologiegruppen.

Definition 21.4.1 Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein nichtleerer, abgeschlossener Teilraum, dann heißt (X, A) ein Raumpaard. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $A \subset X$, $B \subset Y$ und $f(A) \subseteq B$ nennt man eine stetige Abbildung von Raumpaaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Sei X ein topologischer Raum, $A \subset X$ ein Teilraum, $C_r(X)$ eine r -Kettengruppe, dann kann man eine relative r -Kettengruppe als die Ketten von X modulo der Ketten von A definieren, genauer gesagt

$$C_r(X, A) := C_r(X)/C_r(A) . \quad (21.4.1)$$

Die Elemente von $C_r(X, A)$ sind also die Klassen $[s_r] := \{s_r + s_{r,A} \mid s_r \in C_r(X) \text{ fixiert, } s_{r,A} \in C_r(A)\}$.

Der Randoperator $\partial_r : C_r(X) \rightarrow C_{r-1}(X)$ wirkt per Definition auf Ketten von A in gleicher Weise $\partial_r : C_r(A) \rightarrow C_{r-1}(A)$ wie auf Ketten von X . Damit induziert er einen relativen Randoperator, den wir der Einfachheit halber auch wieder mit ∂_r bezeichnen, also

$$\partial_r : C_r(X, A) \rightarrow C_{r-1}(X, A) . \quad (21.4.2)$$

Da $\partial_r \partial_{r+1} = 0$ für $C_r(X)$ und $C_r(A)$ gültig ist, gilt dies auch für die Klassen $[s_r]$, also für $C_r(X, A)$.

Relative r -Zyklen und relative r -Randketten werden dann definiert als:

$$Z_r(X, A) := \{\alpha \mid \alpha \in C_r(X), \partial_r \alpha \in C_{r-1}(A)\} , \quad (21.4.3)$$

$$B_r(X, A) := \{\beta = \partial_{r+1} \gamma + \delta \mid \gamma \in C_{r+1}(X), \delta \in C_r(A)\} . \quad (21.4.4)$$

Damit kann man relative Homologiegruppen wie üblich definieren als:

$$H_r(X, A) := Z_r(X, A)/B_r(X, A) = \ker(\partial_r)/\text{Im}(\partial_{r+1}) . \quad (21.4.5)$$

Das heißt, die Klassen von $H_r(X, A)$ bestehen aus relativen r -Zyklen modulo relativen r -Randketten.

Wenn man jetzt die folgende kurze Sequenz

$$0 \rightarrow C_r(A) \xrightarrow{i} C_r(X) \xrightarrow{j} C_r(X, A) \rightarrow 0 \quad (21.4.6)$$

betrachtet, dann stellt man fest, daß dies eine kurze exakte Sequenz analog zu 21.3.2 ist, denn die Inklusion $i : C_r(A) \hookrightarrow C_r(X)$ ist injektiv und die Projektion $j : C_r(X) \rightarrow C_r(X, A) = C_r(X)/C_r(A)$ ist surjektiv. Wenn man mittels ∂ aus dieser kurzen exakten Sequenz für C_r den entsprechenden kurzen exakten Kettenkomplex macht:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_r(A) & \xrightarrow{i} & C_r(X) & \xrightarrow{j} & C_r(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_{r-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{r-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{r-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

dann entspricht diesem die folgende lange exakte Sequenz der Homologiegruppen (siehe 21.3.3):

$$\dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \quad (21.4.7)$$

In diesem konkreten Fall erkennt man auch leicht die Bedeutung des Randoperators $\partial_\bullet : H_r(X, A) \rightarrow H_{r-1}(A)$:

$$[\alpha_0] \in H_r(X, A) \Rightarrow \alpha_0 = \alpha + \partial_{r+1}\gamma + \delta$$

$$\text{mit } \alpha \in C_r(X), \partial_r\alpha \in C_{r-1}(A), \gamma \in C_{r+1}(X), \delta \in C_r(A),$$

$$\partial_r\alpha_0 = \partial_r\alpha + \partial_r\partial_{r+1}\gamma + \partial_r\delta = (\partial_r\alpha + \partial_r\delta) \in C_{r-1}(A),$$

d.h. $\partial_{r\bullet}[\alpha_0] = [\partial_r\alpha_0] \in H_{r-1}(A)$.

Beispiel: Wir hatten in 21.2.11 für einen topologischen Raum $P = \{p_0\}$, der nur aus dem Punkt p_0 besteht, gefunden, daß für alle Homologiegruppen mit $r > 0$ gilt: $H_r(P) = 0$. Zusammen mit 21.4.7 ergibt sich für $r > 0$:

$$\dots \rightarrow H_r(P) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, P) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(P) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, P) \xrightarrow{\partial_\bullet} 0 \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow 0.$$

Weil diese lange Sequenz exakt ist gilt $\text{Im}(i_{r\bullet}) = \ker(j_{r\bullet}) = 0$, und das heißt, daß für $r > 0$ gilt:

$$H_r(X) \simeq H_r(X, P). \quad (21.4.8)$$

□

Wir hatten oben gesehen, daß eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen den topologischen Räumen X und Y Kettenabbildungen $f_{r*} : C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$ zwischen den entsprechenden r -Kettengruppen induziert, die mit dem Randoperator kommutieren: $f_*\partial = \partial f_*$, oder ausführlicher $f_{r-1*}\partial_r = \partial_r f_{r*}$. Dies läßt sich nun unschwierig auf den Fall der relativen Homologiegruppen verallgemeinern. Sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, d.h. $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$, dann folgt aus $f_{r*} : C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$ auch $f_{r*} : C_r(A) \rightarrow C_r(B)$, also gibt es eine wohldefinierte Abbildung zwischen den Quotientenräumen, die wir wieder f_{r*} nennen:

$$f_{r*} : C_r(X)/C_r(A) = C_r(X, A) \rightarrow C_r(Y)/C_r(B) = C_r(Y, B). \quad (21.4.9)$$

Eine andere Verallgemeinerung betrifft die Erweiterung von Raumpaaren (X, A) auf Raumtripel (X, A, B) mit $B \subset A \subset X$. Seien i und j die Inklusionen

$$i : (A, B) \hookrightarrow (X, B) \quad \text{und} \quad j : (X, B) \hookrightarrow (X, A), \quad (21.4.10)$$

dann ist

$$0 \rightarrow C_r(A, B) \xrightarrow{i_*} C_r(X, B) \xrightarrow{j_*} C_r(X, A) \rightarrow 0 \quad (21.4.11)$$

eine kurze exakte Sequenz, denn $i_* : C_r(A)/C_r(B) \rightarrow C_r(X)/C_r(B)$ ist injektiv und $j_* : C_r(X)/C_r(B) \rightarrow C_r(X)/C_r(A)$ ist surjektiv. Also gibt es eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen (siehe 21.3.3):

$$\dots \rightarrow H_r(A, B) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X, B) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A, B) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X, B) \rightarrow \dots \quad (21.4.12)$$

Den konkreten Tripel-Randoperator ∂_\bullet kann man aus den Abbildungen der folgenden beiden Homologiesequenzen für (X, A) und (A, B) bestimmen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_r(X) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_r(B) \xrightarrow{i_{2\bullet}} H_r(A) \xrightarrow{j_{2\bullet}} H_r(A, B) \xrightarrow{\partial_{2\bullet}} H_{r-1}(B) \xrightarrow{i_{2\bullet}} H_{r-1}(A) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \partial_\bullet : H_r(X, A) \rightarrow H_{r-1}(A, B) \quad \Rightarrow \\ \partial_\bullet = j_{2\bullet} \circ \partial_{1\bullet} : H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_{r-1}(A) \xrightarrow{j_{2\bullet}} H_{r-1}(A, B). \end{aligned} \quad (21.4.13)$$

21.5 Der Homotopiesatz

Wir hatten in 20.4.14 festgestellt, daß die simplizialen Homologiegruppen $H_r(K)$ zweier homöomorpher topologischer Räume zueinander isomorph sind. Jetzt soll gezeigt werden, daß sogar die singulären Homologiegruppen zweier homotop-äquivalenter Räume zueinander isomorph sind. Dies ist einer der Hauptsätze im Gebiet der singulären Homologie.

Das Hilfsmittel zum Beweis des Homotopiesatzes ist die folgende Konstruktion der *Kettenhomotopie*. Die Kettengruppen C und C' und die Ketten-Homomorphismen ∂ , f , g mögen einen kommutativen Kettenkomplex bilden. Wenn nun in diesem Kettenkomplex zusätzlich noch ein Homomorphismus $P_r : C_r \rightarrow C'_{r+1}$ existiert, dessen Wirkung im Ketten-Diagramm nicht kommutativ ist, sondern die folgende Bedingung erfüllt

$$f \simeq g \quad :\Leftrightarrow \quad \partial P_r(c) + P_{r-1}\partial(c) = f_r(c) - g_r(c) \quad \text{mit } c \in C_r, \quad (21.5.1)$$

dann heißen die Ketten-Homomorphismen f und g kettenhomotop.

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{r+1} & \xrightarrow{\partial} & C_r & \xrightarrow{\partial} & C_{r-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ & & \swarrow P & & \swarrow P & & \swarrow P & & \swarrow P \\ & & f \downarrow g & & f \downarrow g & & f \downarrow g & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ \dots & \xrightarrow{\partial} & C'_{r+1} & \xrightarrow{\partial} & C'_r & \xrightarrow{\partial} & C'_{r-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \end{array}$$

Diese Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation in der Menge der Kettenabbildungen, denn wenn ein P existiert, so daß für beliebige f und g gilt: $f \simeq g$, dann gilt natürlich auch $f \simeq f$ und $g \simeq f$. Die Transitivität sieht man so:

$$f_r, g_r : C_r \rightarrow C'_r \quad \text{und} \quad \partial P_r + P_{r-1}\partial = f_r - g_r \quad \Rightarrow$$

$$f'_r : C'_r \rightarrow C''_r \quad \Rightarrow \quad f'_r \partial P_r + f'_r P_{r-1} \partial = f'_r \circ (f_r - g_r) \quad \Rightarrow$$

$$\partial f'_{r+1} P_r + f'_r P_{r-1} \partial = f'_r \circ f_r - f'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$(f'_{r+1} P_r) : C_r \rightarrow C''_{r+1} \quad \text{mit} \quad f'_r \circ f_r \simeq f'_r \circ g_r .$$

Und ebenso:

$$f'_r, g'_r : C'_r \rightarrow C''_r \quad \text{und} \quad \partial P'_r + P'_{r-1} \partial = f'_r - g'_r ,$$

$$g_r : C_r \rightarrow C'_r \quad \Rightarrow \quad \partial P'_r g_r + P'_{r-1} \partial g_r = (f'_r - g'_r) \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$\partial P'_r g_r + P'_{r-1} g_{r-1} \partial = f'_r \circ g_r - g'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$(P'_r g_r) : C_r \rightarrow C''_{r+1} \quad \text{mit} \quad f'_r \circ g_r \simeq g'_r \circ g_r .$$

Damit existiert ein $\tilde{P}_r := (f'_{r+1} P_r + P'_r g_r) : C_r \rightarrow C''_{r+1}$ mit

$$\partial \tilde{P}_r + \tilde{P}_{r-1} \partial = f'_r \circ f_r - f'_r \circ g_r + f'_r \circ g_r - g'_r \circ g_r = f'_r \circ f_r - g'_r \circ g_r \quad \Rightarrow$$

$$f'_r \circ f_r \simeq g'_r \circ g_r .$$

Warum interessiert man sich überhaupt für einen solchen Operator P , der eine Äquivalenzrelation unter den Kettenabbildungen $f, g : C \rightarrow C'$ vermittelt?

Lemma 21.5.1 1. Sei $c \in C_r$ ein Zyklus für den die Bedingung der Kettenhomotopie

$$\partial P_r(c) + P_{r-1} \partial(c) = \partial P_r(c) = f_r(c) - g_r(c)$$

erfüllt sei, dann gilt

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f_\bullet = g_\bullet : H_r(C) \rightarrow H_r(C') .$$

2. Man spricht von Kettenhomotopie-Äquivalenz, wenn es für beliebige $f : C \rightarrow C'$ eine homotopie-inverse Kettenabbildung $g : C' \rightarrow C$ gibt, d.h. wenn gilt

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} .$$

Eine homotopie-äquivalente Abbildung f induziert eine isomorphe Abbildung f_\bullet zwischen den entsprechenden Homologiegruppen, d.h. $f_\bullet : H_r(C) \rightarrow H_r(C')$ ist isomorph.

Beweis: 1. Sei $c \in C_r$ ein Zyklus, dann ist ja $\partial c = 0$, und dann wird aus der Bedingung für die Kettenhomotopie

$$\partial P_r(c) = f_r(c) - g_r(c) ,$$

d.h. $f_r(c) - g_r(c)$ ist ein Rand.

Also gilt für die Homologieklassen in $H_r(C') = Z_r(C')/B_r(C')$ in C' die Gleichheit $[f_r(c)] = [g_r(c)]$. Und das bedeutet

$$f \simeq g \quad \Rightarrow \quad f_\bullet = g_\bullet : H_r(C) \rightarrow H_r(C') .$$

2. Jetzt gebe es für $f : C \rightarrow C'$ eine homotopie-inverse Abbildung, d.h. es existiere ein $g : C' \rightarrow C$ mit

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} .$$

Daraus folgt

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_C \quad \Rightarrow \quad (g \circ f - \mathbb{1}_C) \text{ ist Rand} \quad \Rightarrow$$

$$[g \circ f]_C = [\mathbb{1}]_C \Rightarrow (g \circ f)_\bullet H_r(C) = (g_\bullet \circ f_\bullet) H_r(C) = H_r(C) \Rightarrow$$

f_\bullet ist injektiv, g_\bullet ist surjektiv,

und ebenso

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_{C'} \Rightarrow (f \circ g - \mathbb{1}_{C'}) \text{ ist Rand} \Rightarrow$$

$$[f \circ g]_{C'} = [\mathbb{1}]_{C'} \Rightarrow (f \circ g)_\bullet = (f_\bullet \circ g_\bullet) H_r(C') = H_r(C') \Rightarrow$$

g_\bullet ist injektiv, f_\bullet ist surjektiv.

Also ist $f_\bullet = g_\bullet^{-1}$ ein Isomorphismus. □

Satz 21.5.3 (Homotopiesatz) *Seien X und Y zwei topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige, homotope Abbildungen, $f_*, g_* : C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$ die entsprechenden homotopen Kettenabbildungen. Dann induzieren f und g , bzw. f_* und g_* , den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen.*

Wenn $f : X \rightarrow Y$ eine Kettenhomotopie-Äquivalenz ist, d.h. wenn zur Kettenabbildung f_ die homotopie-inverse Kettenabbildung f_*^{-1} gibt, dann ist $f_\bullet : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Wir folgen hier dem Beweis von Hatcher (2001), S. 110 ff., weil er etwas 'geometrischer' ist, als der entsprechende Beweis von Stöcker u. Zieschang (1994). Die Idee dieses Beweises ist es, von einem einfachen Simplex $\overline{\Delta}_r$ zunächst zu dem Produktraum $\overline{\Delta}_r \times I$ mit $I = [0, 1]$ überzugehen und dann diesen Produktraum in $(r+1)$ abgeschlossene Simplexe zu unterteilen, die nur Simplexflächen miteinander teilen.

1. Sei also $\overline{\Delta}_r \times I$ gegeben mit

$$\overline{\Delta}_r \times \{0\} := [v_0, \dots, v_r] \quad \text{und} \quad \overline{\Delta}_r \times \{1\} := [w_0, \dots, w_r],$$

und so daß die $\{v_i\}$ und die $\{w_i\}$ unter der Projektion $\overline{\Delta}_r \times I \rightarrow \overline{\Delta}_r$ das gleiche Bild haben, kurz gesagt also, daß alle w_i über v_i liegen. Jetzt kann man in $\overline{\Delta}_r \times I$ die folgenden Simplexe bilden

$$\Delta_{r,i} := [v_0, v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_r].$$

Nun hat $\Delta_{r,i}$ ja die folgende eindeutige Darstellung

$$\Delta_{r,i} = \left\{ p \in \mathbb{R}^m \mid p = \sum_{k=0}^i c_k v_k + \sum_{k=i}^r c_{k+1} w_k, \quad \sum_{k=0}^{r+1} c_k = 1, \quad c_k \geq 0 \right\}.$$

Damit kann man die folgende 'Höhenfunktion' auf den $\Delta_{r,i}$ definieren:

$$\varphi_{r,i} : \Delta_{r,i} \rightarrow I \quad \text{mit} \quad \varphi_{r,i}(\Delta_{r,i}) := \sum_{i+1}^r c_i .$$

Für die verschiedenen r -Simplexe $\Delta_{r,i}$ erhalten wir also diese Folge von Höhen

$$0 = \varphi_{r,r} \leq \varphi_{r,r-1} \leq \dots \leq \varphi_{r,0} \leq \varphi_{r,-1} = 1 .$$

Zwischen den r -Simplexen $\Delta_{r,i}$ und $\Delta_{r,i-1}$ mit $\varphi_{r,i} \leq \varphi_{r,i-1}$ können wir nun den folgenden $(r+1)$ -Simplex konstruieren

$$\Delta_{r+1,i} := [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, w_{i+1}, \dots, w_r] .$$

All diese $(r+1)$ verschiedenen $\Delta_{r+1,i}$ sind nach Konstruktion bis auf gemeinsame Simplex-Seiten disjunkt, denn: sei p ein gemeinsamer Punkt von $\overset{\circ}{\Delta}_{r+1,i}$ und $\overset{\circ}{\Delta}_{r+1,j}$, mit $i \neq j$, dann gilt für p

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{i-1} c_k v_k + c_i v_i + c_{i+1} w_i + \sum_{k=i+1}^r c_{k+1} w_k \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{j-1} d_k v_k + d_j v_j + d_{j+1} w_j + \sum_{k=j+1}^r d_{k+1} w_k , \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \sum_{k=0}^{r+1} c_k = 1, \quad c_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{r+1} d_k = 1, \quad d_k > 0 .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Darstellungen sind alle $c_k = d_k$, mit Ausnahme von $c_i, c_{i+1}, d_j, d_{j+1}$ und damit folgt

$$c_i v_i + c_{i+1} w_i = d_j v_j + d_{j+1} w_j$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da für $i \neq j$ die Strecken $\overline{v_i w_i}$ und $\overline{v_j w_j}$ disjunkt sind, also haben $\overset{\circ}{\Delta}_{r+1,i}$ und $\overset{\circ}{\Delta}_{r+1,j}$ keinen gemeinsamen Punkt p .

Da die $\varphi_{r,i}$ eine Zerlegung der 1 erzeugen, füllen die $\Delta_{r+1,i}$ auch $\overline{\Delta}_r \times I$ vollständig aus.

2. Der Gedanke ist nun, von $\overline{\Delta}_r$ überzugehen zu $\overline{\Delta}_r \times I$, dieses als Summe der $\Delta_{r+1,i}$ zu betrachten und hierauf die Homotopie zu erklären und zu untersuchen.

Sei s_r ein singulärer Simplex, also

$$s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow X, \quad \overline{\Delta}_r = [v_0, \dots, v_r],$$

dann soll mit $s_r | \overline{\Delta_r} = s_r | [v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r]$ die Einschränkung von s_r auf $\overline{\Delta_r}$ bezeichnet werden. Weiter sei eine Homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ gegeben, d.h. $F(x, 0) := f(x)$ und $F(x, 1) := g(x)$.

$$F \circ (s_r \times \mathbb{1}) : \overline{\Delta_r} \times I \rightarrow F(X \times I) = Y ,$$

Mit Hilfe der Homotopie F wird nun der Prisma-Operator definiert als $P_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(Y)$ von der Kettengruppe $C_r(X)$ nach der Kettengruppe $C_{r+1}(Y)$.

$$P_r(s_r | [v_0, \dots, v_r]) := \sum_{i=0}^r (-1)^i F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_r] .$$

Jetzt soll $\partial P_r + P_{r-1} \partial = g_{*r} - f_{*r}$ gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \partial P_r(s_r) &= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i (-1)^i (-1)^j F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_r] \\ &+ \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^r (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_r] . \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Terme mit $i = j$ und stellen fest, daß sich alle diese Terme mit Ausnahme der beiden Randterme gegenseitig aufheben. Die beiden Randterme sind:

$$\begin{aligned} (-1)^0 (-1)^0 F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [\hat{v}_0, w_0, \dots, w_r] &= F \circ (s_r \times \{1\}) | [\hat{v}_0, w_0, \dots, w_r] \\ &= g \circ s_r | [w_0, \dots, w_r] = g_*(s_r) | [w_0, \dots, w_r] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^r (-1)^{r+1} F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, v_r, \hat{w}_r] &= -F \circ (s_r \times \{0\}) | [v_0, \dots, v_r, \hat{w}_r] \\ &= -f \circ s_r | [v_0, \dots, v_r] = -f_*(s_r) | [v_0, \dots, v_r] . \end{aligned}$$

Für $P_{r-1} \partial(s_r)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \partial s_r | [v_0, \dots, v_r] &= \sum_{j=0}^r (-1)^j s_r | [v_0, \dots, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_r] , \\ P_{r-1} \partial(s_r) &= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_r] \\ &+ \sum_{i=0}^r \sum_{j=i+1}^r (-1)^i (-1)^j F \circ (s_r \times \mathbb{1}) | [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_r] . \end{aligned}$$

Man würde ja eigentlich bei einem Prisma-Operator P_{r-1} eine Summation $\sum_{i=0}^{r-1}$ erwarten, und das könnte man natürlich leicht durch eine Umsortierung unter Auslassung

von \hat{v}_j und \hat{w}_j erreichen. Man nimmt diese Umsortierung hier aber deshalb nicht vor, weil man ja im nächsten Schritt $P_r\partial(s_r)$ mit $\partial P_r(s_r)$ vergleichen möchte. Dabei zeigt sich sofort, daß $-P_{r-1}\partial(s_r)$ gleich den $\partial P_r(s_r)|_{i \neq j}$ Termen ist und damit folgt:

$$\partial P_r(s_r) + P_{r-1}\partial(s_r) = g_{r*}(s_r) - f_{r*}(s_r) .$$

Mit dem obigen Lemma zur Kettenhomotopie und einer Umbenennung $f \leftrightarrow g$ folgt die Behauptung. □

Folgerung: Sei $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, dann ist die Einbettung $i : A \rightarrow X$ ein Isomorphismus, und dann folgt mit dem obigen Homotopie-Satz, daß $i_* : H_r(A) \rightarrow H_r(X)$ ein Isomorphismus ist. Wenn also ein topologischer Raum X wegzusammenhängend und damit homotop zu einem Unterraum $A := \{p_0\}$ ist, der nur aus dem Punkt $p_0 \in X$ besteht, dann folgt mit 21.2.11:

$$H_0(X) \simeq H_0(\{p_0\}) = G , \quad H_r(X) \simeq H_r(\{p_0\}) = \emptyset \quad \text{für } r > 0 \} . \quad (21.5.2)$$

Korollar 21.5.5 *Der obige Homotopiesatz läßt sich auf relative Homologiegruppen verallgemeinern:*

seien X und Y zwei topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ zwei homotope Abbildungen, seien weiter $A \subset X, B \subset Y$ mit $f, g : A \rightarrow B$, dann induzieren f und g den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X, A) \rightarrow H_r(Y, B)$ zwischen den entsprechenden relativen Homologiegruppen.

Beweis: Wenn man sich den obigen Beweis anschaut, dann sieht man, daß die Homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ mit $F(x, 0) := f(x)$ und $F(x, 1) := g(x)$ in gleicher Weise auch für die Einschränkung $F : A \times I \rightarrow B$ gilt. Daher läßt sich auch der Prisma-Operator $P_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(Y)$ auf $P_r : C_r(A) \rightarrow C_{r+1}(B)$ einschränken. Nun kann man eine neue Homotopie $\tilde{F} : (X/A) \times I \rightarrow (Y/B)$ mit $\tilde{F}(x, 0) := f(x)$ und $\tilde{F}(x, 1) := g(x)$ und einen neuen Prisma-Operator

$$\tilde{P}_r : C_r(X, A) = C_r(X)/C_r(A) \rightarrow C_{r+1}(Y, B) = C_{r+1}(Y)/C_{r+1}(B)$$

definieren und damit den Beweis $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X, A) \rightarrow H_r(Y, B)$ wie oben führen. □

Wir hatten im obigen Homotopiesatz gesehen, daß die homotopen Kettenabbildungen $f_*, g_* : C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$ den gleichen Homomorphismus $f_\bullet = g_\bullet : H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ zwischen den entsprechenden Homologiegruppen induzieren. Zentral für den Beweis war, daß man für die homotopen Kettenabbildungen f_*, g_* einen Operator $P_r : C_r \rightarrow C'_{r+1}$ mit

$$\partial P_r(c) + P_{r-1}\partial(c) = f_{r*}(c) - g_{r*}(c) \quad \text{mit } c \in C_r$$

konstruieren konnte. Stöcker u. Zieschang (1994) nutzen eine verwandte, aber rein algebraische Konstruktion, die nicht nur für den Beweis des Homotopiesatzes geeignet ist, sondern sich auch sehr schön beim Beweis des unten folgenden Ausschneidungssatzes anwenden läßt. Diese Aussage stellen wir im folgenden Lemma vor.

Lemma 21.5.7 Seien $f_*, g_* : C(X) \rightarrow C(X \times I)$ sog. natürliche Kettenabbildungen, d.h. Kettenabbildungen für welche das folgende Diagramm für jede stetige Funktion $h : X \rightarrow Y$ kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow[g_*]{f_*} & C(X \times I) \\ h_* \downarrow & & \downarrow (h \times 1)_* \\ C(Y) & \xrightarrow[g_*]{f_*} & C(Y \times I) \end{array}$$

Weiter gelte $f_\bullet = g_\bullet : H_0(X) \rightarrow H_0(X \times I)$ und $f_\bullet = g_\bullet : H_0(Y) \rightarrow H_0(Y \times I)$, dann sind f_* und g_* kettenhomotop, d.h. dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $Q_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(X \times I)$ mit

$$\partial_{r+1}Q_r + Q_{r-1}\partial_r = f_* - g_* \quad \text{auf } C_r(X).$$

Beweis: Der Beweis konstruiert zunächst Operatoren $Q_r : C_r(\overline{\Delta}_r) \rightarrow C_{r+1}(\overline{\Delta}_r \times I)$ mittels Induktion auf gewöhnlichen Simplex $\overline{\Delta}_r$ und erweitert dann das Ergebnis mittels $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow X$ auf X .

$$\begin{array}{ccc} C_r(\overline{\Delta}_r) & \xrightarrow{Q_r} & C_{r+1}(\overline{\Delta}_r \times I) \\ s_{r*} \downarrow & & \downarrow (s_r \times 1)_* \\ C_r(X) & \xrightarrow{Q_r} & C_{r+1}(X \times I) \\ h_* \downarrow & & \downarrow (h \times 1)_* \\ C_r(Y) & \xrightarrow{Q_r} & C_{r+1}(Y \times I) \end{array}$$

Für $r < 0$ setzen wir $Q_r := 0$. Nun nehmen wir an, daß für alle $j < r$ die Q_j bereits konstruiert seien. Wir beginnen mit dem einfachen simplizialen Fall $X = \overline{\Delta}_r$. Sei $\varphi := f_* - g_*$. Gesucht wird ein Q_r mit

$$Q_r(\overline{\Delta}_r) = c_{r+1} \in C_{r+1}(\overline{\Delta}_r \times I) \quad \text{mit} \quad \partial_{r+1}c_{r+1} = -Q_{r-1}\partial_r(\overline{\Delta}_r) + \varphi(\overline{\Delta}_r).$$

Für den Induktionsanfang $r = 0$ gilt nach Voraussetzung für die Klasse $[\varphi(\overline{\Delta}_0)]$

$$[0] = [f_\bullet((\overline{\Delta}_0)) - g_\bullet((\overline{\Delta}_0))] = [\varphi(\overline{\Delta}_0)] \in H_0(\overline{\Delta}_0 \times I) \quad \text{und}$$

$$c_0 := \varphi(\overline{\Delta}_0) \in [0] \quad \Rightarrow \quad c_0 \in Z_0(\overline{\Delta}_0 \times I) \text{ und } c_0 \in B_0(\overline{\Delta}_0 \times I),$$

also gibt es ein $c_1 \in C_1(\overline{\Delta_0} \times I)$ mit $\partial_1 c_1 = c_0$, also ist c_0 Zyklus und Rand.

Für $r > 0$ ist $C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^{r+2} und also azyklisch, d.h. jeder Zyklus $c_r \in Z_r(\overline{\Delta_r} \times I)$ ist auch Rand. Um

$$\partial_{r+1} c_{r+1} = -Q_{r-1} \partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})$$

induktiv zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß die rechte Seite, die wir c_r nennen wollen,

$$c_r := -Q_{r-1} \partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})$$

ein Zyklus ist, und das sieht man folgendermaßen:

$$\text{nach Induktionsannahme gilt : } \partial_r Q_{r-1} + Q_{r-2} \partial_{r-1} = \varphi \Rightarrow$$

$$\partial_r(-Q_{r-1} \partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})) = -(\varphi - Q_{r-2} \partial_{r-1}) \partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi \partial_r(\overline{\Delta_r}) = 0.$$

Jetzt soll $Q_r : C_r(\overline{\Delta_r}) \rightarrow C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ mittels $s_r : \overline{\Delta_r} \rightarrow X$ verallgemeinert werden auf $Q_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(X \times I)$. Sei also $c_r \in Z_r(\overline{\Delta_r} \times I)$ ein Zyklus, der zugleich Rand ist, d.h. es gibt ein $c_{r+1} \in C_{r+1}(\overline{\Delta_r} \times I)$ mit $\partial_{r+1} c_{r+1} = c_r$. Dann definiert man

$$s_r \times \mathbb{1} : \overline{\Delta_r} \times I \rightarrow X \times I,$$

$$Q_r(s_r) := (s_r \times \mathbb{1})_*(c_{r+1}).$$

Es bleibt zu zeigen, daß dieses Q_r auch tatsächlich eine Kettenhomotopie ist.

$$\begin{aligned} \partial_{r+1} Q_r(s_r)(\overline{\Delta_r}) &= \partial_{r+1}(s_r \times \mathbb{1})_*(c_{r+1}) = (s_r \times \mathbb{1})_*(\partial_{r+1} c_{r+1}) \\ &= (s_r \times \mathbb{1})_*(c_r) = (s_r \times \mathbb{1})_*(-Q_{r-1} \partial_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi(\overline{\Delta_r})) \\ &= -Q_{r-1} s_r \partial_r(\overline{\Delta_r}) + s_r \varphi(\overline{\Delta_r}) = -Q_{r-1} \partial_r s_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi s_r(\overline{\Delta_r}) \\ &= -Q_{r-1} \partial_r s_r(\overline{\Delta_r}) + \varphi s_r(\overline{\Delta_r}) \Rightarrow \\ \partial_{r+1} Q_r(s_r) &= -Q_{r-1} \partial_r s_r + \varphi s_r. \quad \square \end{aligned}$$

21.6 Der Ausschneidungssatz

Neben dem Homotopiesatz ist der Ausschneidungssatz der zweite grundlegende und wichtige Satz in der Theorie der singulären Homologiegruppen. Wir folgen wieder Stöcker u. Zieschang (1994) (S. 227 ff.).

Satz 21.6.1 (Ausschneidungssatz) Seien $U \subset A \subset X$ topologische Räume, wobei die Abschließung von U im Innern von A liegen möge, d.h. $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, dann induziert die Abbildung $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen $i_{\bullet} : H_r(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_r(X, A)$.

Nun gilt auf $X = A \cup (X \setminus U)$ für singuläre Ketten im Gegensatz zu simplizialen Ketten, daß diese i.A. nicht die Summe zweier Ketten auf A und $X \setminus U$ sind. Jedoch ist es möglich, durch mehrfache baryzentrische Unterteilung der singulären Ketten zu der gewünschten Additivität für singulären Ketten zu gelangen. Daher stützt sich der Beweis des Ausschneidungssatzes ganz wesentlich auf die baryzentrische Unterteilung (siehe Kapitel 20.3). Der Vorbereitung des Beweises dienen einige Definitionen und Lemmata.

Definition 21.6.2 Sei $\bar{\Delta}_r = [e_0, \dots, e_r]$ ein abgeschlossener r -dimensionaler Simplex und $C_r(\bar{\Delta}_r)$ eine simpliziale r -Kettengruppe, dann definiert man eine baryzentrische Unterteilungskette $u_r \in C_r(\bar{\Delta}_r)$ rekursiv als

$$p_r := \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r e_i, \quad \text{Schwerpunkt der } e_i,$$

$$u_0 := e_0, \quad u_r := p_r * \sum_{i=0}^r (-1)^i (\delta_{r-1}^i)_* u_{r-1} \quad \text{für } r \geq 1.$$

Dabei ist wie oben (21.2.6) δ_{r-1}^i die Abbildung eines $(r-1)$ -Standardsimplex $\bar{\Delta}_{r-1} = [p_0 p_1 \dots p_{r-1}]$ auf die i -te Randseite von $\bar{\Delta}_r$, also auf $\bar{\Delta}_{r-1}^i = [p'_0 p'_1 \dots \hat{p}_i \dots p'_r]$ und $(\delta_{r-1}^i)_* : C_{r-1}(\bar{\Delta}_{r-1}) \rightarrow C_{r-1}(\bar{\Delta}_r)$ die Einbettung von u_{r-1} in den 'nächsthöheren Simplex'. $p_r *$ ist die übliche Kegelkonstruktion (21.2.14). Nehmen wir als Beispiel den einfachsten Fall $r = 1$, d.h. die Konstruktion von u_1 aus u_0 :

$$p_1 = \frac{1}{2}(e_0 + e_1), \quad \bar{\Delta}_1 = (e_0, e_1),$$

$$(\delta_0^0)_* u_0 = (\delta_0^0)_* e_0 = \delta_0^0(e_0, e_1) = (\hat{e}_0, e_1) = e_1,$$

$$(\delta_0^1)_* u_0 = (\delta_0^1)_* e_0 = \delta_0^1(e_0, e_1) = (e_0, \hat{e}_1) = e_0,$$

$$u_1 = p_1 * e_1 - p_1 * e_0.$$

Man transportiert also u_0 auf die Seite von $\bar{\Delta}_1$ und bildet dann den Kegel über den unterteilten Rand mit der Kegelspitze p_1 .

Als nächstes überträgt man diese baryzentrische Unterteilung von einfachen Simplexen auf singuläre Simplexe und definiert mittels der baryzentrischen Unterteilungskette einen Unterteilungsoperator.

Definition 21.6.3 Seien die Abbildung $s_r : \overline{\Delta_r} \rightarrow X$ ein singulärer Simplex, $c = \sum_k g_k s_{r,k} \in C_r(X)$ mit $g_k \in G$ eine r -Kette und $u_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$ eine baryzentrische Unterteilungskette. Dann heißt die lineare Abbildung $B : C_r(X) \rightarrow C_r(X)$ mit

$$B(c) := \sum_k g_k B(s_{r,k}) \quad \text{mit} \quad B(s_r) := s_{r*}(u_r)$$

ein Unterteilungsoperator.

Dabei ist $B(s_0) = s_{0*}(u_0) = s_{0*}(e_0) = s_0$, also $B = \mathbb{1}_0$ auf $C_0(X)$.

Einige Eigenschaften dieses Unterteilungsoperators faßt das folgende Lemma zusammen.

Lemma 21.6.4

1. $f : X \rightarrow Y \Rightarrow f_*B = Bf_*$, 2. $\partial_r B = B\partial_r$, 3. $B \simeq \mathbb{1} : C(X) \rightarrow C(X)$.

Beweis: 1. $s_r : \overline{\Delta_r} \rightarrow X \Rightarrow f_*B(s_r) = f_*s_{r*}(u_r) = (fs_r)_*(u_r) = B(fs_r) = Bf_*(s_r)$.

2. Für $r = 0$ ist $\partial_0 = 0$. Für $r = 1$ und $s_1 : \overline{\Delta_1} \rightarrow X$ gilt mit $B = \mathbb{1}_0$ auf $C_0(X)$:

$$\partial_1 B(s_1) = \partial_1 s_{1*}(u_1) = s_{1*}(\partial_1 u_1) = s_{1*}(e_1 - e_0) = s_{1*}(e_1) - s_{1*}(e_0) = \partial_1 s_1 = B(\partial_1 s_1).$$

Für $r \geq 2$ soll ein Induktionsbeweis geführt werden. Es gelte also $\partial_{r-1} B(s_{r-1}) = B\partial_{r-1}(s_{r-1})$. Nun kann man die Abbildung $\mathbb{1}_r : \overline{\Delta_r} \rightarrow \overline{\Delta_r}$ als ein singuläres Simplex des topologischen Raums $\overline{\Delta_r}$ auffassen, also $\mathbb{1}_r \in C_r(\overline{\Delta_r})$. Dann gilt für den Rand

$$\partial_r(\mathbb{1}_r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (\mathbb{1}_{r-1} \circ \delta_{r-1}^i) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (\delta_{r-1}^i),$$

$$s_r : \overline{\Delta_r} \rightarrow X \quad \Rightarrow \quad s_{r*} : C_r(\overline{\Delta_r}) \rightarrow C_r(X) \quad \Rightarrow \quad s_r = s_r \circ \mathbb{1}_r = s_{r*}(\mathbb{1}_r).$$

$$B(\partial_r \mathbb{1}_r) = B\left(\sum_{i=0}^r (-1)^i \mathbb{1}_{r-1}(\delta_{r-1}^i)\right) = \sum_{i=0}^r (-1)^i (\delta_{r-1}^i) u_{r-1} \quad \Rightarrow$$

$$u_r = p_r * B(\partial_r \mathbb{1}_r).$$

Damit folgt für $\partial_r B(s_r)$:

$$\partial_r B(s_r) = \partial_r s_{r*}(u_r) = s_{r*}(\partial_r u_r) = s_{r*}(\partial_r(p_r * B(\partial_r \mathbb{1}_r))).$$

Für den Rand des Kegels folgt mit 21.2.16:

$$\partial_r B(s_r) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r) - p_r * \partial_{r-1} B(\partial_r \mathbb{1}_r)).$$

Mit der Induktionsannahme $\partial_{r-1}B = B\partial_{r-1}$ folgt

$$\partial_r B(s_r) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r) - p_r * \partial_{r-1} \partial_r B(\mathbb{1}_r)) = s_{r*}(B(\partial_r \mathbb{1}_r)) .$$

Mit 1. folgt

$$\partial_r B(s_r \mathbb{1}_r) = B(s_{r*}(\partial_r \mathbb{1}_r)) = B(\partial_r(s_r \mathbb{1}_r)) \quad \Rightarrow \quad \partial_r B = B\partial_r .$$

3. Es seien die Inklusion $i : X \hookrightarrow X \times I$ mit $i(x) := (x, 0)$ und die Projektion $p : X \times I \rightarrow X$ mit $p(x, t) := x$ gegeben. Aufgrund des Lemmas 21.5.7 gibt es eine Kettenhomotopie $Q_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(X \times I)$ zwischen den Abbildungen $f_* := i_* \circ B$ und $g_* := i_*$. Diese Kettenhomotopie kann man nun von $C_{r+1}(X \times I)$ mittels p_* nach $C_{r+1}(X)$ projizieren und erhält

$$E_r := p_* \circ Q_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(X)$$

und damit

$$p_*(\partial_{r+1} Q_r) + p_*(Q_{r-1} \partial_r) = \partial_{r+1}(p_* Q_r) + p_*(Q_{r-1} \partial_r) = p_*(i_* \circ B) - p_*(i_*) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_{r+1} E_r + E_{r-1} \partial_r = B - \mathbb{1}_r \quad \Leftrightarrow \quad B \simeq \mathbb{1}_r . \quad \square$$

Als nächstes möchte man die baryzentrische Unterteilung iterieren:

$$B^k := B \circ B \circ \dots \circ B \quad \text{mit } k \geq 1 .$$

Das folgenden Lemma zeigt, daß für eine Unterraumstruktur $A \subset X$ eine baryzentrische Unterteilung B^k eine singuläre Kette aus $C_r(A)$ wieder nach $C_r(A)$ abbildet, und ebenso Zyklen aus $Z_r(X)$ relativ zu A , d.h. Zyklen aus $Z_r(X, A)$, wieder auf $Z_r(X, A)$ abgebildet werden.

Lemma 21.6.6 *Sei $A \subset X$ und $k \geq 1$, dann gilt*

1. *Sei $c \in C_r(A) \Rightarrow B^k c \in C_r(A)$,*

2. *Sei z ein Zyklus relativ A , d.h. $z \in Z_r(X, A)$, dann ist auch $B^k z \in Z_r(X, A)$, und außerdem ist $B^k z$ homolog zu z relativ A , d.h. $[B^k z] = [z] \in H_r(X, A)$.*

Beweis: 1. Die Punktmenge der Unterteilungskette $|u_r|$ ist gleich der Punktmenge des Simplex $|\overline{\Delta}_r|$. Also folgt

$$s_r : |\overline{\Delta}_r| \rightarrow A \quad \Rightarrow \quad B s_r = s_{r*}(u_r) \in C_r(A) \quad \Rightarrow$$

$$c \in C_r(A) \quad \Rightarrow \quad B c \in C_r(A) .$$

2. Sei j die Inklusion $j : A \hookrightarrow X$ und sei $E_r : C_r(X) \rightarrow C_{r+1}(X)$ wie oben die projizierte Kettenhomotopie $E_r = p_* \circ Q_r$, so folgt mit $j_* E_r = E_r j_*$, daß $j_* E_r : C_r(A) \rightarrow C_{r+1}(A)$

gilt. Sei nun $z \in Z_r(X, A)$ ein Zyklus relativ A , dann ist $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in C_r(X)$, $z_2 \in C_r(A)$, $\partial_r z = \partial_r z_2 \in C_{r-1}(A)$. Aus der Kettenhomotopie $B \simeq \mathbb{1}_r$ folgt für E_r :

$$\partial_{r+1} E_r z = Bz - z - E_{r-1} \partial_r z \quad \text{und} \quad E_{r-1} \partial_r z \in C_r(A) \quad \Rightarrow$$

$$\partial_r Bz = (\partial_r z + \partial_r E_{r-1} \partial_r z) \in C_{r-1}(A) \quad \Rightarrow \quad Bz \in Z_r(X, A).$$

Weiter gilt

$$Bz = z + \partial_{r+1} E_r z + E_{r-1} \partial_r z.$$

Nun ist $z \in Z_r(X, A)$ und $E_{r-1} \partial_r z \in C_r(A)$ und damit $(z + E_{r-1} \partial_r z) \in Z_r(X, A)$. Für $\partial_{r+1} E_r z = \partial_{r+1} (E_r z_1 + E_r z_2)$ folgt $\partial_{r+1} E_r z_1 \in \partial_{r+1} C_{r+1}(X) = B_r(X)$ und $\partial_{r+1} E_r z_2 \in C_r(A)$, also ist $\partial_{r+1} E_r z \in B_r(X, A)$. Also ist $[Bz] = [z] \in H_r(X, A)$, d.h. Bz ist homolog zu z relativ A . \square

Zentral für den Ausschneidungssatz ist das folgende Lemma, das zeigt, daß aus $X = U \cup V$ für jede singuläre Kette $c \in C_r(X)$ gilt $B^k c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$, wenn man nur bis zu einem entsprechend hohen Wert von $k \geq 1$ der baryzentrischen Unterteilung geht.

Lemma 21.6.8 *Seien U und V eine offene Überdeckung von X , d.h. $X = U \cup V$. Dann gibt es für jede singuläre Kette $c \in C_r(X)$ ein $k \geq 1$, so daß $B^k c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$.*

Beweis: Wegen der Additivität in $C_r(X)$ genügt es, dies für einen einzelnen singulären Simplex $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow X$ zu zeigen. U und V bilden eine offene Überdeckung von X und entsprechend $s_r^{-1}(U)$ und $s_r^{-1}(V)$ mit stetigem s_r eine offene Überdeckung von $\overline{\Delta}_r$. Nun liegt $\overline{\Delta}_r$ in \mathbb{R}^n und also in einem metrischen Raum und daher konnten wir im Zusammenhang mit Lemma 20.3.1 eine Metrik $d(\Delta_r)$ definieren und zeigen, daß bei einem einfachen Simplex der Dimension m für die Größe eines Simplex der ersten baryzentrischen Unterteilung gilt

$$d(\Delta_r^{(1)}) \leq \frac{m}{m+1} \max\{d(\Delta_r)\}.$$

Wenn man also Δ_r genügend oft baryzentrisch unterteilt, dann kann man für jedes vorgegeben $\epsilon > 0$ die Größe $d(\Delta_r^{(k)}) < \epsilon$ machen - und damit erreichen, daß $\Delta_r^{(k)}$ entweder vollständig in $s_r^{-1}(U)$ oder vollständig in $s_r^{-1}(V)$ liegt.

Nun kann man die Abbildung $\mathbb{1}_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow \overline{\Delta}_r$ als einen singulären Simplex im topologischen Raum $\overline{\Delta}_r$ auffassen, also $\mathbb{1}_r \in C_r(\overline{\Delta}_r)$, und dann ist die singuläre Kette $B^k(\mathbb{1}_r)$ eine Linearkombination über die Abbildungen $t_{l,r} : \overline{\Delta}_{l,r}^{(k)} \rightarrow \overline{\Delta}_r$ der diversen Untersimplizes $\overline{\Delta}_{l,r}^{(k)}$ in $\overline{\Delta}_r$ der k -ten baryzentrischen Unterteilung:

$$B^k(\mathbb{1}_r) = \sum_l g_l t_{l,r} \quad \text{mit} \quad t_{l,r}(\overline{\Delta}_r) = \overline{\Delta}_{l,r}^{(k)}, \quad g_l \in G.$$

Für jedes Glied dieser Summe gilt $d(\Delta_{l,r}^{(k)}) < \epsilon$ und damit liegen die einzelnen Glieder von $B^k(\mathbb{1}_r)$ entweder in $s_r^{-1}(U)$ oder in $s_r^{-1}(V)$. Jetzt wendet man B^k statt auf $\mathbb{1}_r$ auf s_r an und erhält

$$B^k(s_r) = B^k(s_r \mathbb{1}_r) = s_{r*} B^k(\mathbb{1}_r) = s_{r*} \left(\sum_l g_l t_{l,r} \right) = \sum_l g_l s_r(t_{l,r}),$$

dessen einzelne Glieder also U oder in V liegen. Somit ist $B^k c = u + v$ mit $u \in C_r(U)$ und $v \in C_r(V)$. \square

Mit Hilfe der obigen drei Lemmata kann man nun den für die singuläre Homologie so wichtigen Ausschneidungssatz beweisen, den wir oben schon formuliert haben.

Beweis (Ausschneidungssatz): Seien $U \subset A \subset X$, $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ und $i_\bullet : H_r(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_r(X, A)$. Zu zeigen ist, daß die i_\bullet Isomorphismen, also surjektiv und injektiv sind.

1. i_* surjektiv: es soll also gezeigt werden, daß es für jedes $\alpha \in H_r(X, A)$ ein $\beta \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ gibt mit $\alpha = i_\bullet(\beta)$. Seien $\alpha \in H_r(X, A)$ und $z \in Z_r(X, A)$ ein Zyklus relativ A , d.h. $z \in C_r(X)$ mit $\partial_r z \in C_{r-1}(A)$, und sei weiter z aus der Klasse α , d.h. $\alpha = [z]_{(X,A)}$. Dann kann man mittels 21.6.4 solange baryzentrisch unterteilen, bis man $B^k z = a + x$ mit $a \in C_r(\overset{\circ}{A})$ und $x \in C_r(X \setminus \overset{\circ}{U})$ erreicht. Mit 21.6.6 folgt, daß mit $z \in Z_r(X, A)$ auch $B^k z \in Z_r(X, A)$ ist und relativ A homolog zu z ist, d.h.

$$\alpha = [z]_{(X,A)} \simeq [B^k z]_{(X,A)}.$$

Mit $B^k z \in Z_r(X, A)$ ist dann auch $x \in Z_r(X, A)$, und wegen $\partial_r z \in C_{r-1}(A)$ gilt für $\partial_r x$, den Rand von x :

$$\partial_r x \in C_{r-1}(X \setminus U) \quad \text{und} \quad \partial_r x = \partial_r B^k z - \partial_r a \in C_{r-1}(A) \quad \Rightarrow \quad \partial_r x \in C_{r-1}(A \setminus U).$$

Also ist $x \in C_r(X \setminus \overset{\circ}{U}) \subset C_r(X \setminus U)$ ein Zyklus relativ zu $A \setminus U$. Es gibt also für jedes $\alpha \in H_r(X, A)$ eine Klasse $\beta := [x]_{(X,A)} \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ mit $\alpha \simeq [x]_{(X,A)} = \beta$, bzw. $\alpha = i_\bullet(\beta)$.

2. i_\bullet injektiv: es soll gezeigt werden, daß aus $\beta \in H_r(X \setminus U, A \setminus U)$ mit $i_\bullet(\beta) = 0$ folgt $\beta = 0$. Sei $z \in Z_r(X \setminus U, A \setminus U)$ ein Zyklus relativ $A \setminus U$ mit $\beta = [z]_{(X \setminus U, A \setminus U)}$. Jetzt ist $\alpha = i_\bullet(\beta) \in H_r(X, A)$. Die Klasse $\alpha = 0 \in H_r(X, A)$ besteht aus relativen Zyklen aus $Z_r(X, A)$, die gleichzeitig relative Randketten aus $B_r(X, A)$ sind. Also gibt es für das obige $z \in Z_r(X \setminus U, A \setminus U)$ und ein beliebiges $a \in C_r(A)$ ein $c \in C_{r+1}(X)$ mit $\partial_{r+1} c = z + a$. Die Randkette $c \in C_{r+1}(X)$ kann man jetzt baryzentrisch solange unterteilen, bis man $B^k(c) = x + a'$ mit $x \in C_{r+1}(X \setminus \overset{\circ}{U})$ und $a' \in C_{r+1}(\overset{\circ}{A})$ erreicht ist. Damit folgt für den Rand

$$\partial_{r+1} x + \partial_{r+1} a' = \partial_{r+1} B^k(c) = B^k(\partial_{r+1} c) = B^k z + B^k a.$$

Für die Kette

$$y := B^k z - \partial_{r+1} x = \partial_{r+1} a' - B^k a$$

folgt einerseits $y \in C_r(X \setminus U)$, weil $z, \partial_{r+1} x \in C_r(X \setminus U)$, es folgt aber auch andererseits $y \in C_r(A)$, weil $\partial_{r+1} a', a \in C_r(A)$. Daraus folgt $y \in C_r(A \setminus U)$. Wegen $B^k(z) = \partial_{r+1} x + y$ ist also $B^k z$ ein Rand relativ $A \setminus U$, d.h. $B^k z \in B_r(X \setminus U, A \setminus U)$ und damit ist $B^k z$ ein Element der 0-Klasse von $H_r(X \setminus U, A \setminus U)$. Nun sind $B^k z$ und z homolog relativ A , d.h. $\beta = [z]_{(X \setminus U, A \setminus U)} \simeq [B^k z]_{(X \setminus U, A \setminus U)} = 0$. \square

Mit Hilfe des Ausschneidungssatzes kann man auch relative Homologie-Gruppen durch absolute Homologie-Gruppen ersetzen. Von diesem Satz wird in vielen Anwendungen Gebrauch gemacht. Wir folgen wieder Hatcher (2001) (S. 124).

Korollar 21.6.11 Sei (X, A) ein Raumpaar mit $A \subset X$, dann ist

$$H_r(X, A) \simeq H_r(X/A) \quad \text{für } r > 0. \quad (21.6.1)$$

Beweis: Als erstes konstruiert man über A einen Kegel mit Spitze p :

$$CA := (A \times I)/(A \times \{0\}) \quad \text{mit} \quad A = A \times \{1\}, \quad p = A \times \{0\} \quad \Leftrightarrow$$

$$CA = \{a \times t + p \mid a \in A, t \in [0, 1] \in \mathbb{R}, \}.$$

Dieser Raum CA ist einfach zusammenhängend und damit homotop zu einem Punkt $a_0 \in A$ kontrahierbar. Damit gilt für $r > 0$:

$$H_r(X/A) \simeq H_r(X \cup CA).$$

Mit 21.4.8 und dem Ausschneidungssatz folgt

$$H_r(X \cup CA) \simeq H_r(X \cup CA, CA) \simeq H_r(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}),$$

und da $CA \setminus \{p\}$ homotop auf A kontrahiert werden kann folgt also

$$H_r(X/A) \simeq H_r(X, A). \quad \square$$

Mit diesem Ergebnis kann man die lange exakte Sequenz der Homologie-Gruppen 21.4.7 für $r > 0$ jetzt ausschließlich mit absoluten Homologie-Gruppen formulieren:

$$\dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X/A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \quad (21.6.2)$$

21.7 Mayer-Vietoris Sequenzen

Neben der obigen, langen exakten Sequenz der Homologie-Gruppen 21.6.2 gibt es eine weitere lange exakte Sequenz von Homologie-Gruppen, die problemlos aus 21.6.2 abgeleitet werden kann und die sich häufig leichter anwenden läßt, die sog. Mayer-Vietoris Sequenz.

Satz 21.7.1 (Meyer-Vietoris) *Seien X ein topologischer Raum (wie oben) und $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$ eine offene Überdeckung von X , d.h. $X = X_1 \cup X_2$, dann gibt es die folgende, lange exakte Sequenz von Homologiegruppen für $r \geq 0$:*

$$\dots \rightarrow H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots \quad (21.7.1)$$

Für den Randoperator $\partial_\bullet : H_r(X) \rightarrow H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ gilt

$$\partial_\bullet[c] = \begin{cases} [\partial c_1] & \text{auf } X_1, \\ [\partial c_2] & \text{auf } X_2. \end{cases} \quad (21.7.2)$$

Beweis: Wir folgen wieder Stöcker u. Zieschang (1994) (S. 231) und Kriegel (2006) (S. 102 ff.).

1. Man betrachtet zunächst die Kettenkomplexe $C := C(X)$, $C_1 := C(X_1) \subseteq C(X)$, $C_2 := C(X_2) \subseteq C(X)$. Dann ist $C(X_1 \cap X_2) = C_1 \cap C_2$ und $C_1 + C_2 \subseteq C$ die Summe der Kettenkomplexe C_1 und C_2 . Weiter gilt

$$C_1/(C_1 \cap C_2) \simeq (C_1 + C_2)/((C_1 \cap C_2) + C_2) = (C_1 + C_2)/C_2.$$

Die Einbettung $C_1 + C_2 \hookrightarrow C$ induziert eine injektive Einbettung $(C_1 + C_2)/C_2 \hookrightarrow C/C_2$, also ist $C_1/(C_1 \cap C_2) \hookrightarrow C/C_2$ eine injektive Einbettung.

In 21.3.1 hatten wir gesehen, daß die folgende Sequenz

$$0 \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} 0$$

genau dann exakt ist, wenn j injektiv, k surjektiv und $\ker(k) = \text{Im}(j)$ ist. Weiter induziert k einen Isomorphismus $k_\# : B/\text{Im}(j) \rightarrow C$, und wenn $j : A \hookrightarrow B$ eine Einbettung ist, dann ist $A \simeq \text{Im}(j)$ und damit $k_\# : B/A \rightarrow C$ ein Isomorphismus. Dies wenden wir jetzt auf unseren obigen Fall an:

$C_1/(C_1 \cap C_2) \hookrightarrow C/C_2$ ist eine injektive Einbettung und

$$C/C_2 \rightarrow (C/C_2)/(C_1/(C_1 \cap C_2)) \simeq (C/C_2)/((C_1 + C_2)/C_2) \simeq C/(C_1 + C_2)$$

ist also ein Isomorphismus. Damit ist die folgende Sequenz von Kettenkomplexen eine kurze exakte Sequenz:

$$\emptyset \rightarrow C_1/(C_1 \cap C_2) \xrightarrow{j} C/C_2 \xrightarrow{k_\#} C/(C_1 + C_2) \rightarrow \emptyset. \quad (21.7.3)$$

Dieser kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen entspricht die folgende lange exakte Sequenz von Homologiegruppen

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_r(X_1, X_1 \cap X_2) &\xrightarrow{i_\bullet} H_r(X, X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, X_1 + X_2) \\ &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (21.7.4)$$

wobei die Bezeichnungsweise $H(X, X_1 + X_2)$ anzeigen soll, daß die Homologiegruppen H bzgl. ihres Arguments $X_1 + X_2$ aus dem Kettenkomplex $C_1 + C_2 = C(X_1) + C(X_2)$ gebildet wird.

Die beiden Kettenkomplexe $C_1/(C_1 \cap C_2)$ und C/C_2 induzieren die Homologiegruppen $H(X_1, X_1 \cap X_2)$ und $H(X, X_2) = H(X_1 \cup X_2, X_2)$.

Aus dem Ausschneidungssatz 21.6.1 folgt, daß die Inklusion

$$(C_1, C_1 \cap C_2) \hookrightarrow (C, C_2) \quad \text{bzw.} \quad (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2) = (X_1 \cup X_2, X_2)$$

einen Isomorphismus der entsprechenden Homologiegruppen induziert, d.h.

$$H(X_1, X_1 \cap X_2) \simeq H(X, X_2).$$

Aus diesem Isomorphismus folgt dann mit 21.7.4, daß $H(X, X_1 + X_2) = \emptyset$ ist.

2. Jetzt kann man die folgende Sequenz betrachten

$$\emptyset \rightarrow C_1 + C_2 \rightarrow C \rightarrow C/(C_1 + C_2) \rightarrow \emptyset. \quad (21.7.5)$$

Wieder ist $C_1 + C_2 \hookrightarrow C$ eine Inklusion und $C \rightarrow C/(C_1 + C_2)$ ein Isomorphismus. Aus der entsprechenden langen exakten Sequenz

$$\dots \rightarrow H_r(X_1 + X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, X_1 + X_2) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 + X_2) \rightarrow \dots. \quad (21.7.6)$$

folgt wegen $H(X, X_1 + X_2) = \emptyset$, daß $H(X_1 + X_2)$ und $H(X)$ isomorph sind, d.h. $H(X_1 + X_2) \simeq H(X)$.

3. Und schließlich betrachtet man die Sequenz

$$\emptyset \rightarrow C_1 \cap C_2 \xrightarrow{i} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{j} C_1 + C_2 \rightarrow \emptyset, \quad (21.7.7)$$

$$i : c \mapsto (c, -c), \quad j : (c_1, c_2) \mapsto c_1 + c_2.$$

Diese kurze Sequenz ist exakt, denn i ist injektiv und

$$(c_1, c_2) \in \ker(j) \quad \Rightarrow \quad c := c_1 = -c_2 \quad \Rightarrow \quad (c_1, c_2) = (c, -c) \in \text{Im}(i).$$

Also ist auch die folgende lange Sequenz von Homologiegruppen exakt

$$\dots \rightarrow H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X_1 + X_2)$$

$$\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots,$$

und wegen $H(X_1 + X_2) \simeq H(X)$ ist dies äquivalent zu

$$\dots \rightarrow H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots \quad (21.7.8)$$

4. zur expliziten Bestimmung des Randoperators ∂_\bullet betrachten wir die kurze exakte Sequenz des Ketten-Komplexes:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & \\ 0 & \longrightarrow & C_r(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i} & C_r(X_1) \oplus C_r(X_2) & \xrightarrow{j} & C_r(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_{r-1}(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i} & C_{r-1}(X_1) \oplus C_{r-1}(X_2) & \xrightarrow{j} & C_{r-1}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Sei $[c] \in H_r(X)$, dann ist $c = (c_1 + c_2) \in C_r(X)$ ein Zyklus, d.h. $\partial c = 0$. Da die Zeilen im obigen kommutativen Diagramm exakte Sequenzen sind, ist j surjektiv, d.h. es gibt für jedes $c \in C_r(X)$ ein $d \in C_r(X_1) \oplus C_r(X_2)$ mit $j : d \rightarrow c$, und zwar $d = (c_1, c_2)$. Es folgt

$$\partial \circ j(d) = \begin{cases} \partial(c) = 0, \\ j \circ \partial(d) = j(\partial(c_1), \partial(c_2)) = \partial c_1 + \partial c_2, \end{cases}$$

also $\partial c_1 = -\partial c_2$ auf $C_{r-1}(X)$. Damit existiert ein $e \in C_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ mit $i(e) = \partial(d)$. Wegen

$$\partial \circ i(e) = \begin{cases} i(\partial(e)) & \text{und } i \text{ injektiv} \\ \partial^2(d) = 0 \end{cases}$$

folgt $\partial e = 0$, d.h. $[e] \in H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$ und damit ist $\partial_\bullet : H_r(X) \rightarrow H_{r-1}(X_1 \cap X_2)$

$$\partial_\bullet [c] = \begin{cases} [\partial c_1] & \text{auf } X_1, \\ [\partial c_2] & \text{auf } X_2. \end{cases} \quad \square$$

Zwei Beispiele, die auch für sich selbst nützlich sind, mögen hier typische Anwendungen der Mayer-Vietoris Sequenz demonstrieren. Beide Beispiele gehen davon aus, daß gewisse Teilräume $A \subset X$ azyklisch sind, d.h. daß alle Zyklen zugleich auch Ränder sind und damit $H_r(A) = \emptyset$ für $r > 0$ gilt. Dies ist ja etwa für konvexe Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^m$ der Fall (21.2.17).

Beispiel (1):

Seien $X = X_1 \cup X_2$ und $X_1 \cap X_2$ azyklisch, dann folgt $H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2)$ für $r > 0$, denn:

$$\emptyset \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{\partial_\bullet} \emptyset \quad \text{für } r > 1 ,$$

und damit ist mit 21.3.1 für $r > 1$:

$$H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \quad \text{für } r > 1 . \quad (21.7.9)$$

Für den Fall $r = 1$ haben wir die Sequenz:

$$\begin{aligned} \emptyset \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} \\ \xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{0\bullet}} H_0(X) \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset . \end{aligned}$$

Weil $X_1 \cap X_2$ azyklisch ist, ist $X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend und damit folgt also $H_0(X_1 \cap X_2) = G$. Die Abbildung $H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$ ist injektiv, da ein Generator $g \cdot z$ mit $g \in G$ und $[g \cdot z] \in H_0(X_1 \cap X_2)$ auf einen Generator $g \cdot z$ mit $([g \cdot z] \oplus [-g \cdot z]) \in H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$ abgebildet wird. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt:

$$\emptyset = \ker(i_{0\bullet}) = \text{Im}(\partial_{1\bullet}) , \quad \Rightarrow$$

$$\emptyset \xrightarrow{i_{1\bullet}} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} \emptyset ,$$

und damit ist mit 21.3.1 auch für $r = 1$:

$$H_r(X) \simeq H_r(X_1) \oplus H_r(X_2) \quad \text{für } r = 1 . \quad (21.7.10)$$

□

Beispiel (2):

Seien $X = X_1 \cup X_2$ und X_1, X_2 azyklisch, dann folgt

$$H_{r+1}(X) \simeq H_r(X_1 \cap X_2) \quad \text{für } r > 0 \quad \text{und} \quad H_1(X) \simeq G^{n-1} , \quad (21.7.11)$$

wenn $X_1 \cap X_2$ aus n wegzusammenhängenden Teilmengen besteht, denn:

sei $r > 0$, dann gilt

$$\emptyset \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_{r+1}(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_r(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} \emptyset .$$

und es folgt $H_r(X_1 \cap X_2) \simeq H_{r+1}(X)$ nach 21.3.1.

Sei jetzt $r = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) &\xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{0\bullet}} \\ &\xrightarrow{i_{0\bullet}} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{0\bullet}} H_0(X) \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset . \end{aligned}$$

Nun ist $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) = \emptyset$ und $H_0(X) \simeq G$, da X_1 und X_2 azyklisch sind. Weiter bestehe $X_1 \cap X_2$ aus n wegzusammenhängenden Teilmengen, woraus folgt $H_0(X_1 \cap X_2) \simeq G^n$. Damit ist diese exakte Sequenz isomorph zu folgender exakter Sequenz:

$$\emptyset \xrightarrow{j_{1\bullet}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_{1\bullet}} G^m \xrightarrow{i_{0\bullet}} G^2 \xrightarrow{j_{0\bullet}} G \xrightarrow{\partial_{0\bullet}} \emptyset .$$

Wir beginnen die Betrachtung dieser Sequenz auf der rechten Seite:

$$\ker \partial_{0\bullet} = \text{Im } j_{0\bullet} = G \quad \Rightarrow \quad \ker j_{0\bullet} = \text{Im } i_{0\bullet} = G \quad \Rightarrow$$

$$\ker i_{0\bullet} = \text{Im } \partial_{1\bullet} = G^{m-1} \quad \text{und} \quad \ker \partial_{1\bullet} = \text{Im } j_{1\bullet} = \emptyset \quad \Rightarrow$$

$$\dim(H_1(X)) = \dim(\ker \partial_{1\bullet}) + \dim(\text{Im } \partial_{1\bullet}) = G^{m-1} .$$

Also ist $H_1(X) \simeq G^{m-1}$. □

21.8 Kugeln und Kugeloberflächen

Wir hatten im Zusammenhang mit 20.5.8 bereits darauf hingewiesen, daß in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie häufig Abbildungen auf abgeschlossene Kugeln (Bälle) D^n oder Kugeloberflächen (Sphären) S^{n-1} vorkommen und daß daher deren Homologiegruppen von besonderer Bedeutung sind. Auch aus physikalischer Sicht sind natürlich Bälle und Sphären, bzw. deren homöomorphe oder diffeomorphe Abbilder ganz wichtig.

Andererseits zeigt es sich immer wieder, daß in der Topologie die Verallgemeinerung von relativ einfachen Aussagen in 2- oder 3-dimensionalen Räumen auf n -dimensionale Räume extrem schwierig sein kann. Im Zusammenhang mit Sphären sei hier nur auf die sog. Poincaré-Vermutung aus dem Jahr 1904 hingewiesen, die erst im Jahr 2002 von Grigori J. Perelman bewiesen werden konnte (Wikipedia-Poincaré-Vermutung (2015)).

Auch wenn wir im Folgenden keinen Gebrauch von der Poincaré-Vermutung machen und natürlich weit, weit von einem Verständnis von Perelmans Beweis entfernt sind, so soll die Aussage der Poincaré-Vermutung hier doch vorgetragen werden.

Satz 21.8.1 (Poincaré-Vermutung) *Jede einfach zusammenhängende, kompakte, unberandete, 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.*

Die Verallgemeinerung auf n Dimensionen lautet:

Jede geschlossene n -Mannigfaltigkeit M mit dem Homotopietyp einer n -Sphäre ist homöomorph zur n -Sphäre, d.h.

$$\pi_k(M) \simeq \pi_k(S^n) \quad \text{für alle } k \geq 1 \quad \Rightarrow \quad M \simeq S^n .$$

Aber nun wieder zu den einfachen und grundlegenden Themen im Zusammenhang mit Sphären.

D^n , Kugeln (Bälle), sind Teilmengen des \mathbb{R}^n : $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$,
 S^{n-1} , Kugeloberflächen (Sphären), sind Teilmengen des \mathbb{R}^n : $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Wir hatten für die simplizialen Homologiegruppen der Triangulierungen einer abgeschlossenen Kugel $K(D^n)$ und einer Kugeloberfläche $K(S^{n-1})$ gefunden:

$$H_r(K(D^n)) = 0 \quad \text{für } 0 < r < n ,$$

$$H_r(K(S^{n-1})) = 0 \quad \text{für } 0 < r < n - 1 .$$

Da $K(D^n)$ und $K(S^{n-1})$ zusammenhängend sind, galt auch:

$$H_0(K(D^n)) = H_n(K(D^n)) \simeq G , \quad H_0(K(S^{n-1})) = H_{n-1}(K(S^{n-1})) \simeq G$$

mit der abelschen Gruppe G , bei uns $G \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$.

Lemma 21.8.2 *Sei D^n eine abgeschlossene n -dimensionale Kugel und $\partial D^n = S^{n-1}$ die entsprechende Kugeloberfläche (Sphäre), dann gilt*

$$D^n / \partial D^n \simeq S^n . \tag{21.8.1}$$

Beweis: Im Quotientenraum $D^n / \partial D^n$ wird die Kugeloberfläche ∂D^n auf einen Punkt abgebildet. Dies sei der Nordpol y_N einer Kugeloberfläche S^n . Das Innere von D^n , also $\overset{\circ}{D}^n$, können wir homöomorph auf $S^n \setminus y_N$ abbilden.

$$D^n := \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n), \quad ||x|| \leq 1\} ,$$

$$\overset{\circ}{D}^n := \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n), \quad ||x|| < 1\} ,$$

$$\partial D^n := \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n), \quad ||x|| = 1\} ,$$

$$S^n := \{y \mid y = (y_0, y_1, \dots, y_n), \quad ||y|| = 1\} .$$

Wir konstruieren eine Abbildung $f : D^n \rightarrow S^n$ wie folgt

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= y_0 := 2\|x\| - 1, \\ f_k(x) &:= y_k := ax_k \quad \text{mit } \|y\| = 1 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Zunächst sieht man, daß f wie verlangt ∂D^n auf $y_N = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ abbildet. Weiter wird der Mittelpunkt von D^n mit $x = 0$ auf den Südpol von S^n mit $y_S = (-1, 0, \dots, 0) \in S^n$ abgebildet, da in diesem Fall $a = 0$ sein muß. Jetzt können wir für Punkte aus $\overset{\circ}{D}^n$ den Wert von a , bzw. ax_k , aus der Bedingung $\|y\| = 1$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= 4\|x\|^2 - 4\|x\| + 1 + a^2\|x\|^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \\ (4 + a^2)\|x\|^2 &= 4\|x\| \quad \text{für } \|x\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{4}{\|x\|^2}(\|x\| - \|x\|^2) \end{aligned}$$

$$a = \frac{2}{\|x\|}(\|x\| - \|x\|^2)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad ax_k = \frac{x_k}{\|x\|} 2(\|x\| - \|x\|^2)^{1/2}. \quad \square$$

Für $x_k \rightarrow 0$ geht auch $ax_k \rightarrow 0$. Damit ist $f : \overset{\circ}{D}^n \rightarrow S^n \setminus y_N$ umkehrbar und ein Homöomorphismus. Auf ∂D^n ist f natürlich kein Homöomorphismus, aber wenn man zum Quotientenraum $D^n / \partial D^n$ übergeht, bei dem ja gerade ∂D^n auf einen Punkt abgebildet wird, hier auf y_N , dann ist $f : D^n / \partial D^n \rightarrow S^n$ wieder ein Homöomorphismus.

Wie schon erwähnt, sind für mathematische und physikalische Anwendungen die Homologiegruppen der Kugeloberflächen (Sphären) S^n besonders interessant.

Satz 21.8.4

$$H_r(S^n) = \begin{cases} G & \text{für } r = n, \\ \emptyset & \text{für } r \neq n. \end{cases} \quad (21.8.2)$$

Beweis: Man betrachtet die lange exakte Sequenz der Homologie-Gruppen 21.6.2 für $r > 0$ mit $X = D^n$, $A = \partial D^n = S^{n-1}$ und $X/A = D^n / \partial D^n = D^n / S^{n-1} = S^n$ und erhält

$$\dots \rightarrow H_r(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(D^n) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(S^n) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(D^n) \rightarrow \dots$$

Nun ist $H_r(D^n) = 0$ für $r > 0$, da D^n wegzusammenhängend ist, und damit folgt für $r > 0$

$$\dots \rightarrow H_r(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} \emptyset \xrightarrow{j_\bullet} H_r(S^n) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_\bullet} \emptyset \rightarrow \dots$$

Weil diese Sequenz exakt ist, ist $\partial_\bullet : H_r(S^n) \rightarrow H_{r-1}(S^{n-1})$ ein Isomorphismus.

1. $r > n > 0$:

$$H_r(S^n) \simeq H_{r-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq H_{r-n}(S^0) = \emptyset .$$

2. $n > r > 0$:

$$H_r(S^n) \simeq H_{r-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq H_1(S^{n-r+1}) \simeq H_1(D^{\overset{\circ}{n-r}}) = \emptyset .$$

3. $n = r > 0$:

$$H_n(S^n) \simeq H_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq H_1(S^1) .$$

$H_1(S^1)$ bestimmt man am einfachsten mit Hilfe der Mayer-Vietoris Sequenz von 21.7.11. S^1 kann man in die zwei offene Halbkreisbögen $S^1 = D_+^1 \cup D_-^1$ zerlegen. D_+^1 und D_-^1 sind jeweils wegzusammenhängend und damit azyklisch und $D_+^1 \cap D_-^1 \simeq S^0 = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid |x| = 1\} = \{+1, -1\}$. Damit besteht $D_+^1 \cap D_-^1$ aus $n = 2$ wegzusammenhängenden Teilmengen und damit ist nach 21.7.11

$$H_1(S^1) = H_1(D_+^1 \cup D_-^1) \simeq G^1 \quad \Rightarrow$$

$$H_r(S^n) = G \quad \text{für } r = n . \quad \square$$

Für die simplizialen Homologiegruppen hatten wir in 20.6.6 die Aussage $H_m(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq G$ bewiesen. Jetzt soll die gleiche Aussage auch für die singulären Homologiegruppen bewiesen werden.

Satz 21.8.6 Für $m \geq 0$ gilt

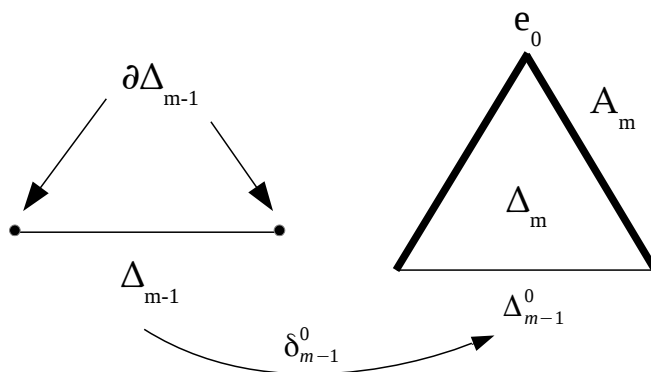
$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{für } r \neq m , \\ G & \text{für } r = m . \end{cases} \quad (21.8.3)$$

Beweis: Sei zunächst $m = 0$, dann ist $\Delta_0 = \{1\}$ und $\partial\Delta_0 = \emptyset$ und damit ist

$$H_r(\Delta_0, \partial\Delta_0) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = 0 , \\ \emptyset & \text{für } r > 0 . \end{cases}$$

Jetzt sei $m > 0$. Wir betrachten Δ_m und bezeichnen jene Seite, welche gegenüber des Punktes $e_0 \in \Delta_m$ liegt mit Δ_{m-1}^0 . Weiter bezeichnen wir mit A_m alle Seiten von Δ_m ohne Δ_{m-1}^0 . Wir untersuchen nun die lange exakte Homologiesequenz des Raumtripels $(\Delta_m, \partial\Delta_m, A_m)$ mit $A_m \subset \partial\Delta_m \subset \Delta_m$ (siehe 21.4.12):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_r(\partial\Delta_m, A_m) &\xrightarrow{i_\bullet} H_r(\Delta_m, A_m) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \\ &\xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(\Delta_m, A_m) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Abbildung 21.1: Bezeichnungen beim Simplex Δ_m

Da A_m ein Deformationsretrakt von Δ_m ist folgt $H_r(\Delta_m, A_m) \simeq H_r(A_m, A_m) = \emptyset$, und daraus folgt

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m). \quad (21.8.4)$$

Nun ist $\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}$ homomöorph zu $\partial\Delta_m/A_m$ und damit sind die entsprechenden Homologiegruppen isomorph, d.h. $H_r(\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\partial\Delta_m/A_m)$.

Nach 21.6.1 gilt für die Raumpaare $(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1})$ und $(\partial\Delta_m, A_m)$

$$H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\Delta_{m-1}/\partial\Delta_{m-1}) \quad \text{für } r > 0,$$

$$H_r(\partial\Delta_m, A_m) \simeq H_r(\partial\Delta_m/A_m) \quad \text{für } r > 0,$$

und damit folgt

$$H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}) \simeq H_r(\partial\Delta_m, A_m). \quad (21.8.5)$$

Aus 21.8.4 und 21.8.5 folgt

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq H_{r-1}(\partial\Delta_m, A_m) \simeq H_r(\Delta_{m-1}, \partial\Delta_{m-1}),$$

und damit folgt die Behauptung durch vollständige Induktion. \square

Da die Homologiegruppen invariant unter Homöomorphismen sind, folgt aus dem obigen Satz sofort das Korollar:

Korollar 21.8.8 Für $m \geq 0$ gilt

$$H_r(D^m, S^{m-1}) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = m, \\ \emptyset & \text{für } r \neq m. \end{cases}$$

21.9 Äquivalenz von simplizialer und singulärer Homologie

Einen simplizialen Komplex K hatten wir aus endlich vielen Basis-Simplexen erzeugt und daher war $H_r(K) = 0$ für $r > m$, wenn m die Raumdimension von K ist. Dagegen kann sich ein singulärer Komplex aus einer *sehr großen* Anzahl singulärer Simplexe zusammensetzen, kurzum: die Dimension der r -Kettengruppe $C_r(X)$ eines topologischen Raums X ist überabzählbar. Es ist daher alles andere als trivial, daß die simplizialen und die singulären Homologiegruppen tatsächlich in irgendeiner Weise zueinander isomorph sein könnten!

Es soll jetzt allerdings gezeigt werden, daß diese beiden verschiedenen Homologiegruppen auf einem simplizialen Komplex zueinander isomorph sind. Zur Unterscheidung wollen wir die simplizialen Homologiegruppen hier als $H_r^\Delta(K)$ bezeichnen und die singulären Homologiegruppen als $H_r(K)$. Wir folgen im Beweis Hatcher (2001), S. 128 ff.

Sei K ein endlicher simplizialer Komplex und $A \subset K$ ein Teilkomplex. Es gibt nun einen kanonischen Homöomorphismus $\sigma_r : \Delta_r \rightarrow K$, auch *charakteristische Abbildung* genannt, die einen r -Simplex in den simplizialen Komplex K abbildet. Zu jedem simplizialen Kettenkomplex $C_r^\Delta(K, A)$ gibt es also einen entsprechenden singulären Kettenkomplex $C_r(K, A)$, der aus den σ_r gebildet wird und einen entsprechenden induzierten Homomorphismus $H_r^\Delta(K, A) \rightarrow H_r(K, A)$. Zu zeigen ist, daß diese Homomorphismen für alle r Isomorphismen sind.

Satz 21.9.1 *Sei K ein endlichdimensionaler simplizialer Komplex, $A \subset K$ ein Teilkomplex, dann sind die Homomorphismen $H_r^\Delta(K, A) \rightarrow H_r(K, A)$ für alle r Isomorphismen.*

Beweis: Sei zunächst $A = \emptyset$. Sei weiter K^m das m -Skelett von K , d.h. die Summe aller Simplexe mit einer Dimension $\leq m$. Für die singulären Homologiegruppen können wir mit 21.4.7 die folgende exakte Sequenz aufstellen:

$$H_{r+1}(K^m, K^{m-1}) \rightarrow H_r(K^{m-1}) \rightarrow H_r(K^m) \rightarrow H_r(K^m, K^{m-1}) \rightarrow H_{r-1}(K^{m-1}) .$$

Das gleiche algebraische Argument, das zur Herleitung dieser exakten Sequenz geführt hat, läßt sich unverändert auf die simplizialen Homologiegruppen anwenden und führt auch dort zu der entsprechenden exakten Sequenz. Damit erhält man das folgende kommutative Diagramm exakter Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{r+1}^\Delta(K^m, K^{m-1}) & \rightarrow & H_r^\Delta(K^{m-1}) & \rightarrow & H_r^\Delta(K^m) & \rightarrow & H_r^\Delta(K^m, K^{m-1}) & \rightarrow & H_{r-1}^\Delta(K^{m-1}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ H_{r+1}(K^m, K^{m-1}) & \rightarrow & H_r(K^{m-1}) & \rightarrow & H_r(K^m) & \rightarrow & H_r(K^m, K^{m-1}) & \rightarrow & H_{r-1}(K^{m-1}) \end{array}$$

Mittels vollständiger Induktion nach m und dem Fünferlemma (21.3.2) soll jetzt gezeigt werden, daß die Homomorphismen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ tatsächlich Isomorphismen sind. In 20.6.6

wurde für die simplizialen Homologiegruppen gezeigt

$$H_r^\Delta(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = m, \\ \emptyset & \text{für } r \neq m, \end{cases}$$

und in 21.8.3 die Entsprechung für die singulären Homologiegruppen:

$$H_r(\Delta_m, \partial\Delta_m) \simeq \begin{cases} G & \text{für } r = m, \\ \emptyset & \text{für } r \neq m. \end{cases}$$

Damit sind die obigen Homomorphismen α und δ Isomorphismen. Nach Induktionsannahme für $m - 1$ sind β und ϵ Isomorphismen und wegen des Fünferlemmas ist dann auch $\gamma : H_r^\Delta(K^m) \rightarrow H_r(K^m)$ ein Isomorphismus.

Jetzt sei $\emptyset \subset A = K^i \subset K^m$, mit $0 < i < m$, dann können wir mit der langen exakten Sequenz 21.4.7 für das Paar (X, A) das folgende kommutative Diagramm aufstellen:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_r^\Delta(A) & \rightarrow & H_r^\Delta(K^m) & \rightarrow & H_r^\Delta(K^m, A) & \rightarrow & H_{r-1}^\Delta(A) & \rightarrow & H_{r-1}^\Delta(K^m) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ H_r(A) & \rightarrow & H_r(K^m) & \rightarrow & H_r(K^m, A) & \rightarrow & H_{r-1}(A) & \rightarrow & H_{r-1}(K^m) \end{array}$$

Die Homomorphismen $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sind nach dem oben Bewiesenen Isomorphismen, und mittels des Fünferlemmas (21.3.2) ist dann auch γ eine Isomorphismus. \square

21.10 Glatte singuläre Homologiegruppen

Bislang haben wir Homologiegruppen von allgemeinen topologischen Räumen X bzgl. einer additiven freien, abelschen Gruppe G definiert, wobei in der Homologie-Theorie für G zumeist \mathbb{Z} gewählt wird. Wenn man als topologische Räume jedoch differenzierbare Mannigfaltigkeiten M wählt, dann steht einem natürlich sehr viel mehr Struktur als in allgemeinen topologischen Räumen zur Verfügung. In diesem Fall wählt man als freie, abelsche Gruppe G natürlich \mathbb{R} und erhält damit sowohl für G als auch für die r -Kettengruppen $C_r(M; \mathbb{R})$ Vektorräume. De Rham hat 1931 in seiner Doktorarbeit gezeigt, daß die so definierten Homologiegruppen zu den (de Rham) Kohomologiegruppen, die wir in einem Folgekapitel betrachten wollen, isomorph sind!

An dieser Stelle wollen wir jetzt die glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M; \mathbb{R})$ einführen und deren Isomorphie zu $H_r(M; \mathbb{R})$, den einfachen singulären Homologiegruppen, zeigen.

Zur Definition der glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M; \mathbb{R})$ geht man von den gewöhnlichen stetigen Abbildungen $s_r \in C^0$ zu glatten Abbildungen $s_r \in C^\infty$ über und baut daraus die glatten singulären r -Kettengruppen $C_r^\infty(M; \mathbb{R})$ und die entsprechenden glatten singulären Homologiegruppen $H_r^\infty(M; \mathbb{R})$ auf.

Satz 21.10.1 *Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Inklusion $C_r^\infty(M; \mathbb{R}) \subset C_r(M; \mathbb{R})$ induziert einen Isomorphismus der entsprechenden Homologiegruppen*

$$H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \simeq H_r(M; \mathbb{R}) . \quad (21.10.1)$$

Beweis: Der Beweis wird per Induktion über die Karten ($\simeq \mathbb{R}^m$) der Mannigfaltigkeit geführt. Der Induktionsbeginn $k = 1$ entspricht einer einzigen Karte $\simeq \mathbb{R}^m$. Wir hatten in 21.2.7 bewiesen, daß für wegzusammenhängende topologische Räume X gilt: $H_0(X, G) \simeq G$ und $H_r(X, G) \simeq 0$ für $r > 0$. Nun ist \mathbb{R}^m wegzusammenhängend und der Beweis in 21.2.7 funktioniert für glatte singuläre r -Kettengruppen $C_r^\infty(M; \mathbb{R})$ gleichermaßen wie für stetige singuläre Kettenabbildungen. Also gilt

$$H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \simeq H_r(M; \mathbb{R}) ,$$

wenn M nur aus einer Karte besteht.

Sei jetzt die Behauptung für $U := \bigcup_{i=1}^k U_i$, bestehend aus den k Karten U_1, \dots, U_k erfüllt. Wir setzen $V := U_{k+1}$ und wenden die folgende Mayer-Vietoris Sequenz (21.7.1) und das Fünferlemma (21.3.2) an:

$$\begin{array}{ccccc} H_{r+1}^\infty(U \cap V) & \rightarrow & H_{r+1}^\infty(U) \oplus H_{r+1}^\infty(V) & \rightarrow & H_{r+1}^\infty(U \cup V) & \rightarrow \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ H_{r+1}(U \cap V) & \rightarrow & H_{r+1}(U) \oplus H_{r+1}(V) & \rightarrow & H_{r+1}(U \cup V) & \rightarrow \\ \\ \rightarrow H_r^\infty(U \cap V) & \rightarrow & H_r^\infty(U) \oplus H_r^\infty(V) & & & \\ & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon & & \\ \rightarrow H_r(U \cap V) & \rightarrow & H_r(U) \oplus H_r(V) & & & \end{array}$$

Die Homomorphismen $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ sind nach Induktionsvoraussetzung Isomorphismen, also ist mit dem Fünferlemma auch γ ein Isomorphismus und damit die Behauptung für $k + 1$ Karten bewiesen. \square

22 Morse Theorie

22.1 Harold Calvin Marston Morse (1892-1977)

Marston Morse war ein bedeutender US-amerikanischer Mathematiker. Morse wurde 1917 bei Birkhoff in Harvard promoviert und arbeitete dann an den Universitäten von Harvard, Cornell, Brown, Harvard, bevor er 1935 an das Institute for Advanced Study in Princeton ging.

Morse hat sich zeitlebens mit Differentialgeometrie und der *Analysis im Großen*, bzw. *Variationsrechnung im Großen* beschäftigt. Am berühmtesten wurde seine später nach ihm benannte Theorie der Extrema von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die *Morse-Theorie*. Einer Mannigfaltigkeit wird eine hinreichend glatte Funktion zugewiesen, eine sog. *Morse-Funktion*, die eine Verallgemeinerung einer Höhenfunktion darstellt. Das *Morse-Lemma* besagt dann, daß diese Funktion in der Nähe eines kritischen Punktes durch eine quadratische Form approximiert werden kann. Die Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Hilberträume stammt von Palais und Smale und trägt den Namen *Morse-Palais Lemma*.

Aus den Änderungen der Morse-Funktion bzgl. der Homotopie und Homologie an kritischen Punkten werden schließlich weitreichende Folgerungen auf die Topologie der Mannigfaltigkeit gezogen. Diese Theorie hat viele Anwendungen in den unterschiedlichsten Gebieten gefunden, denn Maxima-Minima-Fragen treten ja eigentlich überall auf.

Im Jahr 1933 erhielt er den Bôcher Memorial Prize der American Mathematical Society für: „The foundations of a theory of the calculus of variations in the large in m -space“.

[Quelle: en.wikipedia: Marston Morse]



Abbildung 22.1: H.C. Marston Morse
K. Jacobs (1965), CC BY-SA 2.0 de.
[https://en.wikipedia.org/wiki/Harold_Calvin_Marston_Morse]

22.2 John Willard Milnor (1931)

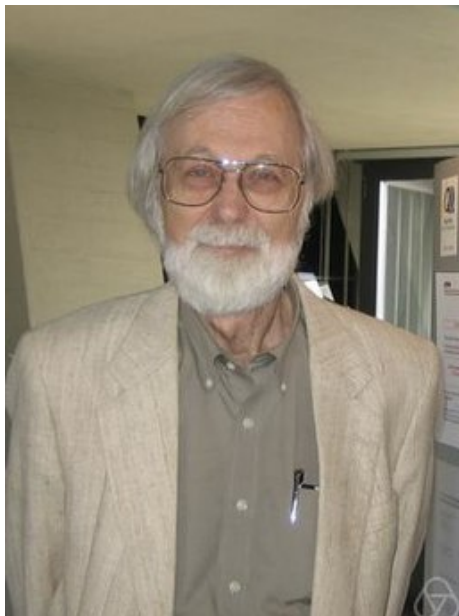


Abbildung 22.2: John W. Milnor
G.-M. Greuel (2007), CC BY-SA 2.0 de.
[https://en.wikipedia.org/wiki/John_Willard_Milnor]

Milnor ist ein berühmter US-amerikanischer Mathematiker, der die Gebiete der Differential-Topologie, der K-Theorie und der holomorphen dynamischen Systeme mit seinen Erkenntnissen wesentlich bereichert hat. Aber er unternahm auch zusammen mit seinem Freund John Nash Ausflüge in die Spieltheorie.

Milnor gehört zu den wenigen Mathematikern, welche mit der Fields-Medaille, dem Wolf-Preis und dem Abel-Preis ausgezeichnet wurden. Die Fields-Medaille erhielt Milnor im Jahr 1962 für seinen Beweis, daß die 7-dimensionale Sphäre S^7 mehrere 'exotische', d.h. inäquivalente Differential-Strukturen besitzt - womit er das neue Feld der Differential-Topologie begründete. Die Fields-Medaille wird nur alle 4 Jahre und nur an Mathematiker unter 40 Jahren vergeben, und daher war der jährlich vergebene Wolf-Preis, den Milnor 1989 erhielt, so etwas wie der Nobelpreis der Mathematik. Die Laudatio des Wolf-Preises erwähnt neben Milnors Arbeit über die S^7 auch seine Forschungen zu singulären Punkten komplexer Hyperflächen, überraschende neue Ergebnisse im Zusammenhang mit dem geometrischen Konzept der Torsion und insb. auch seine außergewöhnliche Lehrbücher!

Der erste reguläre Abel-Preis, der die Lebensleistung eines Mathematikers auszeichnet, wurde im Jahr 2003 vergeben, und Milnor erhielt diesen Preis im Jahr 2011 für seine herausragenden Beiträge auf den Gebieten der Topologie, Geometrie und Algebra.

Milnor hatte in Princeton studiert und bei Fox über Verallgemeinerungen von Knotengruppen promoviert. Seit 1960 wirkte er in Princeton und zuletzt an der State University of New York in Stony Brook.

Zu den außergewöhnlichen Lehrbüchern von Milnor, die viele Generationen von Mathematikern inspiriert haben, gehören sein:

- *Morse Theory* by J. Milnor, Milnor (1963). Diese großartige Darstellung der Morse Theorie ist der Grund, warum wir uns hier mit Milnor beschäftigen!
- *Topology from a Differentiable Viewpoint*, Milnor (1965). Dies ist mit seinen nur 64 Seiten wirklich ein Meisterwerk. Wenn aber ein normaler mathematischer Physiker alle Milnor-Beweise in diesem Büchlein wirklich nachvollziehen möchte, dann bedarf es hier der Ergänzung durch die *Differential Topology*, von Guillemin u. Pollack (1974).

- *Characteristic Classes*, Milnor u. Stasheff (1974).
- *Dynamics in one complex variable*, Milnor (1999).

Einer von Milnors zahlreichen bedeutenden Schülern ist Michael Spivak, dem wir u.a. das große 5-bändige Werk *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. I-V* Spivak (1979) verdanken, eine unerschöpfliche Quelle der Inspiration über Differentialgeometrie für Anfänger und Fortgeschrittene :-)

[Quelle: en.wikipedia: John Milnor]

22.3 Morse Theorie - Homotopie und Henkelzerlegung

Die Morse Theorie erlaubt es aus dem Studium differenzierbarer reellwertiger Funktionen auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit Rückschlüsse über die Topologie der Mannigfaltigkeit zu gewinnen. Die wesentlichen Gedanken hierzu stammen von dem US-Mathematiker Marston Morse (1892-1977). Vorüberlegungen zu Höhenfunktionen topographischer Karten stammten u.a. von James Clerk Maxwell (1831-1879).

Wenn man die Extrema einer reellwertigen Funktion auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit untersucht und sich die reellwertige Funktion als die Höhenfunktion eines zunehmenden Wasserspiegels vorstellt, dann stellt man fest, daß sich mit jedem Extremum der Mannigfaltigkeit ihr Homotopietyp auf eine definierte Weise ändert. Dies kann man mit sog. Henkelzerlegungen beschreiben. Wenn man nun diese Ergebnisse in exakte Sequenzen relativer Homologiegruppen einsetzt gelangt man zu den beiden berühmten Morse-Ungleichungen, der schwachen und der starken Morse-Ungleichung. Deren Herleitung ist hier unser Ziel.

Mittels der Morse-Ungleichungen können dann Physiker Extrema der von ihnen betrachteten physikalischen Mannigfaltigkeiten untersuchen. Insofern ist dieses Thema für die theoretische Physik tatsächlich sehr relevant.

Wir folgen anfangs dem frühen Standardwerk von Milnor (1963), ergänzt durch die sehr schöne und ausführliche Masterarbeit von Chhim (2017) und der moderneren Darstellung von Nicolaescu (2012) S. 33-66. Nicolaescu (2012) behandelt auch die Weiterentwicklung der Morse Theorie zur Morse-Floer Homologie und damit *hamiltonsche Flüsse* in symplektischen Mannigfaltigkeiten, worauf wir hier aber nicht eingehen wollen. In unserer anschließenden Herleitung der Morse-Ungleichungen orientieren wir uns an Eschrig (2011), S. 151 ff. und unserer eigenen Darstellung der relativen singulären Homologiegruppen 21.4.1, ff.

Definition 22.3.1 Sei M eine m -dimensionale differenzierbare kompakte Mannigfaltigkeit. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige C^r -Funktion mit $r \geq 2$, sei $q_0 \in M$ und U eine Umgebung um q_0 mit einem lokalen Koordinatensystem (x^1, \dots, x^m) .

q_0 heißt ein nichtentarteter kritischer Punkt von f , wenn $\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{q_0} = 0$ ist und wenn die Hesse-Matrix $H_{ij} := (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}|_{q_0})$ nicht entartet ist, d.h. $\det(H) \neq 0$. Da die Hesse-Matrix H reell und symmetrisch ist, ist sie auch diagonalisierbar und hat reelle Eigenwerte. Die Anzahl $\lambda \in \mathbb{N}_0$ der negativen Eigenwerte von H heißt der Index des nichtentarteten kritischen Punktes q_0 .

Wenn die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige C^∞ -Funktion ist, deren sämtliche kritischen Punkt nichtentartet sind, so heißt f eine Morse-Funktion.

Da H nicht entartet ist sind alle Eigenwerte $\neq 0$ und bleiben dies auch bei einer Koordinatentransformation mit einer regulären Jacobi-Matrix A wegen $\det(AHA^{-1}) = \det(H)$. Auch der Index ist koordinatenunabhängig, da bei einer Koordinatentransformation kein Eigenwert einen Nulldurchgang hat.

Bei einem Index $\lambda = 0$ liegt ein Minimum der Funktion f vor, bei $\lambda = m$ ein Maximum und bei $0 < \lambda < m$ ein Sattelpunkt.

Satz 22.3.2 (Morse Lemma) Sei $q_0 \in M$ ein nichtentarteter kritischer Punkt einer reellwertigen C^r -Funktion, $r \geq 2$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, mit einem Index λ , und sei $U_{q_0} \subset M$ eine Umgebung um q_0 mit einem lokalen Koordinatensystem (x^1, \dots, x^m) , dann gilt: es gibt in $U_{q_0}'' \subset U_{q_0}$ ein lokales Koordinatensystem (z^1, \dots, z^m) mit $q_0 = (0, \dots, 0)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^1, \dots, z^m) - \tilde{f}(0, \dots, 0) &:= f(x^1(z^1, \dots, z^m), \dots, x^m(z^1, \dots, z^m)) - f(0, \dots, 0) \\ &= -(z^1)^2 - \dots - (z^\lambda)^2 + (z^{\lambda+1})^2 + (z^m)^2. \end{aligned} \quad (22.3.1)$$

Beweis: Der Beweis macht von der folgenden einfachen Identität Gebrauch:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^m) - f(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \frac{df(tx^1, \dots, tx^m)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(tx^1, \dots, tx^m)}{\partial (tx^i)} \frac{d(tx^i)}{dt} dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \int_0^1 \frac{\partial f(tx^1, \dots, tx^m)}{\partial (tx^i)} dt = \sum_{i=1}^m x^i \int_0^1 \frac{\partial f(y^1, \dots, y^m)}{\partial (y^i)} \Big|_{(tx^1, \dots, tx^m)} dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i g_i(x^1, \dots, x^m). \end{aligned}$$

Weil $q_0 = (0, \dots, 0)$ ein kritischer Punkt von f ist gilt:

$$\frac{\partial f(y^1, \dots, y^m)}{\partial (y^i)} \Big|_{(0, \dots, 0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_i(0, \dots, 0) = 0.$$

Also kann man für jedes $g_i(x^1, \dots, x^m)$ diese Konstruktion noch einmal wiederholen:

$$g_i(x^1, \dots, x^m) = \int_0^1 \frac{dg(sx^1, \dots, sx^m)}{ds} ds = \sum_{j=1}^m x^j \int_0^1 \frac{\partial g(y^1, \dots, y^m)}{\partial (y^j)} \Big|_{(sx^1, \dots, sx^m)} ds.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^m) - f(0, \dots, 0) &= \sum_{i,j=1}^m x^i x^j \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{\partial^2 f(y^1, \dots, y^m)}{\partial y^i \partial y^j} \Big|_{(stx^1, \dots, stx^m)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^m x^i x^j \int_0^1 ds \int_0^1 dt H_{ij}(stx^1, \dots, stx^m) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^m x^i x^j \bar{H}_{ij}(x^1, \dots, x^m). \end{aligned}$$

Für die Matrix \bar{H} gilt

$$\bar{H}_{ij}(0, \dots, 0) = H_{ij}(0, \dots, 0) \int_0^1 ds \int_0^1 dt = H_{ij}(0, \dots, 0),$$

und daher ist mit H auch \bar{H} nichtentartet, d.h. alle seine Eigenwerte sind $\neq 0$. Da $\bar{H}_{ij}(x^1, \dots, x^m)$ stetig von (x^1, \dots, x^m) abhängt, hängen auch die Eigenwerte $\lambda^i(x^1, \dots, x^m)$ stetig von (x^1, \dots, x^m) ab. Da \bar{H} eine reell-symmetrische Matrix ist kann sie mit einer orthogonalen Matrix A diagonalisiert werden. Auch für das neue Koordinatensystem $y^i := A_{ij}x^j$ gibt es eine Umgebung $U'_{q_0} \subseteq U_{q_0}$ um $q_0 \in M$, in der die Eigenwerte $\lambda^i(y^1, \dots, y^m) \neq 0$ sind. In dieser Umgebung führen wir mit $z^i := y^i / \sqrt{\lambda^i(y^1, \dots, y^m)}$ nochmal ein neues Koordinatensystem ein in einer evtl. kleineren Umgebung $U''_{q_0} \subseteq U'_{q_0} \subseteq U_{q_0}$, in welcher $\lambda^i(z^1, \dots, z^m) \neq 0$ ist. Daraus folgt

$$\tilde{f}(z^1, \dots, z^m) := f(x^1(z^1, \dots, z^m), \dots, x^m(z^1, \dots, z^m)) \quad \text{und}$$

$$\tilde{f}(0, \dots, 0) = f(0, \dots, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(z^1, \dots, z^m) - \tilde{f}(0, \dots, 0) = f(x^1, \dots, x^m) - f(0, \dots, 0) = \sum_{i,j=1}^m x^i x^j \bar{H}_{ij}(x^1, \dots, x^m)$$

$$= \sum_{i=1}^m (z^i)^2 \lambda^i(z^1, \dots, z^m) = - \sum_{i=1}^{\lambda} (z^i)^2 + \sum_{i=\lambda}^m (z^i)^2. \quad \square$$

Aus dem Morse-Lemma kann man jetzt zwei einfache Schlüsse ziehen, die im folgenden Korollar zusammengefaßt sind.

Korollar 22.3.4 1. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, d.h. eine reellwertige C^∞ -Funktion, dann ist jeder nichtentartete kritische Punkt ein isolierter Punkt.

2. Wenn M zusätzlich kompakt ist, dann gibt es nur eine endliche Anzahl kritischer Punkte.

Beweis: 1. es gibt um einen nichtentarteten kritischen Punkt $q_0 = (0, \dots, 0) \in M$ eine Umgebung U'' mit einem lokalen Koordinatensystem (z^1, \dots, z^m) mit

$$\tilde{f}(z^1, \dots, z^m) - \tilde{f}(0, \dots, 0) = -(z^1)^2 - \dots - (z^\lambda)^2 + (z^{\lambda+1})^2 + (z^m)^2.$$

Damit folgt

$$d\tilde{f}(z^1, \dots, z^m) = -2dz^1 - \dots - 2dz^\lambda + 2dz^{\lambda+1} + 2dz^m, \quad \square$$

und dies ist nur Null am Punkt $q_0 = (0, \dots, 0) \in M$. Also sind die nichtentarteten kritischen Punkte isoliert.

2. Jetzt sei M kompakt. Wenn die Anzahl der kritischen Punkt nun unendlich ist, dann gibt es in einer unendlichen Folge kritischer Punkte eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in M liegt. Dieser Grenzwert ist nun kein isolierter kritischer Punkt, also ist die Anzahl der kritischen Punkte endlich.

Milnor (1963) und alle ihm folgenden Autoren verwenden als einfaches Beispiel zur Klärung des Problems und des Lösungsweges einen 2-dimensionalen Torus T^2 im 3-dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 und die Höhenfunktion $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ als Morsefunktion.

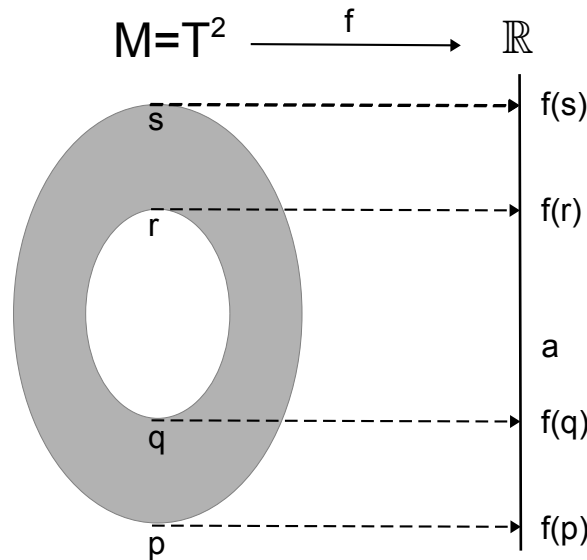


Abbildung 22.3: Beispiel einer Morsefunktion $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, die ein Subniveau charakterisieren möge, dann wollen wir jetzt die folgenden Subniveau-Mengen M^a genauer untersuchen, die als Urbildmengen der Morsefunktion f definiert sind:

$$M^a := f^{-1}((-\infty, a]) = \{q \in M, f(q) \leq a\}. \tag{22.3.2}$$

Wenn wir nun das Subniveau a höherschieben, dann ändert sich die Topologie von M^a offensichtlich nur, wenn das Subniveau einen kritischen Punkt passiert.

Zusätzlich möchten wir an gewisse M^a noch sogenannte λ -Zellen anhängen. Diese λ -Zellen sind eine Begriffsbildung aus der Theorie der CW-Komplexe von Whitehead.

Definition 22.3.6 Seien $Y \subset X$ beliebige topologische Hausdorff-Räume, dann ist eine λ -Zelle e^λ eine Teilmenge von X , die homöomorph zu einer λ -dimensionalen Kugel D^λ in einem geeigneten \mathbb{R}^n ist:

$$e^\lambda \simeq D^\lambda := \{x \in \mathbb{R}^\lambda, \|x\| \leq 1\}, \tag{22.3.3}$$

$$\partial e^\lambda \simeq S^{\lambda-1} := \{x \in \mathbb{R}^\lambda, \|x\| = 1\}. \tag{22.3.4}$$

Das Anheften einer λ -Zelle an Y mittels einer stetigen Funktion $g : \partial e^\lambda \rightarrow Y$ ist definiert als die Vereinigung der Punktmenge von e^λ und Y mit einer Identifizierung der Randpunkte von $x \in \partial e^\lambda$ mit $g(x) \in Y$, abgekürzt als:

$$Y \cup_g e^\lambda. \tag{22.3.5}$$

Wir untersuchen jetzt verschiedene Subniveaus im obigen Beispiel des T^2 -Torus.

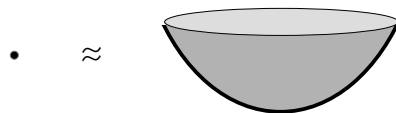


Abbildung 22.4: $f(p) < a < f(q)$

M^a ist homöomorph zu einer Kreisscheibe D^2 , hat am Punkt p ein Minimum mit Morseindex $\lambda = 0$ und ist homotop zu einer 0-Zelle $\simeq D^0$, d.h. zu einem Punkt.

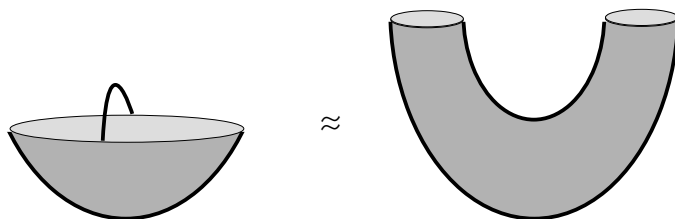


Abbildung 22.5: $f(q) < a < f(r)$

M^a ist homöomorph zu einem Zylinder, hat am Punkt q einen Sattelpunkt mit Morseindex $\lambda = 1$ und ist homotop zu einer Kreisscheibe (wie oben) plus angehängter 1-Zelle $\simeq D^1$, d.h. zu einem Geradenstück.

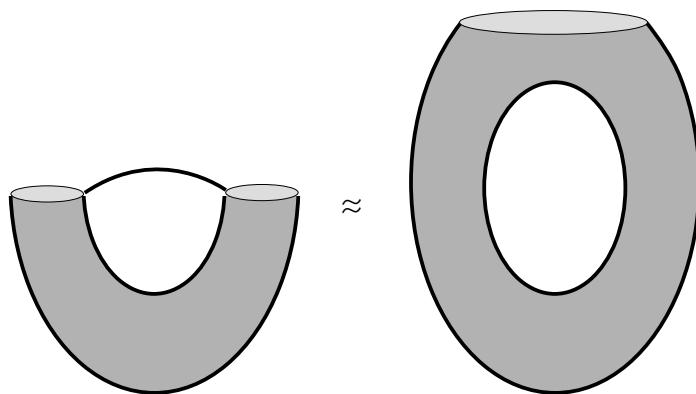


Abbildung 22.6: $f(r) < a < f(s)$

M^a ist homöomorph zu einem Torus mit abgeschnittener oberer Kreisscheibe, hat am

Punkt r einen Sattelpunkt mit Morseindex $\lambda = 1$ und ist homotop zu einem Zylinder (wie oben) plus angehängter 1-Zelle $\simeq D^1$, d.h. zu einem Geradenstück.

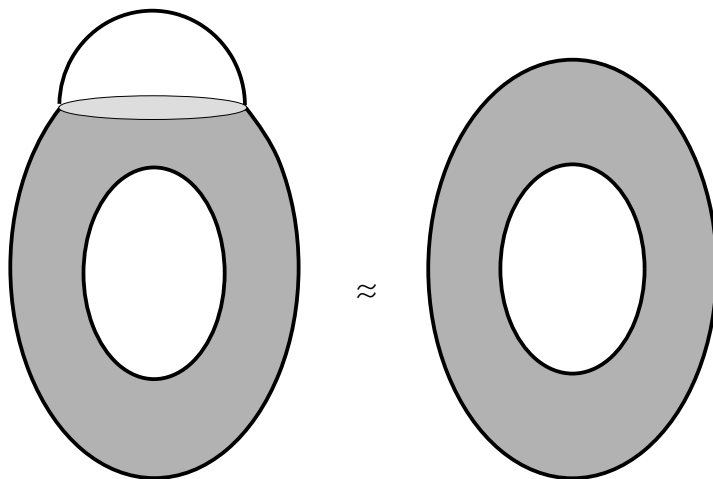


Abbildung 22.7: $f(s) < a$

M^a ist homöomorph zu einem vollen Torus, hat am Punkt s ein Maximum mit Morseindex $\lambda = 2$ und ist homotop zu einem abgeschnittenen Torus (wie oben) plus angehängter 2-Zelle $\simeq D^2$, d.h. zu einer Kreisscheibe.

Dieses Beispiel zeigt, daß M^{a_+} mit einem a_+ oberhalb eines kritischen Wertes a der Morse-Funktion f homotop zu einem M^{a_-} mit einem a_- unterhalb des kritischen Wertes a von f ist plus einer λ -Zelle, also $M^{a_-} \cup e^\lambda$.

Im folgenden soll dieses Ergebnis für beliebige reelle, endlich-dimensionale, differenzierbare, kompakte Mannigfaltigkeiten auf den Spuren von Milnor (1963) verallgemeinert werden.

Während die obigen Beispiele am Torus $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ ja sofort einleuchten besteht aber, wie in der Topologie üblich, die Herausforderung darin, das scheinbar offensichtliche auch im Detail sauber zu beweisen. Der Beweis von Milnor ist zweigeteilt:

[Milnor-1]. Zunächst wird mithilfe der Gradientenfunktion gezeigt, daß die Mengen M^a und M^b mit $a < b$ diffeomorph und homotop sind, wenn der Zwischenraum $f^{-1}[a, b]$ kompakt ist und keinen kritischen Punkt enthält.

[Milnor-2]. Anschließend wird gezeigt, daß wenn $f^{-1}[a, b]$ kompakt ist und einen kritischen Punkt mit dem Index λ enthält, dann $M^a \cup e^\lambda$ und M^b homotop sind.

Der Teil Milnor-1 bedient sich als Hilfsmittel der sog. 1-Parametergruppen und der Gradientenfunktion. Beides soll zunächst erläutert werden. Wir erinnern an die Definition des Gradienten (siehe 14.5.1 ff.):

Definition 22.3.7 Seien $q \in M$, $V(q)$ ein Vektorfeld und $df(q)$ eine 1-Form auf M , d.h.

$$V(q) \in T_q M := \left\{ W^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i} \mid W^i(q) \in \mathbb{R}, i = 1 \dots m \right\}, \quad (22.3.6)$$

$$df(q) \in T_q^* M := \left\{ w^i(q) dx^i \mid w^i(q) \in \mathbb{R}, i = 1 \dots m \right\}, \quad (22.3.7)$$

dann ist der Gradient ∇f als die kontravariante Form des kovarianten Differentials df definiert, d.h.

$$\langle \nabla f | V \rangle_q := df(V)|_q \quad \Rightarrow \quad (22.3.8)$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \begin{cases} \partial_i f dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \partial_j f \\ \langle (\nabla f)^k \frac{\partial}{\partial x^k} \mid \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = (\nabla f)^k g_{kj} \end{cases} \quad \text{mit einer Metrik } g_{jk},$$

$$(\nabla f)^i = g^{ij} g_{jk} (\nabla f)^k = g^{ij} \partial_j f =: \partial^i f. \quad (22.3.9)$$

Definition 22.3.8 Ein Fluß $\sigma_t(q) := \sigma(t, q)$ ist bezüglich des Parameters $t \in \mathbb{R}$ eine 1-dimensionale kommutative Gruppe von Diffeomorphismen auf M für welche gilt:

$$\sigma(t_2, \sigma(t_1, q)) = \sigma(t_2 + t_1, q). \quad (22.3.10)$$

Ein solcher Fluß auf M erzeugt ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$X_q(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sigma_h(q)) - f(\sigma_0(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sigma_h(q)) - f(q)}{h}. \quad (22.3.11)$$

Damit stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt, ob und wenn ja, unter welchen Bedingungen also ein Vektorfeld X_q einen eindeutigen Fluß $\sigma_t(q)$ erzeugt. Siehe auch die analoge Diskussion

Lemma 22.3.9 Ein glattes Vektorfeld $X_q \in T_q M$, das außerhalb einer kompakten Menge $K \subset M$ verschwindet, erzeugt eine eindeutigen Fluß $\sigma_t(q)$.

Beweis: Seien gegeben $q_0 \in M$ und $X_{q_0} \in T_{q_0} M$, dann gilt für $\sigma(t, q_0)$ die folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \sigma(t, q_0) = X|_{\sigma(t, q_0)} \quad \text{mit} \quad \sigma(0, q_0) = q_0.$$

Eine Lösung $\sigma(t, q_0)$ dieser Differentialgleichung existiert und ist eindeutig für die Anfangswerte q_0 und $\sigma(0, q_0) = q_0$ in einer geeigneten ϵ -Umgebung von q_0 (Satz von Picard-Lindelöf, siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238) und heißt der von X erzeugte Fluß durch q_0 .

Tatsächlich erfüllt diese Lösung auch die charakteristische Eigenschaft einer 1-Parameter Gruppe:

$$\sigma(t_2, \sigma(t_1, q_0)) = \sigma(t_2 + t_1, q_0)$$

denn für die linke Seite erhalten wir das DGL-Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt_2} \sigma(t_2, \sigma(t_1, q_0)) = X|_{\sigma(t_2, \sigma(t_1, q_0))}, \quad \sigma(0, \sigma(t_1, q_0)) = \sigma(t_1, q_0),$$

und für die rechte Seite

$$\frac{d}{dt_2} \sigma(t_2 + t_1, q_0) = \frac{d}{d(t_2 + t_1)} \sigma(t_2 + t_1, q_0) = X|_{\sigma(t_2 + t_1, q_0)},$$

$$\sigma(0 + t_1, q_0) = \sigma(t_1, q_0).$$

Damit erfüllen die Funktionen auf der linken und auf der rechten Seite die gleiche DGL mit den gleichen Anfangswerten und sind also identisch (wieder wie oben aufgrund des Satzes von Picard-Lindelöf).

Jetzt bleibt noch die Frage zu klären, wie weit wir diese Lösung $\sigma(t, q_0)$ über die ϵ -Umgebung hinaus ausdehnen können. Da die Menge $K \subset M$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung von K mit ϵ -Umgebungen. Sei ϵ_0 die kleinste dieser ϵ -Zahlen. Für alle $q \notin K$ setzen wir $\sigma_t(q) = q$ und für $q \in K$ und $t < \epsilon_0$ liefert uns die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $\sigma_t(q)$. Da das Vektorfeld X_q glatt ist folgt, daß $\sigma_t(q)$ in $t < \epsilon_0$ ein Diffeomorphismus ist. Für $t \geq 0$ kann man t und $\sigma_t(q)$ schreiben als

$$t = k \frac{\epsilon_0}{2} + r \quad \text{mit } |r| < \frac{\epsilon_0}{2},$$

$$\sigma_t(q) = \sigma_{\epsilon_0/2}(q) \circ \sigma_{\epsilon_0/2}(q) \circ \dots \circ \sigma_{\epsilon_0/2}(q) \circ \sigma_r(q). \quad \square$$

Damit ist $\sigma_t(q)$ auf ganz M eindeutig und glatt definiert.

Um zu zeigen, daß M^a und M^b mit $M^a \subset M^b$ homotop sind konstruiert man einen *Deformationsretrakt* von M^b auf M^a , d.h. eine stetige Abbildung der Zusammenziehung von M^b auf M^a .

Definition 22.3.11 Seien M^a und M^b topologische Räume mit $M^a \subset M^b$, dann definiert man einen *Deformationsretrakt* als eine Homotopie $H : M^b \times [0, 1] \rightarrow M^a$:

$$H(q_b, 0) = q_b, \quad H(q_b, 1) \in M^a \quad \text{für alle } q_b \in M^b,$$

$$H(q_a, s) = q_a, \quad \text{für alle } q_a \in M^a \subset M^b \text{ und alle } s \in [0, 1].$$

Nach diesen Definitionen kann man jetzt den Beweis von Milnor-1 vorführen.

Satz 22.3.12 (Milnor-1) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, d.h. eine reellwertige C^∞ -Funktion, deren sämtliche kritischen Punkte nichtentartet sind, seien weiter $a < b$ reguläre Werte von f , so daß die Urbildmenge

$$f^{-1}([a, b]) = \{q \in M \mid a \leq f(q) \leq b\}$$

kompakt und ohne kritische Punkte von f ist. Dann ist M^a diffeomorph und homotop zu M^b .

Beweis: Seien $q \in M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, $f^{-1}([a, b])$ kompakt und ohne nichtentartete kritische Punkte. Aus dem Korollar zum Morse-Lemma folgte ja, daß nichtentartete kritische Punkte isolierte Punkte sind, d.h. daß es um sie herum eine ϵ -Umgebung ohne weitere nichtentartete kritische Punkte gibt. Also kann man ein ϵ finden, so daß $f^{-1}((a - \epsilon, b + \epsilon))$ keine nichtentarteten kritischen Punkte enthält. Nun konstruiert man mittels des Gradienten von f ein normiertes Vektorfeld:

$$X_q := \begin{cases} \frac{1}{\|\nabla f(q)\|} \nabla f(q) & \text{für } q \in f^{-1}((a - \epsilon, b + \epsilon)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22.3.12)$$

Für jedes $q \in M$ bildet der von X_q erzeugte Fluß $\sigma_t(q) = \sigma(t, q)$ mit $\frac{d}{dt}\sigma_t(q) = X_{\sigma_t(q)}$ und $\sigma_0(q) = q$ eine glatte Kurve in M - siehe 22.3.9.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\sigma_t(q)) &= \langle \nabla f(\sigma_t(q)) \mid \frac{d}{dt}\sigma_t(q) \rangle = \langle \nabla f(\sigma_t(q)) \mid X_{\sigma_t(q)} \rangle \\ &= \begin{cases} \langle \nabla f(\sigma_t(q)) \mid \frac{1}{\|\nabla f(\sigma_t(q))\|} \nabla f(\sigma_t(q)) \rangle = 1 & \text{für } q \in f^{-1}((a - \epsilon, b + \epsilon)), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (22.3.13)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung können wir jetzt sofort integrieren und erhalten mit Hilfe der Anfangsbedingung

$$f(\sigma_t(q)) = \begin{cases} t + f(\sigma_0(q)) = t + f(q) & \text{für } q \in f^{-1}((a - \epsilon, b + \epsilon)), \\ f(\sigma_0(q)) = f(q) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22.3.14)$$

Wegen $\frac{d}{dt}f(\sigma_t(q)) \geq 0$ folgt sofort, daß $f(\sigma_t(q))$ monoton wachsend auf M ist und streng monoton wachsend auf $M^b \setminus M^a$ ist.

Von $\sigma_{b-a} : M \rightarrow M$ wissen wir, daß dies ein Diffeomorphismus ist. Jetzt stellt sich die Frage, ob auch die Einschränkung $\sigma_{b-a}|_{M^a} : M^a \rightarrow M^b$ ein Diffeomorphismus ist. Zunächst einmal bildet σ_{b-a} jedes $q \in M^a$ tatsächlich auf ein $\sigma_{b-a}(q) \in M^b$ ab, denn da $f(\sigma_t(q))$ monoton wachsend ist folgt:

$$f(\sigma_0(q)) = f(q) \leq f(\sigma_{b-a}(q)).$$

Wenn $f(\sigma_{b-a}(q)) \leq b$ ist dann folgt $\sigma_{b-a}(q) \in M^b$, wenn aber $f(\sigma_{b-a}(q)) > b$ ist dann ergibt sich mit 22.3.14 der Widerspruch $b - a + f(q) > b$, d.h. $f(q) > a$. Also ist

tatsächlich $\sigma_{b-a}|_{M^a} : M^a \rightarrow M^b$. Weil $\sigma_t : M \rightarrow M$ für alle t ein Diffeomorphismus ist folgt die Injektivität von $\sigma_{b-a}|_{M^a}$. Es bleibt also nur noch die Surjektivität von $\sigma_{b-a}|_{M^a}$ zu zeigen. Sei also $q_b \in M^b$, dann konstruieren wir das folgende $q_a = \sigma_{a-b}(q_b)$. Liegt dieses q_a jetzt in M^a ? Zunächst einmal folgt

$$f(q_a) = f(\sigma_{a-b}(\sigma_{b-a}(q_a))) = f(\sigma_{a-b}(q_b)) \leq b .$$

Die Möglichkeit $f(\sigma_{a-b}(q_b)) > a$ führt sofort zu einem Widerspruch, denn einerseits gilt dann

$$a < f(\sigma_{a-b}(q_b)) < f(\sigma_0(q_b)) = f(q_b) \leq b ,$$

und andererseits folgt mit 22.3.14

$$f(\sigma_{a-b}(q_b)) = a - b + f(q_b) \leq a - b + b = a .$$

Im zweiten Schritt soll jetzt die Homotopie von M^a und M^b gezeigt werden, indem man einen Deformationsretrakt von M^b auf M^a konstruiert, d.h. eine stetige Abbildung der Zusammenziehung von M^b auf M^a . Als stetige Abbildung wählt man

$$r_t(q) := \begin{cases} q & \text{für } q \in M^a , \\ \sigma_{(a-f(q))t}(q) & \text{für } a \leq f(q) \leq b , t \in [0, 1] . \end{cases}$$

Wenn $q \in M^a$ ist, dann folgt $r_t(q) = q \in M^a$. Wenn $a \leq f(q) \leq b$ ist, dann folgt wegen der Monotonie von $f(\sigma_t(q))$

$$f(\sigma_{(a-f(q))t}(q)) \leq f(\sigma_0(q)) = f(q) \leq b \quad \Rightarrow \quad r_t(q) \in M^b .$$

Für $r_t(q)$ folgen nun die gewünschten Eigenschaften: $r_t(q)$ ist stetig auf $M^b \times [0, 1]$, und mit 22.3.14 ergibt sich

$$r_0(q) = q \quad \text{für alle } q \in M^b ,$$

$$f(r_1(q)) \leq a \quad \Rightarrow \quad r_1(q) \in M^a ,$$

$$a \leq f(r_1(q)) \leq b \quad \Rightarrow \quad f(\sigma_{a-f(q)}(q)) = a - f(q) + f(q) = a \quad \Rightarrow \quad r_1(q) \in M^a . \quad \square$$

Damit ist M^a ein Deformationsretrakt von M^b , d.h. M^b ist homotop zu M^a .

Der Beweis von [Milnor-2] ist etwas anspruchsvoller und soll anhand des folgenden Bildes erläutert werden.

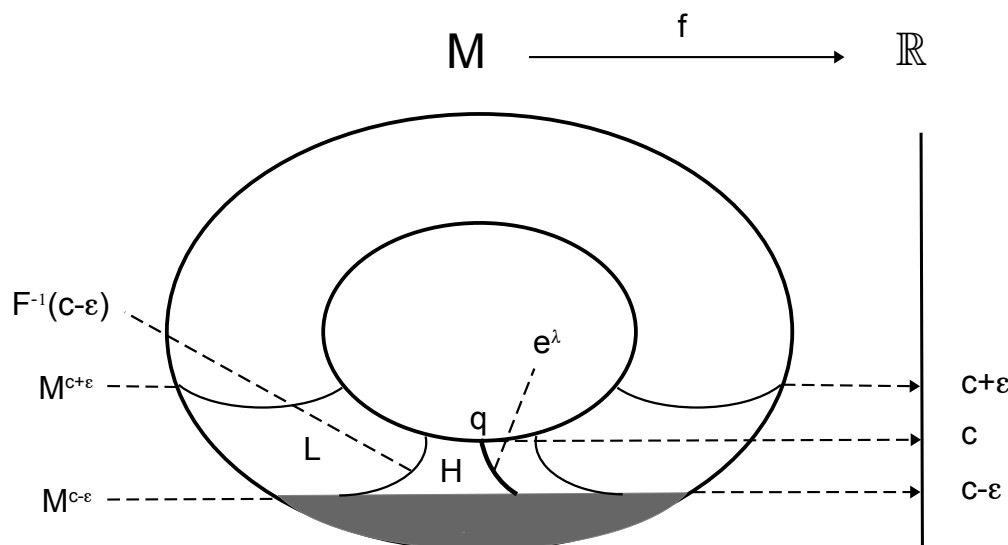


Abbildung 22.8: $M^{c+\epsilon} \sim M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$

Die Beweisidee von Milnor ist die folgende. Seien $q_0 \in M$ ein nichtentarteter kritischer Punkt mit $c = f(q_0)$, $U_{q_0} \subset M$ eine Umgebung um q_0 , in welcher ein lokales Koordinatensystem $X : U_{q_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $X(q_0) = (x^1(q_0), \dots, x^n(q_0)) = 0$ und einer Entwicklung gemäß dem 22.3.2 gilt:

$$f(X) = c - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2 =: c - X_- + X_+ . \quad (22.3.15)$$

In $X(U_{q_0})$ konstruiert man jetzt mit einem hinreichend kleinen ϵ eine abgeschlossene n -dimensionale Kugel um $X(q_0) = 0$ mit einem Radius $\sqrt{2\epsilon}$, d.h. $D_{\sqrt{2\epsilon}}^n$:

$$D_{\sqrt{2\epsilon}}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = X_- + X_+ \leq 2\epsilon\} . \quad (22.3.16)$$

Die Menge $X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n) \subset U_{q_0}$ ist kompakt und enthält außer q_0 keinen nichtentarteten kritischen Punkt von f . Ebenso ist die Menge $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ kompakt und enthält außer q_0 keinen nichtentarteten kritischen Punkt von f (wegen 22.3.4-1).

Im obigen Bild eines Torus T^2 ist $M^{c-\epsilon} = f^{-1}((-\infty, c - \epsilon])$ der dunkle Bereich. Jetzt führt man eine neue Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein, die überall mit der Höhenfunktion f übereinstimmt, mit Ausnahme einer kleinen Umgebung um den nichtentarteten kritischen Punkt q_0 , wo $F < f$ gelten möge. Dank dieser Konstruktion besteht $F^{-1}((-\infty, c - \epsilon])$ aus $M^{c-\epsilon} \cup H$, wobei der Buchstabe H für das englischen Wort 'handle', oder das deutsche Wort 'Henkel' steht. Die dicke Linie in H ist λ -Zelle e^λ . Jetzt sind zunächst einmal $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ und $M^{c-\epsilon} \cup H$ homotop. Der Bereich L ist gerade $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ und damit zeigt man im letzten Schritt, daß $M^{c-\epsilon} \cup H$ ein Deformationsretrakt von $M^{c+\epsilon}$ ist.

Um die gewünschte Funktion F zu konstruieren führt man irgendeine geeignete glatte Übergangsfunktion ein, wie dies in der Analysis öfter bei der Glättung einer Stufenfunktion auftaucht.

Lemma 22.3.14 (1) Die von Milnor (1963), S. 16, geforderten Eigenschaften einer glatten Übergangsfunktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind:

$$\begin{aligned} \rho(t) &\geq 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ \rho(0) &> \epsilon, \\ \rho(t) &= 0 \quad \text{für } t \geq 2\epsilon, \\ -1 &< \rho'(t) \leq 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{22.3.17}$$

Die folgende Funktion $\rho(t)$ hat die obigen Eigenschaften:

$$\rho(t) := \begin{cases} 1.1\epsilon & t \leq 0, \\ \frac{1.1\epsilon}{2} [\cos(\frac{\pi}{2\epsilon}t) + 1] & 0 < t < 2\epsilon, \\ 0 & t \geq 2\epsilon. \end{cases} \tag{22.3.18}$$

Beweis: Die Stetigkeit und die ersten drei Eigenschaften von $\rho(t)$ folgen direkt aus der Definition. Für die Ableitung $\rho'(t)$ gilt:

$$\rho'(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{1.1\epsilon}{2} (-\frac{\pi}{2\epsilon}) [\sin(\frac{\pi}{2\epsilon}t)] > -\frac{1.1\pi}{4} > -1 & 0 < t < 2\epsilon, \\ 0 & t \geq 2\epsilon. \end{cases}$$

□

Mit dieser Übergangsfunktion $\rho(t)$ wird jetzt die gewünschte Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert.

$$F(q) := \begin{cases} f(q) & \text{für } q \notin X^{-1}(B_{\sqrt{2\epsilon}}^n), \\ f(q) - \rho((x^1)^2 + \dots + (x^\lambda)^2 + 2(x^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(x^n)^2) & \text{für } q \in X^{-1}(B_{\sqrt{2\epsilon}}^n), \\ = f(q) - \rho(X_- + 2X_+) & . \end{cases} \tag{22.3.19}$$

Das heißt, $F(q)$ und $f(q)$ stimmen überein, wenn $X(q)$ außerhalb der Kugel $B_{\sqrt{2\epsilon}}^n$ liegt. Da $\rho(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist folgt sofort $F(q) \leq f(q)$ für alle $q \in M$.

Lemma 22.3.16 (2) Aufgrund der Definition von $\rho(q)$ ist klar, daß $F(q)$ innerhalb und außerhalb von $X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$ glatt ist. Jetzt soll gezeigt werden, daß $F(q)$ auch auf dem Rand $\partial X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$ glatt ist.

Beweis: Sei $q_r \in \partial X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$, d.h. ein Randpunkt von $X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$. Damit gilt für q_r die Beziehung

$$X_-(q_r) + X_+(q_r) = \sum_{i=1}^n (x^i(q_r))^2 = 2\epsilon. \tag{22.3.20}$$

Da die Mannigfaltigkeit M kompakt ist gibt es zwei Folgen $\{q_{k_1} \in X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)\}$ und $\{q_{k_2} \notin X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)\}$, die von innerhalb, bzw. von außerhalb von $X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$ gegen q_r konvergieren. Stetigkeit von F liegt dann vor, wenn gilt:

$$\lim_{q_{k_1} \rightarrow q_r} F(q_{k_1}) = \lim_{q_{k_2} \rightarrow q_r} F(q_{k_2}) = F(q_r).$$

Es ergibt sich für den Grenzwert beider Folgen:

$$F(q_{k_1}) = f(q_{k_1}) - \rho(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})),$$

$$\lim_{q_{k_1} \rightarrow q_r} F(q_{k_1}) = F(q_r) = f(q_r) - \rho(X_-(q_r) + 2X_+(q_r)) = f(q_r) - \rho(2\epsilon + X_+(q_r)) = f(q_r).$$

$$F(q_{k_2}) = f(q_{k_2}),$$

$$\lim_{q_{k_2} \rightarrow q_r} F(q_{k_2}) = F(q_r) = f(q_r).$$

Nun zu der 1. Ableitung von F , wobei wir $f = c - X_- + X_+$ berücksichtigen:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(q_{k_1}) = \begin{cases} -2x^i(q_{k_1}) - 2x^i(q_{k_1})\rho'(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})) & i \leq \lambda, \\ +2x^i(q_{k_1}) - 4x^i(q_{k_1})\rho'(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})) & i > \lambda. \end{cases}$$

Im Grenzwert $q_{k_1} \rightarrow q_r$ ergibt sich mit Hilfe von $\rho'(X_-(q_r) + 2X_+(q_r)) = \rho'(2\epsilon + X_+(q_r)) = 0$:

$$\lim_{q_{k_1} \rightarrow q_r} \frac{\partial F}{\partial x^i}(q_{k_1}) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(q_r) = \begin{cases} -2x^i(q_r) & i \leq \lambda, \\ +2x^i(q_r) & i > \lambda. \end{cases}$$

Ebenso ergibt sich für die Folge der q_{k_2} :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(q_{k_2}) = \begin{cases} -2x^i(q_{k_2}) & i \leq \lambda, \\ +2x^i(q_{k_2}) & i > \lambda. \end{cases}$$

Und im Grenzwert $q_{k_2} \rightarrow q_r$ ergibt sich damit sofort:

$$\lim_{q_{k_2} \rightarrow q_r} \frac{\partial F}{\partial x^i}(q_{k_2}) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(q_r) = \begin{cases} -2x^i(q_r) & i \leq \lambda, \\ +2x^i(q_r) & i > \lambda. \end{cases}$$

Nun zur 2. Ableitung von F :

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_{k_1}) = \begin{cases} -2 - 2\rho'(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})) - 4(x^i(q_{k_1}))^2\rho''(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})), & \text{für } i \leq \lambda, \\ +2 - 4\rho'(X_-(q_{k_1}) + 2X_+(q_{k_1})) - 16(x^i(q_{k_1}))\rho''(X_-(q_{k_1}) + X_+(q_{k_1})) & \text{für } i > \lambda. \end{cases}$$

Mit $\rho'(2\epsilon + X_+(q_r)) = 0$ und $\rho''(2\epsilon + X_+(q_r)) = 0$ folgt:

$$\lim_{q_{k_1} \rightarrow q_r} \frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_{k_1}) = \frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_r) = \begin{cases} -2 & i \leq \lambda, \\ 2 & i > \lambda. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_{k_2}) = \begin{cases} -2 & i \leq \lambda, \\ 2 & i > \lambda. \end{cases}$$

$$\lim_{q_{k_2} \rightarrow q_r} \frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_{k_2}) = \frac{\partial^2 F}{(\partial x^i)^2}(q_r) = \begin{cases} -2 & i \leq \lambda, \\ 2 & i > \lambda. \end{cases}$$

Völlig analog verschwinden die höheren Ableitungen von beiden Seiten des Rands bei $q_r \in X^{-1}(\partial B_{\sqrt{2\epsilon}})$:

$$\lim_{q_{k_1} \rightarrow q_r} \frac{\partial^n F}{(\partial x^i)^n}(q_{k_1}) = \frac{\partial^n F}{(\partial x^i)^n}(q_r) = 0,$$

$$\lim_{q_{k_2} \rightarrow q_r} \frac{\partial^n F}{(\partial x^i)^n}(q_{k_2}) = \frac{\partial^n F}{(\partial x^i)^n}(q_r) = 0 \quad \text{für } n \geq 3. \quad \square$$

Also ist $F(q)$ auf M glatt.

In den nächsten beiden Lemmas soll diese Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ nun genauer untersucht werden.

Lemma 22.3.18 (3)

$$f^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) = M^{c+\epsilon} = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]). \quad (22.3.21)$$

Beweis: Die erste Gleichung ist einfach die Definition von $M^{c+\epsilon}$.

Wenn $q \notin X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n) \subset U_{q_0}$, dann ist $F(q) = f(q)$ und wir sind fertig.

Wenn $q \in M^{c+\epsilon}$, bzw. $q \in X^{-1}(D_{\sqrt{2\epsilon}}^n)$ liegt, dann folgt:

$$\begin{aligned} q \in M^{c+\epsilon} &\Rightarrow F(q) \leq f(q) \leq c + \epsilon \Rightarrow q \in F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \\ &\Rightarrow M^{c+\epsilon} \subseteq F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]). \end{aligned}$$

$$q \in F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \Rightarrow F(q) = f(q) - \rho(X_-(q) + 2X_+(q)) \leq c + \epsilon \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X_-(q) + 2X_+(q) \leq 2\epsilon & \Rightarrow f(q) = c - X_-(q) + X_+(q) \\ & \leq c + \frac{1}{2}X_-(q) + X_+(q) \leq c + \epsilon, \\ X_-(q) + 2X_+(q) > 2\epsilon & \Rightarrow \rho(X_-(q) + 2X_+(q)) = 0 \\ & \Rightarrow f(q) = F(q) \leq c + \epsilon, \end{cases}$$

und damit in beiden Fällen

$$q \in F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \Rightarrow q \in M^{c+\epsilon} \Rightarrow F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \subseteq M^{c+\epsilon}. \quad \square$$

Insgesamt folgt also die Behauptung $M^{c+\epsilon} = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$.

Lemma 22.3.20 (4) *In der Umgebung U_{q_0} stimmen die Funktionen f und F in dem nichtentarteten kritischen Punkt $q_0 \in U_{q_0} \subset M$ mit $f(q_0) = F(q_0) = c$ überein.*

Im Bereich $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$, das ist gerade der Bereich L in der obigen Skizze, gibt es für die Funktion F keinen nichtentarteten kritischen Punkt.

Der Bereich $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon])$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c+\epsilon} = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$.

Beweis:

$$\frac{\partial F}{\partial X_-} = -1 - \rho'(X_- + 2X_+) < 0, \quad (22.3.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X_+} = 1 - 2\rho'(X_- + 2X_+) \geq 1, \quad (22.3.23)$$

und damit ist

$$dF = \frac{\partial F}{\partial X_-} dX_- + \frac{\partial F}{\partial X_+} dX_+ \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow dX_- = dX_+ = 0.$$

d.h. der nichtentartete kritische Punkt von F in U ist $q_0 \in U \subset M$.

Jetzt soll $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ untersucht werden. Wegen dem obigen Lemma-3: $f^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$ in Verbindung mit $F \leq f$ folgt

$$F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \subset f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]).$$

Diese Region ist kompakt und kann als nichtentarteten kritischen Punkt höchstens $q_0 \in U \subset M$ enthalten. Aber wegen der Definition von $\rho(t)$, siehe 22.3.17, ist $\rho(0) > \epsilon$, und damit folgt

$$F(q_0) = c - \rho(0) < c - \epsilon \Rightarrow q_0 \notin F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]). \quad \square$$

Also enthält $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ keinen nichtentarteten kritischen Punkt.

Da $F^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ kompakt ist und keinen nichtentarteten kritischen Punkt enthält kann der Satz Milnor-1, siehe 22.3.12, angewandt werden und liefert die Aussage, daß $F^{-1}((-\infty, c - \epsilon])$ diffeomorph und homotop zu $F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$ ist, d.h. daß $F^{-1}((-\infty, c - \epsilon])$ ein Deformationsretrakt von $M^{c+\epsilon} = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon])$ ist.

Wenn man sich einen geometrischen Überblick über die Situation um q herum verschaffen will, dann kann man sich einmal einige der relevanten Funktionen in der Umgebung von q anschauen. Wir projizieren die Funktionen in die (x^1, x^n) -Ebene

$$1. f = c \Rightarrow -(x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2 \Rightarrow x^n = \pm x^1.$$

$$2. f = c - \epsilon \Rightarrow x^n = \pm \sqrt{(x^1)^2 - \epsilon} .$$

$$3. f = c + \epsilon \Rightarrow x^n = \pm \sqrt{(x^1)^2 + \epsilon} .$$

$$4. F = c - \epsilon \Rightarrow x^n = \pm \sqrt{(x^1)^2 + \rho((x^1)^2 + 2(x^n)^2) - \epsilon} .$$

$$5. F = f = c - \epsilon \Rightarrow (x^1)^2 + 2(x^n)^2 = 2\epsilon \Rightarrow x^n = \pm \sqrt{\epsilon - \frac{1}{2}(x^1)^2} .$$

Grafisch sieht das in etwa folgendermaßen aus. Hierbei repräsentiert der Kreis den Rand der Kugel $B_{\sqrt{2\epsilon}}^n$ und H ist der oben eingeführte 'handle' oder 'Henkel'-Bereich, d.h.

$$H := F^{-1}((\infty, c - \epsilon]) \setminus M^{c-\epsilon} \Leftrightarrow F^{-1}((\infty, c - \epsilon]) := M^{c-\epsilon} \cup H . \quad (22.3.24)$$

. Die dicke Linie in H soll die folgende λ -Zelle darstellen:

$$e^\lambda := \{q \in U_{q_0} \mid X_-(q) \leq \epsilon \text{ und } X_+(q) = 0\} . \quad (22.3.25)$$

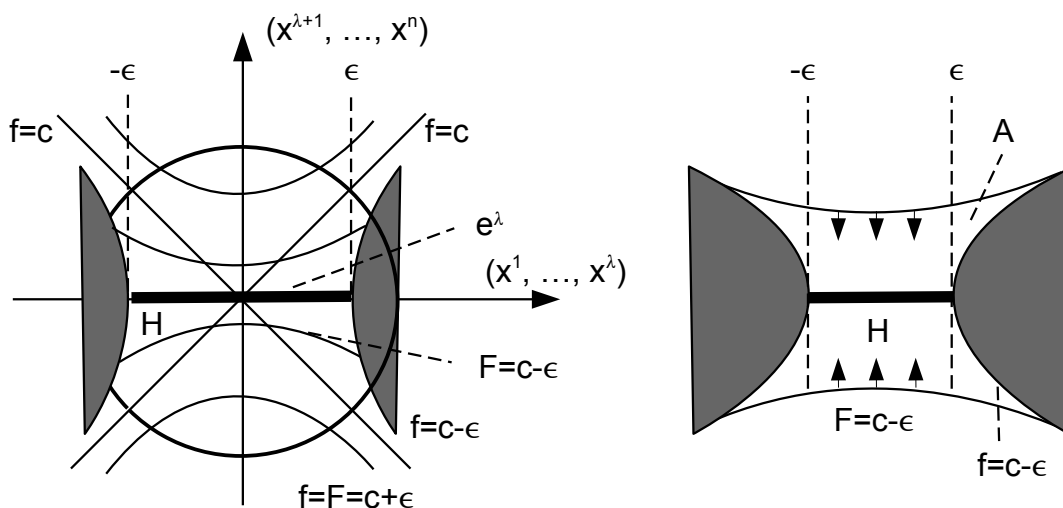


Abbildung 22.9: die Region H in der (x^1, x^n) -Ebene

Lemma 22.3.22 (5) $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ ist ein Deformationsretrakt von $M^{c-\epsilon} \cup H$.

Beweis: Zunächst einmal soll gezeigt werden, daß tatsächlich $e^\lambda \subset H$ ist, d.h. das $e^\lambda \subset F^{-1}((-\infty, c - \epsilon]) \setminus M^{c-\epsilon}$. Sei also $q \in e^\lambda$, dann gilt nach Definition $X_-(q) \leq \epsilon$ und $X_+(q) = 0$. Also ist $f(q) = c - X_-(q) \geq c - \epsilon$. Also ist $q \notin M^{c-\epsilon}$. Für den anderen Teil der Behauptung definieren wir die Hilfsfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) := \rho(t) + t$. Nun gilt ja $-1 < \rho'(t) \leq 0$ und damit $g'(t) > 0$, also ist g zunehmend und es folgt $g(t) > g(0) = \rho(0)$. Und damit folgt $g(X_-(q)) = \rho(X_-(q)) + X_-(q) > g(0) = \rho(0)$. Und damit folgt

$$F(q) = c - X_-(q) - \rho(X_-(q)) = c - g(X_-(q)) < c - \rho(0) < c - \epsilon \Rightarrow$$

$$q \in F^{-1}((-\infty, c - \epsilon]) .$$

Nun zur Retraktion von H . Die Retraktion von H im Bereich $X_- \in [-\epsilon, \epsilon]$ ist trivial. Aufwendiger ist die Retraktion im Bereich A der obigen Zeichnung. Dies ist der Bereich mit $X_- \geq \epsilon$ zwischen den Kurven $F = c - \epsilon$ und $f = c - \epsilon$. Hier soll die Retraktion von A auf die Kurve $f = c - \epsilon$ erfolgen.

$$\begin{aligned} q \in A &\Rightarrow \begin{cases} X_- \geq \epsilon & \text{und} \\ f(q) \geq c - \epsilon & \Leftrightarrow c - X_- + X_+ \geq c - \epsilon & \Leftrightarrow X_+ + \epsilon \geq X_- \end{cases} \\ &\Rightarrow \epsilon \leq X_- \leq X_+ + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{X_- - \epsilon}{X_+} \leq 1 . \end{aligned}$$

Die Retraktion von X_+ soll jetzt mithilfe der Funktion $s_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ erfolgen:

$$s_t := t + (1 - t) \sqrt{\frac{X_- - \epsilon}{X_+}} .$$

Wie sieht es mit der Stetigkeit von $s_t x^i$ für $i > \lambda$ aus, insb. in der linken unteren Ecke von A , d.h. im Grenzübergang $X_+ \rightarrow +0$ und $X_- \rightarrow +\epsilon$? Für jedes einzelne x^i gilt $|x^i| \leq \sqrt{X_+}$ und damit folgt

$$\begin{aligned} |s_t x^i| &= \left(t + (1 - t) \sqrt{\frac{X_- - \epsilon}{X_+}} \right) |x^i| \leq \left(t + (1 - t) \sqrt{\frac{X_- - \epsilon}{X_+}} \right) \sqrt{X_+} \\ &= t \sqrt{X_+} + (1 - t) \sqrt{X_- - \epsilon} , \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{X_+ \rightarrow +0 \\ X_- \rightarrow +\epsilon}} |s_t x^i| = \lim_{\substack{X_+ \rightarrow +0 \\ X_- \rightarrow +\epsilon}} t \sqrt{X_+} + (1 - t) \sqrt{X_- - \epsilon} = 0 .$$

Mit diesem s_t mit $t \in [0, 1]$ können wir nun die Retraktionsfunktion $r_t(x^1, \dots, x^n)$ definieren:

$$\begin{aligned} r_t(x^1, \dots, x^n) &: M^{c-\epsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\epsilon} \cup H , \\ r_t(x^1, \dots, x^n) &:= \begin{cases} (x^1, \dots, x^\lambda, t x^{\lambda+1}, \dots, t x^n) & q \in H \text{ und } X_-(q) \leq \epsilon , \\ (x^1, \dots, x^\lambda, s_t x^{\lambda+1}, \dots, s_t x^n) & q \in H \text{ und } q \in A , \\ (x^1, \dots, x^n) & q \in M^{c-\epsilon} . \end{cases} \end{aligned}$$

Zunächst sieht man sofort, daß $r_1(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n)$ ist, daß also r_1 die Einheitsabbildung ist.

Im Bereich $q \in H$ und $X_-(q) \leq \epsilon$ ist $r_0(x^1, \dots, x^\lambda, x^{\lambda+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^\lambda, 0, \dots, 0)$ und dies ist wegen 22.3.25 gerade e^λ .

Im Bereich $q \in H$ und $q \in A$ ergibt sich

$$s_0 = \sqrt{\frac{X_- - \epsilon}{X_+}} \Rightarrow$$

$$X_+(r_0(x^1, \dots, x^n)) = \sum_{i=\lambda+1}^n \left(\sqrt{\frac{X_- - \epsilon}{X_+}} x^i \right)^2 = \frac{X_- - \epsilon}{X_+} \sum_{i=\lambda+1}^n (x^i)^2 = X_- - \epsilon,$$

$$X_-(r_0(x^1, \dots, x^n)) = X_-.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f(r_0(x^1, \dots, x^n)) &= c - X_-(r_0(x^1, \dots, x^n)) + X_+(r_0(x^1, \dots, x^n)) \\ &= c - X_- + (X_- - \epsilon) = c - \epsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Es bleibt noch die Frage, wie geschieht die Retraktion mit r_t im Bereich A für Parameterwerte $0 < t < 1$? Wir verschieben mittels r_t die Kurve $F = c - \epsilon$ bzgl. ihrer X_+ -Werte in Richtung $M^{c-\epsilon}$. Dies Funktion F ist stetig in X_+ , und wegen 22.3.23 ist sie auch monoton zunehmend in X_+ , also gehören alle r_t -Wert mit $0 \leq t \leq 1$ zu $M^{c-\epsilon} \cup H$. Damit haben wir wie gewünscht die Retraktion des Bereichs A auf $M^{c-\epsilon}$ durchgeführt.

Insgesamt ist also $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ ein Deformationsretrakt von $M^{c-\epsilon} \cup H$.

Satz 22.3.24 (Milnor-2) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion mit einem nichtentarteten kritischen Punkt $q_0 \in M$ mit dem Index λ und $f(q_0) = c$. Sei weiter $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ kompakt und enthalte keine weiteren kritischen Punkt von f in einer geeigneten kleinen ϵ -Umgebung. Dann sind die Mengen $M^{c+\epsilon}$ und $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ homotop äquivalent.

Beweis: Aus 22.3.20, 22.3.24 und 22.3.22 folgt

$$M^{c+\epsilon} = f^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) = F^{-1}((-\infty, c + \epsilon]) \simeq F^{-1}((-\infty, c - \epsilon]),$$

$$F^{-1}((\infty, c - \epsilon]) = M^{c-\epsilon} \cup H,$$

$$M^{c+\epsilon} \cup H \simeq M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda. \quad \square$$

Damit ergibt sich insgesamt die Behauptung, daß $M^{c+\epsilon}$ und $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ homotop äquivalent sind.

22.4 Morse Theorie - Homologie und Morse Ungleichungen

In der Herleitung der Morse-Ungleichungen stützen wir uns auf das starke topologische Hilfsmittel der relativen singulären Homologiegruppen, siehe insb. unsere Abschnitte 21.3 und 21.4 in den Homologie-Kapiteln 20 und 21. Wir wiederholen kurz die wesentlichen Begriffe und Definitionen der simplizialen und der singulären Homologie.

Die Ausgangsfrage von Poincaré war es, wie kann man r -dimensionale *Löcher* in einer Mannigfaltigkeit charakterisieren? Dies führte ihn zu einer ersten Formulierung der simplizialen Homologie.

Ein Simplex Δ_r ist eine r -dimensionale konvexe Verallgemeinerung eines Dreiecks in \mathbb{R}^m . Ein simplizialer Komplex K ist eine endliche Anzahl I_r von Simplexen Δ_r , so daß jede Seite eines Simplexes von K zu K gehört und der Durchschnitt zweier Simplexe von K entweder leer oder eine gemeinsame Seite ist. Emmy Noether hat nun solche simplizialen Komplexe mit freien abelschen Gruppen G in Verbindung gebracht, indem sie r -Ketten $C_r(K)$, r -Zyklen $Z_r(K)$ und mit Hilfe eines Randoperators ∂_r auch r -Randketten $B_r(K)$ definiert hat. Damit kann man r -dimensionale *Löcher* als r -Zyklen die keine r -Randketten sind identifizieren. Der Randoperator ∂_r erweist sich als idempotent, d.h. $\partial_r \partial_{r+1} \Delta_{r+1} = 0$. Ein r -Zyklus $Z_r(K)$ wird als eine r -Kette $C_r(K)$ ohne Rand definiert, d.h. $Z_r(K) = \ker \partial_r$, und eine r -Randkette ist ein Bild des Randoperator ∂_{r+1} , d.h. $B_r = \text{Im } \partial_{r+1}$. Wegen der Idempotenz des Randoperators $\partial_r \partial_{r+1} \Delta_{r+1} = 0$ folgt $B_r(K) \subseteq Z_r(K)$ und damit werden die Homologiegruppen $H_r(K)$ und Bettizahlen $b_r(K)$ definiert als

$$H_r(K) := \begin{cases} Z_r(K)/B_r(K) & \text{für } r = 0, \dots, m, \\ 0 & \text{für } r < 0 \text{ oder } r > m. \end{cases} \quad (22.4.1)$$

$$b_r(K) := \dim(H_r(K)). \quad (22.4.2)$$

Die Euler-Charakteristik $\chi(K)$ eines simplizialen Komplexes mit einer Anzahl I_r von r -dimensionalen Simplexen Δ_r verschiedener Dimensionen r ist definiert als

$$\chi(K) := \sum_{r=0}^m (-1)^r I_r, \quad (22.4.3)$$

und stellt eine Verallgemeinerung der Eulerschen Polyeder-Formel dar. Da die Homologiegruppen $H_r(K)$ topologische Invarianten sind ist also auch die Euler-Charakteristik ein topologische Invariante. Poincaré hat für diese Euler-Charakteristik den heute so genannten Euler-Poincaré-Satz bewiesen:

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^m (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(K). \quad (22.4.4)$$

Manchmal erhält man in der Mathematik einfachere Strukturen indem man auf gewisse Informationen verzichtet. So ist es auch in der algebraischen Topologie immer wieder hilfreich einen topologischen Raum modulo eines Teilraums zu untersuchen. Im Fall der Homologiegruppen gelangt man zu den relativen Homologiegruppen.

Seien $A \subset X$ nichtleere, abgeschlossene topologische Räume, dann definiert man die relative r -Kettengruppe als die r -Kettengruppe von X modulo der r -Kettengruppe von A , also $C_r(X, A) := C_r(X)/C_r(A)$. Der obige Randoperator ∂_r wirkt in gleicher Weise auf Ketten aus $C_r(X)$ wie auf Ketten aus $C_r(A)$, kann also trivial auf $C_r(X, A)$ fortgesetzt werden.

Und schließlich läßt sich die simpliziale Homologie nach Noether zur singulären Homologie nach Eilenberg verallgemeinern, indem man von von Simplexen zu sog. singulären Simplexen übergeht. Ein singulärer Simplex ist eine stetige Abbildung $s_r : \overline{\Delta}_r \rightarrow X$, also eine Abbildung eines abgeschlossenen Simplex $\overline{\Delta}_r$ in den topologischen Raum X .

Uns interessiert hier die Änderung der Homologie in der Umgebung eines nichtentarteten kritischen Punkts $q_0 \in U_{q_0} \subset M$, d.h. die Änderung der Homologie beim Übergang von $U_{q_0} \cap M^{c-\epsilon} \simeq S_{q_0}^{\lambda-1}$ zu $U_{q_0} \cap M^{c+\epsilon} \simeq D_{q_0}^\lambda$. Die zweite Homotopiegleichung ist klar, da wir um q_0 ja gerade eine λ -Zelle $e^\lambda \simeq D_{q_0}^\lambda$ eingefügt hatten, und die erste Homotopiegleichung entsteht einfach durch $U_{q_0} \cap M^{c+\epsilon} \setminus e^\lambda \simeq S_{q_0}^{\lambda-1}$.

Wir betrachten jetzt die folgende kurze Sequenz (siehe 21.4.6):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C_r(A) \xrightarrow{i} C_r(X) \xrightarrow{j} C_r(X, A) \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \\ 0 \rightarrow C_r(A) \xrightarrow{i} C_r(X) \xrightarrow{j} C_r(X/A) \rightarrow 0 &\quad (22.4.5) \end{aligned}$$

und stellen fest, daß dies eine kurze exakte Sequenz analog zu 21.3.2 ist, denn die Inklusion $i : C_r(A) \hookrightarrow C_r(X)$ ist injektiv und die Projektion $j : C_r(X) \rightarrow C_r(X, A) = C_r(X)/C_r(A)$ ist surjektiv. Mit Hilfe des Randoperator ∂_r führt dies zur folgenden langen exakten Sequenz der entsprechenden Homologiegruppen (siehe 21.4.7):

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \\ \dots \rightarrow H_r(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_r(X) \xrightarrow{j_\bullet} H_r(X/A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{r-1}(A) \xrightarrow{i_\bullet} H_{r-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow 0. &\quad (22.4.6) \end{aligned}$$

Jetzt nutzt man die Eigenschaft der exakten Sequenz aus, und zwar zunächst für die ersten drei Glieder der Sequenz:

$$i_\bullet \text{ ist injektiv, } j_\bullet \text{ ist surjektiv, } \text{Im } i_\bullet = \ker j_\bullet \quad \Rightarrow \quad (22.4.7)$$

$$\begin{aligned} \dim H_r(X) &= \dim \text{Im } j_\bullet + \dim \ker j_\bullet = \dim \text{Im } j_\bullet + \dim \text{Im } i_\bullet \\ &\leq \dim H_r(X/A) + \dim H_r(A) = b^r(X/A) + b^r(A). \end{aligned} \quad (22.4.8)$$

Dies wenden wir jetzt auf unseren Fall eines nichtentarteten kritischen Punkts mit Index λ an. Hierbei ist $X = U_{q_0} \cap M^{c+\epsilon} \simeq D_{q_0}^\lambda$ und $A = U_{q_0} \cap M^{c-\epsilon} = U_{q_0} \cap (M^{c+\epsilon} \setminus e^\lambda) \approx S_{q_0}^{\lambda-1}$. Für X modulo A , d.h. für X/A ergibt sich damit gerade $D_{q_0}^\lambda / S_{q_0}^{\lambda-1} = D_{q_0}^\lambda / \partial D_{q_0}^\lambda = S_{q_0}^\lambda$ (siehe 21.8.1). Die Betti-Zahlen für $S_{q_0}^\lambda$ sind bekannt, denn $S_{q_0}^\lambda$ ist wegzusammenhängend, woraus $b_0(S_{q_0}^\lambda) = 1$ folgt (siehe 21.2.12), und für die anderen $b_i(S_{q_0}^\lambda)$ mit $1 \leq i \leq \lambda$ ergeben sich mit 21.8.2:

$$b_0(S_{q_0}^\lambda) = 1, b_1(S_{q_0}^\lambda) = 0, \dots, b_{\lambda-1}(S_{q_0}^\lambda) = 0, b_\lambda(S_{q_0}^\lambda) = 1. \quad (22.4.9)$$

Wenn es aber in der Mannigfaltigkeit M keinen nichtentarteten kritischen Punkt mit dem Index λ gibt, dann sind $M^{c+\epsilon} \approx M^{c-\epsilon}$ und damit $X = A$ und damit $X/A = \emptyset$, womit alle $b^r(\emptyset) = 0$ sind.

Satz 22.4.1 (Morse-Ungleichungen) *Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei $C_\lambda(f)$ die Anzahl der nichtentarteten kritischen Punkte mit dem Index λ einer Morse-Funktion f . Dann gilt:*

$$C_\lambda(f) \geq b_\lambda(M) \quad \text{schwache Morse Ungleichung,} \quad (22.4.10)$$

$$\gamma_r(M) \leq \gamma_r(N) + \gamma_r(M/N) \quad \text{mit } \gamma_r := \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} b_k, \quad (22.4.11)$$

$$\sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} C_r(f) \geq \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} b_r \quad \text{starke Morse Ungleichung,} \quad (22.4.12)$$

Im Fall von $\lambda = m$ gilt in 22.4.11 und 22.4.12 das Gleichheitszeichen und man erhält

$$\chi(M) = \chi(N) + \chi(M/N), \quad (22.4.13)$$

$$\sum_{r=0}^m (-1)^r C_r(f) = \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r = \chi(M). \quad (22.4.14)$$

Diese letzte Gleichung heißt auch *algebraische Anzahl kritischer Punkte von f* .

Beweis: Wenn es in der Mannigfaltigkeit M keinen nichtentarteten kritischen Punkt mit dem Index λ zur Morse-Funktion f gibt, dann ist $C_\lambda(f) = b_\lambda = 0$. Wenn es aber einen oder mehrere nichtentartete kritische Punkte mit dem Index λ zu zur Morse-Funktion f gibt, dann ist $C_\lambda(f) \geq b_\lambda = 1$. Dies ist die schwache Morse-Ungleichung.

Zum Beweis der starken Morse-Ungleichung wenden wir in das Kriterium der Exaktheit in 22.4.6 von $r+1$ bis $r=0$ mehrfach hintereinander an. Eine Sequenz $E \rightarrow F \rightarrow G$ heißt exakt, wenn gilt:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \quad \text{exakt} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } f = \ker g$$

$$\Leftrightarrow \dim F = \dim \operatorname{Im} g + \dim \ker g = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Im} f$$

$$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F - \dim \operatorname{Im} g .$$

Also folgt aus 22.4.6:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(\partial_{\bullet(r+1)}) &= \dim H_r(A) - \dim \operatorname{Im} i_{\bullet(r)} \\ &= b_r(A) - (\dim H_r(X) - \dim \operatorname{Im} j_{\bullet(r)}) \\ &= b_r(A) - b_r(X) + \dim H_r(X/A) - \dim \operatorname{Im}(\partial_{\bullet(r)}) \\ &= b_r(A) - b_r(X) + b_r(X/A) \\ &\quad - (b_{r-1}(A) - b_{r-1}(X) + b_r(X/A)) \\ &\quad + \dots \\ &= \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} b_k(A) - \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} b_k(X) + \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} b_k(X/A) \\ &=: \gamma_r(A) - \gamma_r(X) + \gamma_r(X/A) \quad \Rightarrow \\ \gamma_r(X) &= \gamma_r(A) + \gamma_r(X/A) - \dim \operatorname{Im}(\partial_{\bullet(r+1)}) \geq \gamma_r(A) + \gamma_r(X/A) . \end{aligned}$$

Wenn nun $r > m$, dann sind alle $H_r = \emptyset$ und $\dim H_r = 0$ und damit folgt sofort

$$\gamma_m(X) = \gamma_m(A) + \gamma_m(X/A) , \text{ bzw.}$$

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(X/A) .$$

Mit der selben Argumentation wie oben bei der schwachen Morse-Ungleichung wenden wir dies jetzt auf unseren Fall nichtentarteter kritischer Punkte mit Index λ der Morse-Funktion f an, summieren über alle diese Punkte, nutzen wieder $C_\lambda(f) \geq b_\lambda(M) = 1$ aus, und erhalten

$$\sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} C_r(f) \geq \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} b_r(M) .$$

Und wiederum für $r > m$ folgt das Gleichheitszeichen, d.h.

$$\sum_{r=0}^m (-1)^{m-r} C_r(f) = \sum_{r=0}^m (-1)^{m-r} b_r(M) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^m (-1)^r C_r(f) = \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(M) = \chi(M) . \quad \square$$

23 Der verallgemeinerte Satz von Gauß-Bonnet

23.1 Der Satz von Gauß-Bonnet für m -dimensionale Hyperflächen

In Kapitel 15.15 wurde die Gaußsche Krümmung $K_G(u)$ für m -dimensionale Hyperflächen M in \mathbb{E}^{m+1} mit geradzahligem m definiert. Hier soll nun für diesen Fall der Satz von Gauß-Bonnet bewiesen werden. Wir folgen dabei im Wesentlichen Guillemin u. Pollack (1974), S. 196 ff., die ihrerseits dem Beweis von Weil und Allendoerfer aus dem Jahr 1943 folgen.

Entscheidend ist bei diesem Beweis die Einbettung von M in \mathbb{E}^{m+1} , bzw. die Einbettung von $T_p M$ in $T_p \mathbb{E}^{m+1}$ für $p \in M$.

Die Gaußsche Normalenabbildung $\tilde{n} : M \rightarrow S^m$ mit $\tilde{n}(x) := \mathbf{n}(x)$ ordnet jedem Punkt $x \in M$ seinem jeweiligen Normalenvektor $\mathbf{n}(x)$ entsprechend einen Punkt auf der Kugeloberfläche S^m zu.

Satz 23.1.1 *Seien M eine kompakte, orientierte, m -dimensionale Hyperfläche in \mathbb{E}^{m+1} mit geradzahligem m . Seien $K_G(u)$ die Gaußsche Krümmung, vol_M , vol_{S^m} die Volumenformen von M und S^m und $\chi(M)$ die Euler Charakteristik von M , dann gilt mit dem Volumen $\text{Vol}(S^m)$ der m -dimensionalen Kugeloberfläche S^m :*

$$\text{Vol}(S^m) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^{m+1} (\frac{m}{2})!}{m!} \quad \text{für geradzahliges } m. \quad (23.1.1)$$

$$\int_M K_G \text{vol}_M = \frac{1}{2} \text{Vol}(S^m) \chi(M). \quad (23.1.2)$$

Beweis: Der Anfang des Beweises besteht einfach aus der Anwendung des Brouwerschen Abbildungsgrades auf die Definitionsgleichung der Gauß-Krümmung in m Dimensionen 15.15.3:

$$\int_M K_G \text{vol}_M = \int_M \tilde{n}^* \text{vol}_{S^m} = \text{deg}(\tilde{n}) \int_{S^m} \text{vol}_{S^m} = \text{deg}(\tilde{n}) \text{Vol}(S^m).$$

Also bleibt nur noch zu beweisen, daß der Abbildungsgrad der Gaußschen Normalenabbildung gerade gleich $\frac{1}{2}\chi(M)$ ist. Für den Beweis wird ein spezielles Vektorfeld auf

M konstruiert, dieses in \mathbb{E}^{m+1} eingebettet, und dann der Index dieses Vektorfeldes an dessen Nullstellen berechnet.

Seien $+w$ und $-w$ reguläre Werte von $\tilde{n} : M \rightarrow S^m$, dann bestehen per Definition die Urbildmengen $\{\tilde{n}^{-1}(+w)\} = \{v_1, \dots, v_k\}$ und $\{\tilde{n}^{-1}(-w)\} = \{v'_1, \dots, v'_{k'}\}$ aus regulären Punkten von \tilde{n} , d.h.

$$\det \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial x^j} \Big|_{v_i} \neq 0, \quad \det \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial x^j} \Big|_{v'_l} \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad l = 1, \dots, k; \quad l' = 1, \dots, k'.$$

Wir konstruieren jetzt das spezielles Vektorfeld $V_p : M_p \rightarrow T_p M$, dessen Wert an der Stelle $p \in M$ die Projektion von $-w \in S^m \subset \mathbb{E}^{m+1}$ auf $T_p M$ ist:

$$V_p := (-w) - (-w \cdot \mathbf{n}(p))\mathbf{n}(p) = (w \cdot \tilde{n}(p))\tilde{n}(p) - w.$$

Das Vektorfeld V_p hat Nullstellen bei $\tilde{n}(p) = \mathbf{n}(p) = \pm w$, da ja $|w| = 1$ ist. Die Urbildmenge $\{\tilde{n}^{-1}(+w), \tilde{n}^{-1}(-w)\}$ ist endlich, da $\pm w$ reguläre Werte von \tilde{n} sind und M kompakt ist (eine Folgerung des Satzes von Sard, siehe Beweis von 17.1.3, Punkt 2.).

Die Einbettung von M in \mathbb{E}^{m+1} , bzw. die Einbettung von $T_p M$ in $T_p \mathbb{E}^{m+1}$, können wir mit Hilfe lokaler Koordinaten x^j , bzw. $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x^j}$ an der Stelle $p \in M \subset \mathbb{E}^{m+1}$ schreiben als:

$$\mathbb{E}_p^{m+1} = M_p \oplus M_p^\perp,$$

$$V_p = V_p \oplus 0 \in T_p M \oplus T_p M^\perp = T_p \mathbb{E}^{m+1}.$$

Jetzt soll V_p als ein Vektorfeld in \mathbb{E}_p^{m+1} differenziert werden. Dazu verwenden wir $X_p : \mathbb{E}^{m+1} \rightarrow T_p \mathbb{E}^{m+1}$ mit

$$X_p := (\partial_1, \dots, \partial_m)_p \oplus \partial_{m+1}|_p \in T_p M \oplus T_p M^\perp = T_p \mathbb{E}^{m+1}.$$

Da lokal \mathbb{E}_p^{m+1} und $T_p \mathbb{E}^{m+1}$ als $(m+1)$ -dimensionale Vektorräume isomorph sind, kurz $\mathbb{E}_p^{m+1} \sim T_p \mathbb{E}^{m+1}$, kann man X_p auch auf Tangentialvektoren von \mathbb{E}^{m+1} anwenden, also $X_p : T_p \mathbb{E}^{m+1} \rightarrow T_p \mathbb{E}^{m+1}$. Wegen $M_p \sim T_p M$ ist $X_p[V]$ in den lokalen Koordinaten tatsächlich eine Abbildung $X_p : T_p M \rightarrow T_p M$.

Damit folgt zunächst, daß $X_p[\mathbf{n}(p)]$ senkrecht auf $\mathbf{n}(p)$ steht, denn

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{n}(p) = 1 &\quad \Rightarrow \quad X[\mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{n}(p)] = \begin{cases} 2X[\mathbf{n}(p)] \cdot \mathbf{n}(p), \\ 0. \end{cases} \\ &\quad \Rightarrow \quad X[\mathbf{n}(p)] \perp \mathbf{n}(p). \end{aligned}$$

Da w fix ist ergibt sich für $X_p[V]$

$$X_p[V] = X_p[(w \cdot \tilde{n}(p))\tilde{n}(p) - w] = X_p[(w \cdot \mathbf{n}(p))\mathbf{n}(p) - w]$$

$$= (w \cdot X_p[\mathbf{n}(p)])\mathbf{n}(p) + (w \cdot \mathbf{n}(p))X_p[\mathbf{n}(p)] ,$$

und dies ist an einer Stelle $p \in M$ mit $\tilde{n}(p) = \mathbf{n}(p) = \pm w$ gerade

$$X_p[V] = (w \cdot \mathbf{n}(p))X_p[\mathbf{n}(p)] = \pm X_p[\mathbf{n}(p)] = \pm X_p[\tilde{n}(p)] .$$

Damit können wir identifizieren

$$T_p M = \begin{cases} T_w S^m & \text{für } \tilde{n}(p) = +w , \\ T_{-w} S^m & \text{für } \tilde{n}(p) = -w . \end{cases}$$

Es folgt

$$\det(X_p[V]) = \begin{cases} + \det(X_p[\tilde{n}]) & \text{für } \tilde{n}(p) = +w , \\ (-1)^m \det(X_p[\tilde{n}]) & \text{für } \tilde{n}(p) = -w . \end{cases}$$

Da $+w$ ein regulärer Wert von \tilde{n} ist gilt $X_p[\tilde{n}] \neq 0$, also ist $X_p[V]$ in einer Umgebung von p ein Isomorphismus und damit ist mit 17.3.2

$$\text{ind}(V) = \text{sgn} \det (X_p[V]) = \text{sgn} \det (X_p[\tilde{n}]) ,$$

und wenn \tilde{n} die Orientierung erhält ist also $\text{ind}(V) = 1$.

Da $-w$ ebenso wie $+w$ ein regulärer Wert von \tilde{n} ist gilt wieder $X_p[\tilde{n}] \neq 0$, also ist $X_p[V]$ in einer Umgebung von p ein Isomorphismus und damit ist mit 17.3.2

$$\text{ind}(V, p) = \text{sgn} \det (X_p[V]) = \text{sgn} \det (X_p[\tilde{n}]) ,$$

und wenn \tilde{n} die Orientierung erhält ist also $\text{ind}(V) = (-1)^m$.

Die Abbildungsgrade $\text{deg}(\tilde{n})$ bzgl. der Stellen $+w$ und $-w$ sind dann

$$\sum_{v_l \in \{\tilde{n}^{-1}(+w)\}} \text{ind}(V, v_l) = \text{deg}(\tilde{n}) ,$$

$$\sum_{v'_l \in \{\tilde{n}^{-1}(-w)\}} \text{ind}(V, v'_l) = \begin{cases} \text{deg}(\tilde{n}) & \text{für } m \text{ gerade} , \\ -\text{deg}(\tilde{n}) & \text{für } m \text{ ungerade} . \end{cases}$$

Und daraus folgt

$$\chi(M) = \sum_{v_l, v'_l \in \{\tilde{n}^{-1}(\pm w)\}} (\text{ind}(V, v_l) + \text{ind}(V, v'_l)) = \begin{cases} 2 \text{deg}(\tilde{n}) & \text{für } m \text{ gerade} , \\ 0 & \text{für } m \text{ ungerade} . \end{cases} \quad \square$$

24 de Rham Kohomologie

Georges de Rham (1903-1990) war ein Schweizer Mathematiker und Schüler von Henri Lebesgue und Élie Cartan. In seiner im Jahr 1931 abgeschlossenen Dissertation arbeitete er über das damals noch neue Gebiet der Kohomologie und bewies den Isomorphismus der Homologiegruppen über \mathbb{R} mit den (de Rham) Kohomologie-Vektorräumen auf differenzierbaren, kompakten Mannigfaltigkeiten, eine Aussage, die heute als der Satz von de Rham bekannt ist.

Wir folgen Nakahara (2003), S. 230 ff., Bott u. Tu (1982), S. 22 ff. und der Vorlesung von Baader (2008), S. 15 ff., S. 52 ff.

Definition 24.0.1 Sei M eine m -dimensionale C^∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge der geschlossenen r -Differentialformen heißt die Kozyklengruppe $Z^r(M)$ und die Menge der exakten r -Differentialformen heißt die Korandkettengruppe $B^r(M)$, d.h.

$$Z^r(M) := \{\omega \in \Omega^r(M) \mid d\omega = 0\}, \quad (24.0.1)$$

$$B^r(M) := \{\omega \in \Omega^r(M) \mid \omega = d\omega', \omega' \in \Omega^{r-1}(M)\}. \quad (24.0.2)$$

Wegen $d_{r+1}(d_r\omega) = 0$, oder kurz $d^2 = 0$ (11.3.2) ist $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$ und wir können wie im Fall der Homologiegruppen jetzt die Kohomologiegruppen als Quotientengruppe definieren.

Definition 24.0.2 Sei M eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $Z^r(M)$ eine r -Kozyklengruppe und $B^r(M)$ eine r -Korandkettengruppe, dann heißt die Quotientengruppe

$$H^r(M) := H^r(M, \mathbb{R}) := \begin{cases} Z^r(M)/B^r(M) & \text{für } r = 0, \dots, m \\ \emptyset & \text{für } r < 0 \text{ oder } r > m. \end{cases} \quad (24.0.3)$$

die de Rham r -Kohomologiegruppe. Weil man als abelsche Gruppe $G = \mathbb{R}$ verwendet, sind die de Rham Kohomologiegruppen tatsächlich Vektorräume. Da wir im Folgenden nur de Rham Kohomologiegruppen betrachten lassen wir ab jetzt der Einfachheit halber das Attribut 'de Rham' wegfällen und sprechen nur noch von Kohomologiegruppen.

Wenn man den Kettenkomplex $C(X)$ der Homologie-Theorie mit dem de Rham Komplex $\Omega(M)$ vergleicht, dann stellt man eine große Ähnlichkeit fest:

$$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \xleftarrow{\partial_m} C_m \leftarrow 0, \quad (24.0.4)$$

$$0 \hookrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{m-2}} \Omega^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m \xrightarrow{d_m} 0, \quad (24.0.5)$$

$$H_r(X) := Z_r(X)/B_r(X) = \ker \partial_r / \text{Im } \partial_{r+1}, \text{ Homologiegruppen,} \quad (24.0.6)$$

$$H^r(M) := Z^r(M)/B^r(M) = \ker d_r / \text{Im } d_{r-1}, \text{ Kohomologiegruppen.} \quad (24.0.7)$$

Beispiel: Für die simpliziale und die singuläre Homologie hatten wir in 20.5.1 und 20.5.2 gefunden:

$$H_0(K) \simeq G, \text{ für } K \text{ einfach zusammenhängend,}$$

bzw. wenn $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ mit $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i, j = 1, \dots, n$:

$$H_0(K) \simeq \bigoplus_{i=1}^n G, \text{ für } K \text{ } n\text{-fach disjunkt zusammenhängend.}$$

Für die de Rham Kohomologie-Gruppen gilt:

$B^0(M) := \emptyset$, da es keine (-1) -Formen gibt und damit ist

$$H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in \Omega^0(M) \mid df = 0\}.$$

Wenn M wegzusammenhängend ist folgt aus $df = 0$, daß $f = \text{const.}$ auf M , und damit

$$H^0(M) \simeq \mathbb{R}, \text{ für } M \text{ einfach wegzusammenhängend,} \quad (24.0.8)$$

bzw. wenn $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i, j = 1, \dots, n$:

$$H^0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}, \text{ für } M \text{ } n\text{-fach disjunkt wegzusammenhängend.} \quad (24.0.9) \quad \square$$

Mittels des Satzes von Stokes (21.1.1) kann man eine Kohomologiegruppe als den Dualraum einer Homologiegruppe ansehen. Dazu definiert man in M ein inneres Produkt zwischen einer r -Form $\omega \in \Omega^r(M)$ und einer r -Kette $c \in C_r^\infty(M)$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_r^\infty(M) \times \Omega^r(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \langle c, \omega \rangle := \int_c \omega. \quad (24.0.10)$$

Dieses innere Produkt ist linear in beiden Argumenten und der Satz von Stokes läßt sich damit schreiben als:

$$\langle c_r, d_{r-1}\omega_{r-1} \rangle = \langle \partial_r c_r, \omega_{r-1} \rangle \quad \text{oder kurz} \quad \langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle. \quad (24.0.11)$$

Daraus folgt sofort

$$c_r \in B_r^\infty(M), \omega_r \in Z^r(M) \quad \Rightarrow \quad \langle c_r, \omega_r \rangle = \langle \partial_{r+1} c'_{r+1}, \omega_r \rangle = \langle c'_{r+1}, d_r \omega_r \rangle = 0, \quad (24.0.12)$$

$$c_r \in Z_r^\infty(M), \omega_r \in B^r(M) \quad \Rightarrow \quad \langle c_r, \omega_r \rangle = \langle c_r, d_{r-1}\omega'_{r-1} \rangle = \langle \partial_r c_r, \omega'_{r-1} \rangle = 0. \quad (24.0.13)$$

Das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert ein entsprechendes inneres Produkt zwischen den Homologiegruppen:

$$\lambda : H_r^\infty(M) \times H^r(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \lambda([c], [\omega]) := \langle c, \omega \rangle = \int_c \omega. \quad (24.0.14)$$

Damit diese Definition Sinn macht, muß noch gezeigt werden, daß dieses innere Produkt unabhängig vom jeweiligen Repräsentanten der Klassen $[c]$ und $[\omega]$ ist.

Sei also $c_r \in [c_r] \in H_r^\infty(M)$ und $\omega_r \in [\omega_r] \in H^r(M)$, dann ist $c'_r = (c_r + \partial c''_{r+1}) \in [c_r]$ und $d\omega_r = 0$, und daraus folgt:

$$\langle c'_r, \omega_r \rangle = \langle c_r + \partial c''_{r+1}, \omega_r \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle + \langle \partial c''_{r+1}, \omega_r \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle + \langle c''_{r+1}, d\omega_r \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle.$$

Sei nun $c_r \in [c_r] \in H_r^\infty(M)$ und $\omega_r \in [\omega_r] \in H^r(M)$, dann ist $\partial c_r = 0$ und $\omega'_r = \omega_r + d\omega''_{r-1}$, und daraus folgt:

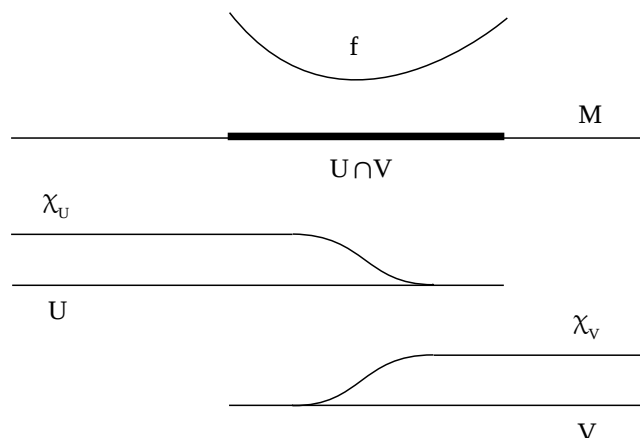
$$\langle c_r, \omega'_r \rangle = \langle c_r, \omega_r + d\omega''_{r-1} \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle + \langle c_r, d\omega''_{r-1} \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle + \langle \partial c_r, \omega''_{r-1} \rangle = \langle c_r, \omega_r \rangle.$$

Um den Isomorphismus von $H_r(M) \simeq H_r^\infty(M)$ und $H^r(M)$ und damit den Satz von de Rham zu beweisen muß man zeigen, daß das innere Produkt $\lambda([c], [\omega]) := \langle c, \omega \rangle$ nicht entartet ist. Dazu kann man eine Meyer-Vietoris Sequenz verwenden, ganz ähnlich jener, die wir bereits im Kapitel zur singulären Homologie kennengelernt haben. Der algebraische Teil des Beweises, welcher den Übergang von einer kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz zu einer langen, exakten Sequenz von Kohomologiegruppen konstruiert ist identisch zu dem Fall der singulären Homologiegruppen. Der rein topologische Teil des Beweises ist auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit natürlich einfacher als in einem allgemeinen topologischen Raum, weil sehr viel mehr Struktur vorhanden ist. Wir verwenden hier insbesondere ein Hilfsmittel der Analysis, die *Zerlegung der Einheit*: sei $\{U_i\}$ eine abzählbare Überdeckung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , dann gibt es eine Zerlegung der Einheit $\{\chi_i\}$ mit nichtnegativen C^∞ -Funktionen χ_i , die ihren Träger auf U_i haben, und für die in einer Umgebung eines jeden Punktes von M die Summe $\sum_i \chi_i$ eine endliche Summe ist und $\sum_i \chi_i = 1$ gilt.

Sei eine Funktion f zunächst nur auf $U \cap V$ definiert. Mit Hilfe der Funktionen χ_V und χ_U können wir f auf U und V fortsetzen:

$$\chi_V f \quad \text{ist definiert auf } U, \quad \chi_U f \quad \text{ist definiert auf } V, \quad (24.0.15)$$

$$\chi_V f + \chi_U f = (\chi_V + \chi_U) f = f \quad \text{ist definiert auf } U \cap V. \quad (24.0.16)$$

Abbildungung 24.1: Zerlegung der Einheit auf $M = U \cup V$

Satz 24.0.4 (Meyer-Vietoris) Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$, $V \subseteq M$ eine offene Überdeckung von M , d.h. $M = U \cup V$, sei weiter $\{\chi_U, \chi_V\}$ eine Zerlegung der Einheit, dann gilt:

1. die folgende, kurze Meyer-Vietoris Sequenz ist exakt:

$$\emptyset \rightarrow \Omega^r(M) \xrightarrow{\bar{i}} \Omega^r(U) \oplus \Omega^r(V) \xrightarrow{\bar{j}} \Omega^r(U \cap V) \rightarrow \emptyset, \quad (24.0.17)$$

$$\bar{i} : \omega \mapsto (\omega, \omega), \quad \bar{j} : (-\chi_V \omega, \chi_U \omega) \mapsto \chi_U \omega - (-\chi_V \omega) = \omega. \quad (24.0.18)$$

2. aus dieser kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz folgt die lange, exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\dots \rightarrow H^r(M) \xrightarrow{\bar{i}_\bullet} H^r(U) \oplus H^r(V) \xrightarrow{\bar{j}_\bullet} H^r(U \cap V) \xrightarrow{d_\bullet} H^{r+1}(M) \rightarrow \dots \quad (24.0.19)$$

3. der Korandoperator d_\bullet lautet explizit

$$d_\bullet[\omega] = \begin{cases} [d(\chi_U \omega)] & \text{auf } V, \\ [-d(\chi_V \omega)] & \text{auf } U. \end{cases} \quad (24.0.20)$$

Beweis:

1. diese kurze Sequenz ist exakt, denn \bar{i} ist injektiv und

$$(\omega_1, \omega_2) \in \ker(\bar{j}) \Rightarrow \omega := \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow (\omega_1, \omega_2) = (\omega, \omega) \in \text{Im}(\bar{i}).$$

2. mit 21.3.3 folgt aus der obigen kurzen, exakten Meyer-Vietoris Sequenz die lange, exakte Sequenz von Kohomologiegruppen. Der einzige Unterschied zu den Homologiegruppen besteht darin, daß bei der Sequenz der Kohomologiegruppen wegen $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ die Indizes ansteigen.

3. zur expliziten Bestimmung des Korandoperators d_\bullet betrachten wir die kurze exakte Sequenz des Ketten-Komplexes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{r+1}(M) & \xrightarrow{\bar{i}} & \Omega^{r+1}(U) \oplus \Omega^{r+1}(V) & \xrightarrow{\bar{j}} & \Omega^{r+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^r(M) & \xrightarrow{\bar{i}} & \Omega^r(U) \oplus \Omega^r(V) & \xrightarrow{\bar{j}} & \Omega^r(U \cap V) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Sei $[\omega] \in H^r(U \cap V)$, dann ist $\omega \in \Omega^r(U \cap V)$ eine geschlossene Form, d.h. $d\omega = 0$. Da die Zeilen im obigen kommutativen Diagramm exakte Sequenzen sind, ist \bar{j} surjektiv, d.h. es gibt für jedes $\omega \in \Omega^r(U \cap V)$ ein $\psi \in \Omega^r(U) \oplus \Omega^r(V)$ mit $\bar{j} : \psi \rightarrow \omega$, und zwar $\psi = (-\chi_V \omega, \chi_U \omega)$. Es folgt

$$d \circ \bar{j}(\psi) = \begin{cases} d(\omega) = 0, \\ \bar{j} \circ d(\psi) = \bar{j}(-d(\chi_V \omega), d(\chi_U \omega)) = d(\chi_U \omega) - (-d(\chi_V \omega)), \end{cases}$$

also $-d(\chi_V \omega) = d(\chi_U \omega)$ auf $U \cap V$. Wegen $d(\psi) \in \ker(\bar{j}) = \text{Im}(\bar{i})$ existiert ein $\varphi \in \Omega^{r+1}(M)$ mit $\bar{i}(\varphi) = d(\psi)$. Wegen

$$d \circ \bar{i}(\varphi) = \begin{cases} \bar{i}(d(\varphi)) & \text{und } \bar{i} \text{ injektiv} \\ d^2(\psi) = 0 \end{cases}$$

folgt $d\varphi = 0$, d.h. $[\varphi] \in H^{r+1}(M)$ und damit ist $d_\bullet : H^r(U \cap V) \rightarrow H^{r+1}(M)$

$$d_\bullet[\omega] = \begin{cases} [d(\chi_U \omega)] & \text{auf } V, \\ [-d(\chi_V \omega)] & \text{auf } U. \end{cases} \quad \square$$

Mit Hilfe dieses Satzes von Meyer-Vietoris für Kohomologiegruppen läßt sich jetzt der Satz von de Rham relativ leicht beweisen. Wir hatten in 21.10.1 gezeigt, daß die glatten Homologiegruppen zur abelschen Gruppe $G = \mathbb{R}$ isomorph zu den gewöhnlichen Homologiegruppen zur abelschen Gruppe \mathbb{R} sind, d.h. $H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \simeq H_r(M; \mathbb{R})$. Der Satz von de Rham beweist nun eine Isomorphie der glatten Homologiegruppen $H_r^\infty(M; \mathbb{R})$ mit den de Rham Kohomologiegruppen $H^r(M)$.

Satz 24.0.6 (de Rham)

$$H^r(M) \simeq H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \simeq H_r(M; \mathbb{R}) . \quad (24.0.21)$$

Beweis: Der Beweis benutzt mittels der Meyer-Vietoris Sequenzen für die Homologie- und Kohomologiegruppen eine vollständige Induktion bzgl. r .

Induktionsanfang: Wenn M einfach wegzusammenhängend ist, dann gilt mit 21.2.12 und 21.10.1 $H_0(M) \simeq \mathbb{R}$ und mit 24.0.8 $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$, also $H^0(M) \simeq H_0(M; \mathbb{R})$. Wenn M aus n disjunkten wegzusammenhängenden Teilmengen $M := \bigcup_{i=1}^n M_i$ besteht, dann gilt mit 21.2.13 und 21.10.1 $H_0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}$ und mit 24.0.9 $H^0(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}$, also wiederum $H^0(M) \simeq H_0(M; \mathbb{R})$.

Das innere Produkt $\lambda([c], [\omega]) = \langle c, \omega \rangle$ induziert eine lineare Abbildung $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\lambda} : H^r(M) \rightarrow H_r^\infty(M; \mathbb{R})^* \quad \text{mit } \tilde{\lambda} : [\omega] \mapsto \lambda(\cdot, [\omega]) ,$$

$$\lambda(\cdot, [\omega]) : H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } \lambda : [c] \mapsto \lambda([c], [\omega]) ,$$

d.h. jedem $[\omega] \in H^r(M)$ wird eine Abbildung aus $H_r^\infty(M; \mathbb{R})^*$, dem Dualraum von $H_r^\infty(M; \mathbb{R})$, zugeordnet und zwar gerade $\lambda(\cdot, [\omega])$. Da wir hier nur endlichdimensionale Homologie- und Kohomologiegruppen betrachten, die zugleich Vektorräume sind, gilt

$$\dim(H_r^\infty(M; \mathbb{R})^*) = \dim(H_r^\infty(M; \mathbb{R})) .$$

Es soll nun zu gezeigt werden, daß $\tilde{\lambda}$ ein Isomorphismus ist, oder anders gesagt, daß zu jedem $[\omega] \in H^r(M)$ das innere Produkt $\lambda(\cdot, [\omega])$ nicht singular ist, d.h. $[c] \neq 0, [\omega] \neq 0$ impliziert $\lambda(\cdot, [\omega]) \neq 0$. Jetzt nehmen wir an, daß die Behauptung für $(r-1)$ gültig sei und betrachten die beiden Meyer-Vietoris Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^{r-1}(U \cap V) & \xrightarrow{d_\bullet} & H^r(U \cup V) & \xrightarrow{\bar{i}_\bullet} & H^r(U) \oplus H^r(V) & \xrightarrow{\bar{j}_\bullet} & H^r(U \cap V) & \rightarrow \\ & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & \\ \leftarrow & H_{r-1}^\infty(U \cap V) & \xleftarrow{\partial_\bullet} & H_r^\infty(U \cup V) & \xleftarrow{j_\bullet} & H_r^\infty(U) \oplus H_r^\infty(V) & \xleftarrow{i_\bullet} & H_r^\infty(U \cap V) & \leftarrow \\ & \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 & & \downarrow \lambda_3 & & \downarrow \lambda_4 & \\ & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & \end{array}$$

Zunächst betrachten wir die Situation bei den Abbildungen \bar{i}_\bullet und j_\bullet :

$$[\omega] \in H^r(U \cup V) \quad \Rightarrow \quad \bar{i}_\bullet([\omega]) = ([\omega], [\omega]) ,$$

$$[c_U] \in H_r^\infty(U) , [c_V] \in H_r^\infty(V) , \quad \Rightarrow \quad j_\bullet([c_U], [c_V]) = [c_U + c_V] .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_2([c_U + c_V], [\omega]) &= \langle (c_U + c_V), \omega \rangle = \langle c_U, \omega \rangle + \langle c_V, \omega \rangle = \langle c_U, \omega|_U \rangle + \langle c_V, \omega|_V \rangle \\ &= \lambda_3([c_U], [\omega|_U]) \oplus \lambda_3([c_V], [\omega|_V]) . \end{aligned}$$

Wenn also λ_2 nicht singularär ist, dann auch λ_3 .

Als nächstes betrachten wir die Situation bei den Abbildungen \bar{j}_\bullet und i_\bullet :

$$(-[\omega|_U], [\omega|_V]) \in H^r(U) \oplus H^r(V) \quad \Rightarrow \quad \bar{j}_\bullet((-[\omega|_U], [\omega|_V])) = [\omega] ,$$

$$[c] \in H_r^\infty(U \cap V) , \quad \Rightarrow \quad i_\bullet([c]) = ([c], -[c]) .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_3([c], -[\omega|_U]) \oplus \lambda_3(-[c], [\omega|_V]) &= \langle c, -\omega|_U \rangle + \langle -c, \omega|_V \rangle = -\langle c, \omega|_V + \omega|_U \rangle \\ &= -\langle c, \omega \rangle = -\lambda_4([c], [\omega]) . \end{aligned}$$

Wenn also λ_3 nicht singularär ist, dann auch λ_4 .

Jetzt betrachten wir die Situation bei den Abbildungen d_\bullet und ∂_\bullet :

Sei $[\omega] \in H^{r-1}(U \cap V)$, d.h. $\omega \in \Omega^{r-1}(U \cap V)$ mit $d\omega = 0$, sei weiter $[c] \in H_r^\infty(U \cup V)$, d.h. $c \in C_r^\infty(U \cup V)$ mit $\partial c = 0$ und $c = c_U + c_V$ (dies ist mit baryzentrischer Unterteilung immer erreichbar, siehe Kapitel 20.3 und 21.6.1). Der singularäre r -Simplex c_U ist eine Abbildung eines einfachen r -Simplex Δ_r in U , d.h. $c_U : \Delta_r \rightarrow U$. Wir wählen jetzt $\chi_U|_{\text{Im}(c_U)} = 1$ auf dem Bereich $\text{Im}(c_U) \subseteq U$, damit ist dann $\chi_V|_{\text{Im}(c_U)} = 0$. Mit 24.0.20 folgt $d_\bullet[\omega]|_{\text{Im}(c_U)} = 0$ und damit ergibt sich für das innere Produkt

$$\begin{aligned} \lambda_2([c], d_\bullet[\omega]) &= \lambda_2([c_U + c_V], d_\bullet[\omega]) = \lambda_2([c_U], d_\bullet[\omega]) + \lambda_2([c_V], d_\bullet[\omega]) \\ &= \langle c_V, d(\chi_U \omega) \rangle = \langle \partial c_V, \chi_U \omega \rangle . \end{aligned}$$

Wegen $\partial c = \partial c_U + \partial c_V = 0$ folgt $\partial c_V = -\partial c_U$ und in diesem Bereich ist $\chi_U = 1$. Damit erhalten wir mit 21.7.2

$$\lambda_2([c], d_\bullet[\omega]) = \langle \partial c_V, \omega \rangle = \lambda_1([\partial_\bullet c], [\omega]) .$$

Da λ_1 nach Induktionsvoraussetzung nicht singularär ist gilt das auch für λ_2 . □

Die Betti-Zahlen $b_r(M)$ sind per Definition die Dimensionen der Vektorräume $H_r(M; \mathbb{R})$, diese sind nun nach dem Satz von de Rham gleich $b^r(M) := \dim(H^r(M))$, so daß man die Euler Charakteristik $\chi(M)$ im Satz von Euler-Poincaré 20.4.14 auch mit den Dimensionszahlen $b^r(M)$ der Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ formulieren kann:

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(H_r(M)) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r b^r(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(H^r(M)) . \end{aligned} \quad (24.0.22)$$

Wenn nun $\omega_1 \in H^r(M)$ und $\omega_2 \in H^{m-r}(M)$ ist, dann ist $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^m(U)$ und damit ein Volumenelement. Also kann man ein inneres Produkt definieren mit

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : H^r(M) \times H^{m-r}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle := \int_M \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (24.0.23)$$

Dieses innere Produkt ist bilinear und nicht singular, d.h. $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$ impliziert $\langle\langle \omega_1, \omega_2 \rangle\rangle \neq 0$. Damit wird $H^{m-r}(M)$ zum Dualraum von $H^r(M)$, ein Zusammenhang, der als Poincaré-Dualität bezeichnet wird. Insbesondere bedeutet dies für die Betti-Zahlen

$$b^{m-r}(M) = b^r(M). \quad (24.0.24)$$

Daraus folgt sofort, daß die Euler Charakteristik $\chi(M)$ in Mannigfaltigkeiten M mit ungerader Dimension m gleich 0 ist, denn

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r b^r = \frac{1}{2} \left(\sum_{r=0}^m (-1)^r b^r + \sum_{r=0}^m (-1)^{m-r} b^{m-r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{r=0}^m (-1)^r b^r + (-1)^m \sum_{r=0}^m (-1)^r b^r \right) = 0 \quad \text{für } m \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (24.0.25)$$

Für die Kohomologieklassen $[\omega] \in H^r(M)$ kann man nun im Gegensatz zu den Homologieklassen $[c] \in H_r(M, \mathbb{R})$ eine Multiplikation definieren:

$$\wedge : H^r(M) \times H^s(M) \rightarrow H^{r+s}(M) \quad \text{mit}$$

$$[\omega_1] \in H^r(M), [\omega_2] \in H^s(M), \quad [\omega_1] \wedge [\omega_2] := [\omega_1 \wedge \omega_2]. \quad (24.0.26)$$

Tatsächlich ist diese Multiplikation unabhängig vom speziellen Repräsentanten der Klasse $[\omega]$, denn sei etwa $\omega'_1 = (\omega_1 + d\psi) \in [\omega_1]$, dann folgt mit $d\omega_1 = 0$:

$$[\omega'_1 \wedge \omega_2] = [(\omega_1 + d\psi) \wedge \omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2 + d(\omega_1 \wedge \psi)] = [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

Mittels dieser Multiplikation hat

$$H^*(M) := \bigoplus_{r=0}^m H^r(M) \quad (24.0.27)$$

die algebraische Struktur eines Rings, des sog. *Kohomologie-Rings*. Einer der Vorteile der Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ gegenüber den Homologie-Vektorräumen $H_r(M, \mathbb{R})$ ist gerade diese Ring-Struktur der Kohomologie-Vektorräume.

An dieser Stelle ist es angebracht von den technischen Details der Homologie- und Kohomologie-Theorie etwas zurückzutreten und die tiefere grundsätzliche Bedeutung des Satzes von de Rham zu reflektieren.

Bei verallgemeinerten Satz von Gauß-Bonnet (23.1.2) hatten wir gesehen, daß auf einer kompakten, orientierbaren, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ein einfacher Zusammenhang zwischen der Euler Charakteristik $\chi(M)$, einer topologischen Größe, und der Gaußschen Krümmung $K_G(u)$, einem Differentialausdruck, besteht.

Dieser Zusammenhang wird nun durch den Satz von de Rham deutlich erweitert, denn die Homologie-Vektorräume $H_r^\infty(M; \mathbb{R}) \simeq H_r(M; \mathbb{R})$ sind rein topologischer Natur, und die dazu isomorphen $H^r(M)$ Kohomologie-Vektorräume werden von Differentialformen $\omega \in \Omega^r(M)$ mit $d\omega = 0$ erzeugt - und $d\omega = 0$ ist ja ein System von Differentialgleichungen. Und somit wird die topologische Euler Charakteristik $\chi(M)$ durch die Dimension der nichttrivialen Lösungsräume von $d\omega = 0$ bestimmt, also von $b^r(M) = \dim(H^r(M))$.

Speziell für Physiker spricht noch ein weiteres Argument dafür, den Kohomologie-Vektorräumen den Vorzug vor den Homologie-Vektorräumen zu geben. Der Homologie-Rand-Operator ∂_r ist ein globaler Operator. Um ihn anwenden zu können braucht man also Informationen über die komplette Mannigfaltigkeit. Physiker betreiben jedoch ihre Experimente immer lokal in der Raumzeit und formulieren ihre Modelle und Theorien, zumindest in der klassischen Physik, in lokalen Differentialgleichungen. Die komplette topologische Form der Lösungsmannigfaltigkeit ist häufig anfangs völlig unklar. Bei solchem Vorgehen ist die Kohomologie-Theorie natürlich das Mittel der Wahl.

Eine Weiterentwicklung der Kohomologie-Theorie ist die *topologische K-Theorie*, welche Vektorbündel auf topologischen Räumen untersucht. Mit Hilfe dieser topologischen K-Theorie haben Atiyah und Singer 1963 erstmalig einen allgemeinen Indexsatz für elliptische Differential-Operatoren bewiesen, der ja sowohl beim Satz von Gauß-Bonnet, als auch beim Satz von de Rham, immer im Hintergrund steht. Wir werden später noch ausführlicher auf diese Atiyah-Singer-Indexsätze zu sprechen kommen.

25 Hodge-Theorie

Wir geben hier eine kleine und knappe Einführung in die Hodge-Theorie. Dem Hodge-Stern-Operator begegnen wir sehr häufig in der theoretischen Physik, z.B. bei der Konstruktion der Lagrange-Funktionen der $SU(n)$ -Eichtheorien.

Die beiden folgenden Unterkapitel *Hodge-Laplace-Operator* (25.2) und *Hodge-Zerlegung und der Satz von Hodge* (25.3) führen bereits tiefer in die Funktionalanalysis hinein und stützen sich die Theorie der Fredholm-Operatoren und der Pseudodifferential-Operatoren - siehe ausführlich beschrieben in Schiekel (2019), Anhänge: Kapitel „*Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren*“ und Kapitel „*Pseudodifferential-Operatoren*“. Wir haben diese beiden Hodge-Unterkapitel hier nur deshalb mit aufgenommen, weil unsere Formulierung der Atiyah-Singer-Indexsätze (33) auf diese Begriffsbildungen Bezug nimmt.

Wir orientieren uns an Nakahara (2003), S. 289 ff., sowie insb. an Gilkey (1995), S. 43 ff. und Taylor (1996), S. 161 ff., S. 351 ff.

25.1 Hodge-Stern-Operator

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann- oder Lorentz-Metrik $g_{\mu\nu}$. In 11.1.14 und 11.1.15 hatten wir gefunden, daß für die Vektorräume der Differentialformen $\Omega^r(M)$ und $\Omega^{m-r}(M)$ gilt:

$$\dim(\Omega^r) = \dim(\Omega^{m-r}) . \quad (25.1.1)$$

Der Hodge-Stern-Operator ist ein linearer Isomorphismus zwischen diesen Vektorräumen $\Omega^r(M)$ und $\Omega^{m-r}(M)$:

Definition 25.1.1

$$\star : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M) \quad \text{mit}$$

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) := \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-r)!} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} . \quad (25.1.2)$$

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M) \quad \Rightarrow$$

$$\star\omega = \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} . \quad (25.1.3)$$

Hierbei ist $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m}$ der total antisymmetrische *Levi-Civita-Tensor*, der sich vom *Levi-Civita-Symbol* $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m}$ (11.2.1) nur in der kontravarianten Form unterscheidet:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m} &:= \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} , \\ \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_m} &:= g^{\mu_1 \nu_1} \cdot \dots \cdot g^{\mu_m \nu_m} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m} = g^{\mu_1 \nu_1} \cdot \dots \cdot g^{\mu_m \nu_m} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} .\end{aligned}$$

Mit der Definition der Determinanten (11.2.2) folgt:

$$\tilde{\epsilon}^{12 \dots m} = g^{1\mu_1} \cdot \dots \cdot g^{m\mu_m} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_m} = g^{1\mu_1} \cdot \dots \cdot g^{m\mu_m} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_m} = \det(g^{\mu\nu}) = g_{det}^{-1} , \quad (25.1.4)$$

und mit der Definition der Permutation π

$$\pi := \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, m \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \end{pmatrix} , \quad \text{mit } \text{sgn}(\pi) := \epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_m}$$

ergibt sich daraus

$$\tilde{\epsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} = \tilde{\epsilon}^{\pi(1)\pi(2)\dots\pi(m)} = \tilde{\epsilon}^{12 \dots m} \text{sgn}(\pi) = g_{det}^{-1} \epsilon_{\mu_1, \dots, \mu_m} . \quad (25.1.5)$$

Immer wieder gibt es Situationen in denen es von Vorteil ist, von den Koordinatenbasen $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ und $\{dx^\mu\}$ mittels des von Élie Cartan eingeführten *begleitenden Vielbeins* (*Rahmenfeld, moving frame, repère mobile*) $e_a^\mu(p) \in C^\infty(M)$ zu den Nichtkoordinatenbasen

$$e_a := e_a^\mu \partial_\mu \quad \text{und} \quad \theta^a := e^a_\mu dx^\mu ,$$

(siehe 15.2.1, 15.2.3) überzugehen. Für die Metrik gilt mit 15.10.4

$$\hat{g}_{ab} := g(e_a, e_b) = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \quad (25.1.6)$$

$$\hat{g}^{ab} := (\hat{g}_{ab})^{-1} = \begin{cases} \delta_{ab} & \text{Riemann-Metrik,} \\ \eta_{ab} & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \quad (25.1.7)$$

bzw. in der Umkehrung

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{ab} e^a_\mu e^b_\nu . \quad (25.1.8)$$

Daraus folgt mit $g_{det} := \det(g_{\mu\nu})$ und $e_{det} := \det(e^a_\mu)$

$$g_{det} := \det(g_{\mu\nu}) = \begin{cases} \det(e^a_\mu e^b_\nu) = e_{det}^2 & \text{Riemann-Metrik,} \\ -\det(e^a_\mu e^b_\nu) = -e_{det}^2 & \text{Lorentz-Metrik,} \end{cases} \Rightarrow |e| = \sqrt{|g|} , \quad (25.1.9)$$

bzw.

$$\hat{g}_{det} := \det(\hat{g}_{ab}) = \det(\hat{g}^{ab}) = \begin{cases} +1 & \text{Riemann-Metrik,} \\ -1 & \text{Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (25.1.10)$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^m &= (e^1_{\mu_1} dx^{\mu_1}) \wedge (e^2_{\mu_2} dx^{\mu_2}) \wedge \dots \wedge (e^m_{\mu_m} dx^{\mu_m}) \\
&= e^1_{\mu_1} e^2_{\mu_2} \dots e^m_{\mu_m} \cdot dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\
&= e^1_{\mu_1} e^2_{\mu_2} \dots e^m_{\mu_m} \cdot \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \\
&= \det(e^a_{\mu}) \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \\
&= |e_{det}| \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m = \sqrt{|g_{det}|} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m . \quad (25.1.11)
\end{aligned}$$

Dies ist gerade das invariante Volumenelement in M , das sich auch als $\star(1)$ darstellen läßt, denn aus 25.1.2 folgt mit $r = 0$:

$$\begin{aligned}
\star(1) &= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{m!} \tilde{\epsilon}_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} = \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \sqrt{|g_{det}|} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m . \quad (25.1.12)
\end{aligned}$$

Dies können wir andererseits auch folgendermaßen auf die Nichtkoordinatenbasis umschreiben:

$$\begin{aligned}
\star(1) &= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{m!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \cdot (e_{b_1}^{\nu_1} e_{b_2}^{\nu_2} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) \cdot \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \\
&=: \frac{1}{m!} \hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_m} \cdot \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \stackrel{!}{=} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m .
\end{aligned}$$

Mit der Definition der Permutation $\hat{\pi}$

$$\hat{\pi} := \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, m \\ b_1, b_2, \dots, b_m \end{pmatrix} \quad (25.1.13)$$

ergibt sich daraus der total antisymmetrische *Levi-Civita-Tensor* $\hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_m}$ in der Nichtkoordinatenbasis zu

$$\hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_m} := \sqrt{|g_{det}|} \cdot (e_{b_1}^{\nu_1} e_{b_2}^{\nu_2} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} = \text{sgn}(\hat{\pi}) . \quad (25.1.14)$$

Der Übergang von einem Tangentialraum-Tensorindex (kontravarianter Index) zu einem Kotangentialraum-Tensorindex (kovarianter Index) geschieht bei einer Koordinatenbasis mit $g_{\mu\nu}$, bei einer Nichtkoordinatenbasis gemäß 15.10.4 $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ oder $\hat{g}_{ab} = \eta_{ab}$ für eine Riemannsche oder Lorentzsche Metrik. Daß dies tatsächlich auch für den *Levi-Civita-Tensor* $\hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_m}$ in der Nichtkoordinatenbasis zutrifft, d.h. daß $\hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_m}$ tatsächlich ein kovarianter Tensor ist, sieht man folgendermaßen:

$$\hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}_{b_{r+1} \dots b_m} = \hat{g}^{a_1 b_1} \dots \hat{g}^{a_r b_r} \cdot \hat{\epsilon}_{b_1 \dots b_r b_{r+1} \dots b_m}$$

$$\begin{aligned}
&= (\hat{g}^{a_1 b_1} \dots \hat{g}^{a_r b_r}) \cdot \sqrt{|g_{det}|} \cdot (e_{b_1}^{\nu_1} \dots e_{b_r}^{\nu_r} e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \\
&= \sqrt{|g_{det}|} \cdot (e^{a_1 \mu_1} e_{\mu_1}^{b_1} \dots e^{a_r \mu_r} e_{\mu_r}^{b_r}) \cdot (e_{b_1}^{\nu_1} \dots e_{b_r}^{\nu_r} e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} .
\end{aligned}$$

Nun ist

$$e_{\mu_i}^{b_i} e_{b_i}^{\nu_i} = g_{\mu_i}^{\nu_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}_{b_{r+1} \dots b_m} &= \sqrt{|g_{det}|} \cdot (e^{a_1 \mu_1} g_{\mu_1}^{\nu_1} \dots e^{a_r \mu_r} g_{\mu_r}^{\nu_r}) \cdot (e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_m} \\
&= \sqrt{|g_{det}|} \cdot (e^{a_1 \nu_1} \dots e^{a_r \nu_r}) \cdot \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot (e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} \dots e_{b_m}^{\nu_m}) .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich in der Nichtkoordinatenbasis

$$\begin{aligned}
\star(\theta^{a_1} \wedge \theta^{a_2} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r}) &= \star(e_{\mu_1}^{a_1} dx^{\mu_1} \wedge e_{\mu_2}^{a_2} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge e_{\mu_r}^{a_r} dx^{\mu_r}) \\
&= e_{\mu_1}^{a_1} e_{\mu_2}^{a_2} \dots e_{\mu_r}^{a_r} \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-r)!} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \\
&= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-r)!} e_{\mu_1}^{a_1} e_{\mu_2}^{a_2} \dots e_{\mu_r}^{a_r} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot \\
&\quad \cdot e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} e_{b_{r+2}}^{\nu_{r+2}} \dots e_{b_m}^{\nu_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \\
&= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-r)!} e^{a_1 \mu_1} e^{a_2 \mu_2} \dots e^{a_r \mu_r} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} \cdot \\
&\quad \cdot e_{b_{r+1}}^{\nu_{r+1}} e_{b_{r+2}}^{\nu_{r+2}} \dots e_{b_m}^{\nu_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} \\
&= \frac{1}{(m-r)!} \hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}_{b_{r+1} \dots b_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} , \tag{25.1.15}
\end{aligned}$$

und

$$\star \omega = \frac{1}{r!(m-r)!} \omega_{a_1 a_2 \dots a_r} \hat{\epsilon}^{a_1 \dots a_r}_{b_{r+1} \dots b_m} \theta^{b_{r+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_m} . \tag{25.1.16}$$

Lemma 25.1.2 Sei $\omega \in \Omega^r(M)$ eine r -Form in einer m -dimensionalen Riemannschen oder Lorentzischen Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik $g_{\mu\nu}$ und $g_{det} = \det(g_{\mu\nu})$, dann gilt

$$\star \star \omega = \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{r(m-r)} \omega = \begin{cases} (-1)^{r(m-r)} \omega & \text{Riemann-Metrik} \\ (-1)^{1+r(m-r)} \omega & \text{Lorentz-Metrik} \end{cases} . \tag{25.1.17}$$

Äquivalent hierzu ist die Aussage:

$$\star^{-1} = \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{r(m-r)} \star . \tag{25.1.18}$$

Beweis: Wir führen den Beweis in einer Nichtkoordinatenbasis durch.

$$\begin{aligned}
\star\star\omega &= \star\left(\frac{1}{r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}\hat{\epsilon}_{b_{r+1}\dots b_m}^{a_1\dots a_r}\theta^{b_{r+1}}\wedge\dots\wedge\theta^{b_m}\right) \\
&= \frac{1}{r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}\hat{\epsilon}_{b_{r+1}\dots b_m}^{a_1\dots a_r}\star(\theta^{b_{r+1}}\wedge\dots\wedge\theta^{b_m}) \\
&= \frac{1}{r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}\hat{\epsilon}_{b_{r+1}\dots b_m}^{a_1\dots a_r}\left(\frac{1}{(r)!}\hat{\epsilon}_{c_1\dots c_r}^{b_{r+1}\dots b_m}\theta^{c_1}\wedge\dots\wedge\theta^{c_r}\right).
\end{aligned}$$

25.1.5 lautet mit $\hat{g}_{det} = \det(\hat{g}_{a_1a_2})$ in unserer Nichtkoordinatenbasis:

$$\hat{\epsilon}^{a_1a_2\dots a_m} = \hat{g}_{det}^{-1}\hat{\epsilon}_{a_1,\dots,a_m} = \hat{g}_{det}\hat{\epsilon}_{a_1,\dots,a_m} = \begin{cases} (+1)\hat{\epsilon}_{a_1,\dots,a_m} & \text{Riemann-Metrik,} \\ (-1)\hat{\epsilon}_{a_1,\dots,a_m} & \text{Lorentz-Metrik.} \end{cases} \quad (25.1.19)$$

Damit ziehen wir die Indizes $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_m$ herunter und erhalten mit explizit ausgeschriebenen Summationen:

$$\begin{aligned}
\star\star\omega &= \sum_{abc} \frac{1}{r!r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}\hat{g}_{det}\hat{\epsilon}_{a_1\dots a_r b_{r+1}\dots b_m}\hat{\epsilon}_{b_{r+1}\dots b_m c_1\dots c_r}\theta^{c_1}\wedge\dots\wedge\theta^{c_r} \\
&= \sum_{abc} \frac{\hat{g}_{det}\cdot(-1)^{r(m-r)}}{r!r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}\hat{\epsilon}_{a_1\dots a_r b_{r+1}\dots b_m}\hat{\epsilon}_{c_1\dots c_r b_{r+1}\dots b_m}\theta^{c_1}\wedge\dots\wedge\theta^{c_r}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der folgenden Summationsformel

$$\begin{aligned}
&\sum_b \sum_c \hat{\epsilon}_{a_1\dots a_r b_{r+1}\dots b_m}\hat{\epsilon}_{c_1\dots c_r b_{r+1}\dots b_m}\theta^{c_1}\wedge\dots\wedge\theta^{c_r} \\
&= r! \sum_b \hat{\epsilon}_{a_1\dots a_r b_{r+1}\dots b_m}\hat{\epsilon}_{a_1\dots a_r b_{r+1}\dots b_m}\theta^{a_1}\wedge\dots\wedge\theta^{a_r} \\
&= r!(m-r)!\theta^{a_1}\wedge\dots\wedge\theta^{a_r} \quad (25.1.20)
\end{aligned}$$

können wir den Ausdruck für $\star\star\omega$ vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}
\star\star\omega &= \frac{\hat{g}_{det}\cdot(-1)^{r(m-r)}}{r!r!(m-r)!}\omega_{a_1\dots a_r}r!(m-r)!\theta^{a_1}\wedge\dots\wedge\theta^{a_r} \\
&= \hat{g}_{det}\cdot(-1)^{r(m-r)}\frac{1}{r!}\omega_{a_1\dots a_r}\theta^{a_1}\wedge\dots\wedge\theta^{a_r} \\
&= \hat{g}_{det}\cdot(-1)^{r(m-r)}\omega. \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 25.1.4 Seien $\omega, \psi \in \Omega^r(M)$ zwei r -Formen in einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , dann gilt

$$\omega \wedge \star\psi = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad (25.1.21)$$

$$= \frac{1}{r!} \omega_{a_1 \dots a_r} \psi^{a_1 \dots a_r} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m . \quad (25.1.22)$$

Beweis: Wir verwenden in diesem Beweis zur besseren Übersichtlichkeit *nicht* die Einsteinsche Summenkonvention, sondern schreiben die Summationen explizit aus.

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star\psi &= \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(r!)^2(m-r)!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_m} \sum_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi_{\nu_1 \dots \nu_r} \tilde{\epsilon}^{\nu_1 \dots \nu_r}{}_{\mu_{r+1} \dots \mu_m} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_m} \sum_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi^{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{1}{r!(m-r)!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \sqrt{|g_{det}|} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \sum_{\nu_1 \dots \nu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi^{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{1}{r!(m-r)!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \cdot \\ &\quad \cdot \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \mu_{r+1} \dots \mu_m} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{1}{r!} \sum_{\nu_1 \dots \nu_r} \psi^{\nu_1 \dots \nu_r} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_r} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{r!}{r!} \psi^{\mu_1 \dots \mu_r} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m . \quad \square \end{aligned}$$

Somit ist $\omega \wedge \star\psi = \psi \wedge \star\omega$ eine symmetrische m -Differentialform auf $\Omega^r(M)$ und kann über M integriert werden. Hodge hat die folgende Bilinearform eingeführt:

$$\begin{aligned} \langle \omega | \psi \rangle &:= \int_M \omega \wedge \star\psi \quad (25.1.23) \\ &= \frac{1}{r!} \int_M \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \psi^{\mu_1 \dots \mu_r} \sqrt{|g_{det}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{r!} \int_M \omega_{a_1 \dots a_r} \psi^{a_1 \dots a_r} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m . \end{aligned}$$

Wenn die Mannigfaltigkeit M eine Riemann-Metrik hat, dann ist diese Bilinearform sogar positiv definit und damit also ein Skalarprodukt, denn mit $\hat{g}^a_b = \delta^a_b$ folgt sofort:

$$\begin{aligned} \langle \omega | \omega \rangle &= \frac{1}{r!} \int_M \omega_{a_1 \dots a_r} \omega^{a_1 \dots a_r} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \\ &= \frac{1}{r!} \int_M \sum_{a_1 \dots a_r} \omega_{a_1 \dots a_r} \omega_{a_1 \dots a_r} \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \geq 0. \end{aligned} \quad (25.1.24)$$

Wenn man eine Bilinearform auf $\Omega^r(M)$ hat, dann kann man den zu $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ adjungierten Operator $d^\dagger : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ definieren.

Definition 25.1.6 Sei $d : \Omega^{r-1}(M) \rightarrow \Omega^r(M)$, dann definiert man $d^\dagger : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ mit

$$d^\dagger := \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+1} \star d \star = \begin{cases} (-1)^{mr+m+1} \star d \star & \text{Riemann-Metrik} \\ (-1)^{mr+m} \star d \star & \text{Lorentz-Metrik} \end{cases}. \quad (25.1.25)$$

Satz 25.1.7 Auf einer kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit M ohne Rand mit einer Metrik g gilt:

$$\omega \in \Omega^r(M), \psi \in \Omega^{r-1}(M) \quad \Rightarrow \quad \langle d\psi | \omega \rangle = \langle \psi | d^\dagger \omega \rangle. \quad (25.1.26)$$

Beweis: Zunächst einmal sind $\psi \wedge \star d^\dagger \omega$ und $d\psi \wedge \star \omega$ Elemente von $\Omega^m(M)$, also existiert das Integral über M . Weiter ist

$$d(\psi \wedge \star \omega) = d\psi \wedge \star \omega + (-1)^{r-1} \psi \wedge d \star \omega.$$

Nun ist $d \star \omega$ eine $(m-r+1)$ -Form. Aus 25.1.17 folgt für eine r -Form

$$\hat{g}_{det} \cdot (-1)^{r(m-r)} \star \star = \mathbb{1},$$

und also für eine $(m-r+1)$ -Form:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{(m-r+1)(m-((m-r+1)))} \star \star \\ &= \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{(m-r+1)(r-1)} \star \star \\ &= \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr-r^2+2r-m-1} \star \star \\ &= \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+r+1-2m-r(r-1)-2} \star \star \\ &= \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+r+1} \star \star. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck fügen wir in den zweiten Term von $d(\psi \wedge \star \omega)$ ein und erhalten:

$$d(\psi \wedge \star \omega) = d\psi \wedge \star \omega + \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+r+1} (-1)^{r-1} \psi \wedge \star \star d \star \omega$$

$$= d\psi \wedge \star\omega - \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+1} \psi \wedge \star(\star d \star \omega) .$$

Integriert über M ergibt sich einerseits

$$\int_M d(\psi \wedge \star\omega) = \int_{\partial M} (\psi \wedge \star\omega) = 0 ,$$

weil M ja nach Voraussetzung eine Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Andererseits ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_M d(\psi \wedge \star\omega) &= \int_M d\psi \wedge \star\omega - \hat{g}_{det} \cdot (-1)^{mr+m+1} \int_M \psi \wedge \star(\star d \star \omega) \\ &= \int_M d\psi \wedge \star\omega - \int_M \psi \wedge \star(d^\dagger \omega) \stackrel{!}{=} 0 , \end{aligned}$$

und damit

$$\langle d\psi \mid \omega \rangle = \langle \psi \mid d^\dagger \omega \rangle . \quad \square$$

25.2 Hodge-Laplace-Operator

Hodge hat die gewöhnliche Definition des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, randlosen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M verallgemeinert:

Definition 25.2.1 *Der folgende Komplex heißt de Rham Komplex:*

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0 , \quad (25.2.1)$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M) \xleftarrow{d_1^\dagger} \dots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M) \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M) \xleftarrow{d_n^\dagger} 0 . \quad (25.2.2)$$

Auf dem de Rham Komplex kann man den folgenden Hodge-Laplace-Operator definieren:

$$\Delta_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M) ,$$

$$\Delta_r := d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r . \quad (25.2.3)$$

Für einen einfachen Funktionenraum $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ erhalten wir die bekannte Form des Laplace-Beltrami Operators. Sei $f \in \Omega^0(M)$, dann gilt $d_{-1}^\dagger f = 0$ und mit $d = d_0$ folgt:

$$\Delta f = d^\dagger df = - \star d \star (\partial_\mu f dx^\mu)$$

$$\begin{aligned}
&= - \star d \left(\frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-1)!} (\partial_\mu f) \tilde{\epsilon}^{\mu}_{\nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \right) \\
&= - \star d \left(\frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-1)!} g^{\mu\lambda} (\partial_\mu f) \tilde{\epsilon}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \right) \\
&= - \star \left(\partial_\nu \left(\frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(m-1)!} g^{\mu\lambda} (\partial_\mu f) \right) \epsilon_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} dx^\nu \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} \right)
\end{aligned}$$

Nun ist für einen festen Wert von ν :

$$\epsilon_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} dx^\nu \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_m} = \delta_\lambda^\nu (m-1)! dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

und damit folgt für Δf :

$$\begin{aligned}
\Delta f &= - \star \left(\partial_\nu (\sqrt{|g_{det}|} g^{\mu\nu} (\partial_\mu f)) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m \right) \\
&= - (\partial_\nu (\sqrt{|g_{det}|} g^{\mu\nu} (\partial_\mu f))) \star (dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m) \\
&= - (\partial_\nu (\sqrt{|g_{det}|} g^{\mu\nu} (\partial_\mu f))) \sqrt{|g_{det}|} \tilde{\epsilon}^{1 \dots m} \\
&= - (\partial_\nu (\sqrt{|g_{det}|} g^{\mu\nu} (\partial_\mu f))) \sqrt{|g_{det}|} g_{det}^{-1} \epsilon_{1, \dots, m} \\
&= - \frac{1}{\sqrt{|g_{det}|}} \partial_\nu (\sqrt{|g_{det}|} g^{\nu\mu} \partial_\mu f) . \tag{25.2.4}
\end{aligned}$$

In 25.1.24 hatten wir gesehen, daß die Hodge-Bilinearform $\langle \omega | \psi \rangle := \int_M \omega \wedge \star \psi$ auf einer Mannigfaltigkeit M mit Riemann-Metrik positiv definit ist, und daraus folgt sofort, daß der Hodge-Laplace-Operator auf $\Omega^r(M)$ ein positiver Operator ist:

$$\begin{aligned}
\langle \omega | \Delta \omega \rangle &= \langle \omega | (d^\dagger d + d d^\dagger) \omega \rangle = \langle \omega | d^\dagger d \omega \rangle + \langle \omega | d d^\dagger \omega \rangle \\
&= \langle d \omega | d \omega \rangle + \langle d^\dagger \omega | d^\dagger \omega \rangle \geq 0 . \tag{25.2.5}
\end{aligned}$$

Dies gibt Anlaß zu der Vermutung, daß Δ ein elliptischer linearer partieller Differentialoperator (LPDO) ist.

Jetzt sollen die Symbole von d und d^\dagger in Bezug auf den obigen Komplex bestimmt werden. Dazu machen wir von der üblichen Nomenklatur in der Theorie der linearen partiellen Differentialoperatoren (LPDOs) Gebrauch - siehe Schiek (2019), Anhang: „Pseudodifferential-Operatoren - Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung“. Seien

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M) \quad \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^{r+1}(M) .$$

Der Übergang zum Hauptsymbol von d , d.h. zu $\sigma_H(d, \xi)$ mit $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ geschieht durch Fouriertransformation, bzw. einfach durch die Substitution

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \rightarrow i\xi_\nu, \quad \text{mit} \quad \xi := \xi_\nu dx^\nu \in T^*M, \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_H(d, \xi)\omega = i\xi_\nu dx^\nu \wedge \omega \quad \text{bzw.} \quad \sigma_H(d, \xi) = i \cdot \text{ext}(\xi) := i\xi \wedge. \quad (25.2.6)$$

Das äußere Produkt $\text{ext}(\xi) = \xi \wedge$ hat nun offensichtlich einen Kern, denn wir können ja in $\Omega^n(M)$ immer $\xi = \xi_1 dx^1$ wählen, und damit folgt

$$\text{ext}(\xi) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \begin{cases} 0 & : 1 \in \{\mu_1, \dots, \mu_r\}, \\ \xi_1 dx^1 \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} & : 1 \notin \{\mu_1, \dots, \mu_r\}. \end{cases}$$

Das Hauptsymbol eines Produkts d^2 ist wegen der Linearität von d einfach gleich dem Produkt der Hauptsymbole von d :

$$\sigma_H(d^2, \xi) = (i)^2 \xi_\mu \xi_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge = \sigma_H(d, \xi) \sigma_H(d, \xi).$$

Aus $d^2 = d_r \circ d_{r-1} = 0$ folgt für die Symbole $\sigma_H(d_r, \xi) \circ \sigma_H(d_{r-1}, \xi) = 0$ und damit folgt

$$\text{Im}(\text{ext}_{r-1}(\xi)) = \ker(\text{ext}_r(\xi)). \quad (25.2.7)$$

Dies ist aber gerade die Bedingung dafür, daß der de Rham Komplex zugleich ein *elliptischer Komplex* ist - vergleiche die Definition in Schiekel (2019), Anhang: „Pseudodifferential-Operatoren - Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung“.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß das Hauptsymbol von d^\dagger gerade

$$\sigma_H(d^\dagger, \xi) = -i \cdot \text{int}(\xi),$$

ist, wenn $\text{int}(\xi) := i_{X(\xi)}$ das sog. innere Produkt ist (siehe 11.1.16), d.h. die duale Operation zur externen Multiplikation $\text{ext}(\xi)$. Dies wollen wir im nächsten Lemma beweisen. Wenn $\xi = \xi_\nu dx^\nu \in T^*M$ ist, dann bezeichnen wir mit

$$X(\xi) := \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in TM.$$

Auch das innere Produkt $\text{int}(\xi) = i_{X(\xi)}$ hat nun offensichtlich einen Kern, denn wir wählen in $\Omega^n(M)$ wieder $\xi = \xi_1 dx^1$, dann ist $X = g^{11} \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$ und damit folgt

$$\text{int}(\xi) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \begin{cases} 0 & : 1 \notin \{\mu_1, \dots, \mu_r\}, \\ \xi^1 dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} & : 1 = \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r. \end{cases}$$

Lemma 25.2.2

$$\sigma_H(d^\dagger, \xi) = -i \cdot \text{int}(\xi). \quad (25.2.8)$$

Beweis: Das Hauptsymbol $\sigma_H(d^\dagger, \xi)$ des adjungierten Operators $d^\dagger = -\star d\star$ ist wegen der Linearität von d und der Linearität von \star einfach das Adjungierte des Hauptsymbols $\sigma_H(d, \xi)$ des Operators d . Das heißt, wir wollen beweisen, daß bezüglich des Hodge-Skalarprodukts $\langle \omega | \psi \rangle = \int_M \omega \wedge \star \psi$ (25.1.23) gilt:

$$(\text{int}(\xi))^\dagger = \text{ext}(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \text{int}(\xi)\omega \wedge \star \psi = \omega \wedge \star \text{ext}(\xi)\psi .$$

Seien $\omega \in \Omega^r$, $\psi \in \Omega^{r-1}$, $X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\xi = \xi_\mu dx^\mu$, dann gilt mit 25.1.21 für die linke Seite:

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\text{int}(\xi)\omega = i_{X(\xi)}\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} = \frac{1}{(r-1)!} \xi^{\mu_1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} ,$$

$$\psi := \frac{1}{(r-1)!} \psi_{\nu_2 \dots \nu_r} dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\text{int}(\xi)\omega \wedge \star \psi = \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{(r-1)!} \xi^{\mu_1} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \psi^{\nu_2 \dots \nu_r} dV .$$

Für die rechte Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{ext}(\xi)\psi &= \frac{1}{(r-1)!} \xi_{\mu_1} \psi_{\nu_2 \dots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r} \\ &= r \frac{1}{r!} \xi_{\mu_1} \psi_{\nu_2 \dots \nu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\nu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_r} , \end{aligned}$$

$$\omega \wedge \star \text{ext}(\xi)\psi = r \frac{\sqrt{|g_{det}|}}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} \xi^{\mu_1} \psi^{\nu_2 \dots \nu_r} dV .$$

Damit ist $\text{int}(\xi)\omega \wedge \star \psi = \omega \wedge \star \text{ext}(\xi)\psi$, bzw. $(\text{int}(\xi))^\dagger = \text{ext}(\xi)$ gezeigt. \square

Daraus folgt nun mit dem folgenden Lemma sofort, daß der Hodge-Laplace Operator $\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d$ ein elliptischer Operator ist, d.h. daß sein Hauptsymbol $\sigma_H(\Delta, \xi) > 0$ ist für $|\xi| \neq 0$.

Lemma 25.2.4

$$\sigma_H(\Delta, \xi) = |\xi|^2 . \quad (25.2.9)$$

Beweis: Die Hauptsymbole $\sigma_H(dd^\dagger, \xi)$ und $\sigma_H(d^\dagger d, \xi)$ des Produkts der Operatoren d und d^\dagger sind wegen der Linearität von d und d^\dagger einfach das Produkt der Hauptsymbole $\sigma_H(d, \xi)$ und $\sigma_H(d^\dagger, \xi)$. Wie oben können wir in $\Omega^n(M)$ wieder $\xi = \xi_1 dx^1$ wählen und damit folgt:

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma_H(\Delta, \xi)\omega &= \text{ext}(\xi) \cdot \text{int}(\xi)\omega + \text{int}(\xi) \cdot \text{ext}(\xi)\omega \\ &= \begin{cases} \text{ext}(\xi) \cdot \text{int}(\xi)\omega = \xi_1 \xi^1 \omega = |\xi|^2 \omega & : 1 \in \{\mu_1, \dots, \mu_r\}, \\ \text{int}(\xi) \cdot \text{ext}(\xi)\omega = \xi^1 \xi_1 \omega = |\xi|^2 \omega & : 1 \notin \{\mu_1, \dots, \mu_r\}. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Also ist der Hodge-Laplace Operator $\Delta_r = d_{r-1} d_{r-1}^\dagger + d_r^\dagger d_r$ auf dem Raum von Differentialformen über *kompakten, randlosen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M ein elliptischer Operator und wegen der Kompaktheit und Randlosigkeit auch ein Fredholmoperator! Damit stehen alle Aussagen der Theorie der Fredholmoperatoren zur Verfügung (siehe Schiekel (2019), Anhang: Kapitel „*Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren*“), insb. folgt die wichtige Aussage, daß der Vektorraum der Harmonischen Formen, d.h. der Vektorraum von $\ker(\Delta_r)$, endlichdimensional ist:

$$\text{Harm}(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r) = \ker(\Delta_r) < \infty. \quad (25.2.10)$$

25.3 Hodge-Zerlegung und der Satz von Hodge

Wir hatten soeben gesehen, daß der de Rham Komplex ein *elliptischer Komplex* ist. Für elliptische Komplexe gilt nun ganz allgemein die sog. Hodge-Zerlegung (siehe Schiekel (2019), Anhang: Kapitel „*Pseudodifferential-Operatoren - Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung*“), die sich in unserem Falle mit C^∞ -Koeffizienten Funktionen von $\Omega^{r-1}(M)$, $\Omega^r(M)$, $\Omega^{r+1}(M)$ schreibt als:

$$\begin{aligned} \Omega^r(M) &= N(\Delta_r) \oplus d_{r-1}(\Omega^{r-1}(M)) \oplus d_r^\dagger(\Omega^{r+1}(M)) \\ &= \text{Harm}(\Omega^r(M)) \oplus d_{r-1}(\Omega^{r-1}(M)) \oplus d_r^\dagger(\Omega^{r+1}(M)). \end{aligned} \quad (25.3.1)$$

Der dortige Beweis für allgemeine elliptische Komplexe stützt sich zentral auf die Existenz der Inversen (d.h. der Greenfunktion) des Laplace-Operators, und damit auf die Theorie der linearen partiellen Differential- oder Pseudodifferential-Operatoren.

Mit Hilfe der Hodge-Zerlegung kann man nun den *Satz von Hodge* beweisen, daß nämlich die de Rham Kohomologie-Vektorräume $H^r(M)$ isomorph zu den Vektorräumen der harmonischen Formen $\text{Harm}(\Omega^r(M))$ sind. Dieser Satz, bzw. seine Verallgemeinerung auf Vektorbündel, ist deswegen so bedeutsam, weil die Kohomologie-Vektorräume

$H^r(M)$ ja globale topologische Objekte sind, die harmonischen Formen $Harm(\Omega^r(M))$ jedoch rein lokale analytische Objekte aus der Theorie der elliptischen partiellen Differentialoperatoren. Wie beim Satz von Gauß-Bonnet liegt auch hier ein Spezialfall eines Atiyah-Singer-Indexsatzes vor.

Der de Rham Kohomologie-Vektorraum $H^r(M)$ ist definiert als (24.0.7):

$$H^r(M) := \ker(d_r) / \text{Im}(d_{r-1}) .$$

Satz 25.3.1 (Hodge) Sei ein de Rham Komplex wie in 25.2.1, 25.2.2, gegeben und seien $H^r(M)$ ein Kohomologie-Vektorraum und $Harm(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r)$ ein Vektorraum der Harmonischen Formen auf diesem Komplex, dann gilt:

$$H^r(M) \simeq Harm(\Omega^r(M)) := N(\Delta_r) = \ker(\Delta_r) . \tag{25.3.2}$$

Beweis: Wir übernehmen den allgemeineren Beweis von Schiekel (2019), Anhang: Kapitel „Pseudodifferential-Operatoren - Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung“, angepaßt auf die Bezeichnungen bei de Rham Kohomologie-Vektorräumen.

Aus der Definition von $\Delta_r = d_{r-1}d_r^\dagger + d_r^\dagger d_r$ und der obigen Hodge-Zerlegung folgt, daß $N(\Delta_r) \subseteq N(d_r)$ orthogonal zu $\text{Im}(d_{r-1})$ ist, also ist die Abbildung $\phi \mapsto [\phi]$ mit $\phi \in N(\Delta_r)$ und der Klasse $[\phi] \in H^r(M)$ injektiv. Um die Surjektivität dieser Abbildung zu zeigen wählen wir ein $\psi \in N(d_r) \subseteq C^\infty(\Omega^r(M))$. Dieses ψ ist ein Repräsentant der Klasse $[\psi] \in H^r(M)$ und wir schreiben dieses ψ in Form einer Hodge-Zerlegung

$$\psi = \psi_0 + d_{r-1}\psi_1 + d_r^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$d_r\psi = d_r\psi_0 + d_r d_{r-1}\psi_1 + d_r d_r^\dagger\psi_2 = d_r d_r^\dagger\psi_2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = \langle d_r\psi \mid \psi_2 \rangle = \langle d_r d_r^\dagger\psi_2 \mid \psi_2 \rangle = \langle d_r^\dagger\psi_2 \mid d_r^\dagger\psi_2 \rangle = \|d_r^\dagger\psi_2\|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\psi = \psi_0 + d_{r-1}\psi_1 . \quad \square$$

Also gibt es für jede Klasse $[\psi] \in H^r(\Omega(M))$ ein $\psi_0 \in N(\Delta_r)$, das auf $[\psi]$ abgebildet wird.

Aus diesem Satz von Hodge folgt nun sofort für die Euler Charakteristik (24.0.22):

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r=0}^m (-1)^r b_r(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r b^r(M) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(H^r(\Omega(M))) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^r \dim(Harm^r(\Omega(M))) . \end{aligned} \tag{25.3.3}$$

Dies ist ein sehr schönes und tiefes Ergebnis, denn auf der linken Seite haben wir mit der Euler Charakteristik ein globales topologisches Objekt und auf der rechten Seite mit den Dimensionen der Lösungsräume von $\Delta_r = 0$ ein rein lokales analytisches Objekt.

26 Einige Sätze zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In diesem Kapitel stellen wir einige Zusammenhänge zu Liegruppen und Liealgebren zusammen, die uns insb. im Zusammenhang mit den $SU(n)$ -Eichtheorien hilfreich sein werden. Natürlich können diese kurzen Bemerkungen das umfangreiche Gebiet der Lie-Gruppen und Lie-Algebren nicht einmal annähernd beschreiben. Für Physiker geeignete Einführungen finden sich z.B. in Hassani (1999), van der Waerden (1974), Hall (2003), Sattinger u. Weaver (1986) und ausführlicher in Barut u. Raczka (1986) und Bröcker u. tom Dieck (1985), auf die wir uns hier stützen. Zur mathematischen Vertiefung und für wichtige Beweise sei auf die hervorragende Monographie von Varadarajan (1984) verwiesen.

26.1 Lie-Gruppen

Die Theorie der kontinuierlichen Gruppen wurde von Sophus Lie in den Jahren 1869-1874 entwickelt. Die meisten tiefen Einsichten zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren, insbesondere zu ihrer Klassifikation, verdanken wir Élie Cartan, der beginnend mit seiner Dissertation 1894 jahrzehntelang dieses umfangreiche Gebiet erforschte.

Definition 26.1.1 *Eine reelle oder komplexe Lie-Gruppe G ist eine n -dimensionale reelle oder komplexe C^∞ -Mannigfaltigkeit mit einer C^∞ -Gruppenmultiplikation $G \times G \rightarrow G$, d.h. $\cdot : (g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2 \in G$ und einer C^∞ -Gruppeninversion $G \rightarrow G$, d.h. $^{-1} : g \rightarrow g^{-1}$.*

Keine Lie-Gruppen sind Gruppen auf Räumen, die keine endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten sind.

Die Matrix-Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ der invertierbaren, komplexen $n \times n$ Matrizen ist eine Lie-Gruppe, denn:

es ist $GL(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ und Produkt und Inversenbildung sind C^∞ -Funktionen; sei nun $A \in GL(n, \mathbb{C})$, dann ist $\det(A) \neq 0$; die Abbildung $\det : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und nach Definition ist damit das Urbild einer offenen Menge offen. Durch Komplementbildung folgt dann auch, daß das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Der Punkt $0 \in \mathbb{C}$ ist eine abgeschlossene Menge und damit ist auch $\det^{-1}(0) \subset M_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Menge und damit ist $GL(n, \mathbb{C})$ als die Komplementärmenge von $\det^{-1}(0)$ eine offene Menge und damit eine $2n^2$ -dimensionale reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die gleiche Argumentation gilt natürlich auch für $GL(n, \mathbb{R})$, die Matrix-Gruppe der reellen invertierbaren Matrizen.

Für einen Homomorphismus zwischen zwei beliebigen Gruppen, also nicht notwendigerweise Lie-Gruppen, ist natürlich der Kern des Homomorphismus von Bedeutung:

Definition 26.1.2 Sei $\Phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus zwischen den Gruppen G und H , und sei $\mathbb{1}_H$ das Einselement von H . Dann heißt $\ker(\Phi) := \{g \in G \mid \Phi(g) = \mathbb{1}_H\}$ der Kern von Φ .

Definition 26.1.3 Sei G eine Gruppe und sei $N \subseteq G$ ein Untergruppe von G . Dann heißt N ein Normalteiler von G , wenn für alle Elemente $n \in N$ gilt: $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$.

Korollar 26.1.4 Der Kern $\ker(\Phi)$ eines Homomorphismus $\Phi : G \rightarrow H$ zwischen den Gruppen G und H ist ein Normalteiler von G .

Beweis: Zunächst einmal ist $\ker(\Phi)$ eine Untergruppe von G , denn

$$\Phi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1}_G \in \ker(\Phi) ,$$

$$\Phi(g_1) = \mathbb{1}_H , \Phi(g_2) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow$$

$$g_1, g_2 \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad g_1g_2 \in \ker(\Phi) ,$$

$$\Phi(g) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow \quad \Phi(gg^{-1}) = \begin{cases} \Phi(g)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g^{-1}) , \\ \Phi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_H , \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$g \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in \ker(\Phi) .$$

Und zweitens ist $\ker(\Phi)$ auch normal, denn seien $g \in G$ und $n \in \ker(\Phi)$, dann gilt

$$\Phi(gng^{-1}) = \Phi(g)\Phi(n)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)\mathbb{1}_H\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)\Phi^{-1}(g) = \mathbb{1}_H \quad \Rightarrow$$

$$n \in \ker(\Phi) \quad \Rightarrow \quad gng^{-1} \in \ker(\Phi) . \quad \square$$

Eine Untergruppe einer Lie-Gruppe muß nicht notwendigerweise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe sein. Es gilt der folgende Satz:

Satz 26.1.6 (Élie Cartan) Ein Untergruppe H einer Lie-Gruppe G ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G , und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe, wenn H in G abgeschlossen ist.

Der Beweis dieses Satzes von Élie Cartan ist etwas anspruchsvoller und wird in vielen Büchern der mathematischen Physik übergangen. Da wir zum Beweis von Lie-Algebren Gebrauch machen, verschieben wir den Beweis in das Unterkapitel über Lie-Algebren.

Mit Hilfe dieses Satzes sieht man leicht, daß die folgenden Matrix-Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$ Lie-Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$ sind: die Matrix-Untergruppe der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$, und die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ der unitären Matrizen $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\}$:

- $SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$:
die Abbildung $\det : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und der Punkt $1 \in \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, also ist $(\det)^{-1}(1) = SL(n, \mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $SL(n, \mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$;
- $SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$:
mit der gleichen Argumentation wie $SL(n, \mathbb{C})$;
- $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ der unitären Matrizen $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = \mathbb{1}\}$:
die Abbildung $f : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$ ist stetig und der 'Punkt' $\mathbb{1} \in GL(n, \mathbb{C})$ ist abgeschlossen, also ist $f^{-1}(\mathbb{1}) = U(n, \mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $U(n, \mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$;
- $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ der reellen orthogonalen Matrizen $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = \mathbb{1}\}$: ist mit dem gleichen Argument wie $U(n)$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$;
- $SU(n) \subset SL(n, \mathbb{C})$, die Matrix-Untergruppe von $SL(n, \mathbb{C})$ der unitären Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = 1, \det A = 1\}$
die Abbildung $f : SL(n, \mathbb{C}) \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$ ist stetig und der 'Punkt' $\mathbb{1} \in SL(n, \mathbb{C})$ ist abgeschlossen, also ist $f^{-1}(\mathbb{1}) = SU(n, \mathbb{C})$ abgeschlossen, also ist nach obigem Satz $SU(n, \mathbb{C})$ eine Lie-Untergruppe von $SL(n, \mathbb{C})$;
- $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, die Matrix-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ der reellen orthogonalen Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = 1, \det A = 1\}$: ist mit dem gleichen Argument wie $SU(n)$ eine Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$.

Wie in der Analysis und Funktionalanalysis spielt auch bei Lie-Gruppen der Begriff der Kompaktheit eine wichtige Rolle.

Definition 26.1.7 Eine n -dimensionale Matrix-Lie-Gruppe G heißt kompakt, wenn gilt:

1. Wenn A_m eine Folge von Matrizen aus G ist und diese Folge gegen eine Matrix A konvergiert, dann ist auch $A \in G$.
2. Für alle $A \in G$ gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|A_{ij}| \leq C$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Da $G \subset M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$, deckt sich diese Definition mit der bekannten Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß, daß eine Menge in \mathbb{R} genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

$GL(n, \mathbb{C})$ ist nichtkompakt, da die Matrixelemente nicht beschränkt sind und weil zudem eine Folge invertierbarer Matrizen gegen eine nichtinvertierbare Matrix konvergieren kann.

$SL(n, \mathbb{C})$ ist die Matrix-Lie-Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ der Matrizen mit Einheitsdeterminante $\{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ und ist ebenfalls nichtkompakt, da die Matrixelemente nicht beschränkt sind. Zum Beispiel gilt

$$A_m := \begin{pmatrix} m & & & & \\ & \frac{1}{m} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_m = 1, |A_{m,11}| \text{ unbeschränkt.}$$

Satz 26.1.8 $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind kompakt.

Beweis: Sei $f : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ mit $f(A) = AA^\dagger$. Die Funktion f ist als ein Produkt von Matrixelementen stetig. Für $A \in U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$ gilt $AA^\dagger = \mathbb{1}$. Die Matrix $\mathbb{1} \in GL(n, \mathbb{C})$ ist ein einzelner 'Punkt' in $GL(n, \mathbb{C})$ und also eine abgeschlossene Menge und daraus folgt, daß auch $f^{-1}(\mathbb{1}) = f^{-1}(AA^\dagger) = U(n)$ abgeschlossen ist. Die n -dimensionale Matrix $\mathbb{1}$ ist auch beschränkt und daraus folgt eine Beschränkung der A_{ij} und damit eine Beschränkung von $U(n)$:

$$AA^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{kj}^* = \delta_{ik} \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} A_{ij}^* = \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 = 1.$$

Damit ist $U(n)$ kompakt.

Für $SU(n)$ betrachtet man die Abbildung $\det : U(n) \rightarrow \mathbb{C}$. Auch diese Abbildung ist wieder stetig und wie oben folgert man, daß $\det^{-1}(\mathbb{1}) = SU(n)$ eine abgeschlossene Menge ist. Da $SU(n) \subset U(n)$, ist also auch $SU(n)$ beschränkt und damit kompakt.

Für $O(n)$ und $SO(n)$ gilt das Entsprechende. □

Topologisch ist die Eigenschaft des Pfadzusammenhangs von Bedeutung:

Satz 26.1.10 $U(n)$, $SU(n)$ und $SO(n)$ sind pfadzusammenhängend.

Beweis: Die abelsche Matrix-Lie-Gruppe

$$T^n := \text{diag}[e^{i\varphi^1}, \dots, e^{i\varphi^n}] \quad \text{ist homöomorph zu} \quad [S^1, \dots, S^1] \quad (26.1.1)$$

und wird deshalb auch n -Torus genannt. Jeder Kreis S^1 ist (pfad-) zusammenhängend, denn jeder Punkt φ kann von der Identität $\varphi_0 = 0$ mittels einer stetigen Kurve $\varphi(t) := (1-t)\varphi$ mit $0 \leq t \leq 1$ erreicht werden. Also ist auch T^n zusammenhängend. Jede unitäre Matrix $A \in U(n)$ kann mittels einer unitären Matrix H diagonalisiert werden, also:

$$A_d = HAH^{-1} \quad \text{mit} \quad A_d \in T^n \quad \Rightarrow \quad A = H^{-1}A_dH .$$

Das heißt, A entsteht aus der zusammenhängenden Matrix A_d durch einen Diffeomorphismus, nämlich durch Linkstranslation mit H^{-1} und Rechtstranslation mit H , und damit ist also auch A zusammenhängend. \square

Definition 26.1.12 *Eine 1-Parameter Untergruppe einer Lie-Gruppe G ist ein differenzierbarer Homomorphismus der additiven Gruppe der reellen Zahlen in G :*

$$A : \mathbb{R} \rightarrow G \quad \text{mit} \quad t \mapsto A(t) \in G . \quad (26.1.2)$$

Aus der Homomorphismus-Eigenschaft einer 1-Parameter Untergruppe folgt

$$A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2) , \quad (26.1.3)$$

$$A(0) = e , \quad A(t)^{-1} = A(-t) . \quad (26.1.4)$$

Dies gibt Anlaß zur Definition der Abbildung

$$\exp : \mathfrak{g} := \left\{ \frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} \right\} \rightarrow G ,$$

deren Diskussion wir aber bis zur Diskussion der Lie-Algebren einer Lie-Gruppe in 26.3 verschieben.

26.2 Integration über Lie-Gruppen

Wir folgen hier Hassani (1999), S. 832 ff. und Sattinger u. Weaver (1986), S. 89 ff. Lie-Gruppen sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Daher stellt sich die Frage, ob man und wie man über Lie-Gruppen integrieren kann, um interessante Invarianten dieser Gruppen zu erhalten. Der Schlüssel für eine Integration ist eine Maßfunktion, in der Analysis in einem euklidischen Raum üblicherweise das Lebesgue-Maß. Der euklidische Raum ist lokalkompakt und das Lebesgue-Maß darauf ist translationsinvariant. Die Verallgemeinerung für lokalkompakte Lie-Gruppen ist das Haar-Maß, ein links- (oder

rechts-) invariantes Borelmaß ω , so daß in der Lie-Gruppe G für jede Borelmenge $B \in G$ und $g, h \in G$ gilt:

$$L_h : G \rightarrow G \quad \text{mit} \quad L_h g := hg . \quad (26.2.1)$$

$$L_h^* \omega(B) = \omega(L_h B) = \omega(h \cdot B) \stackrel{!}{=} \omega(B) \quad \Leftrightarrow \quad (26.2.2)$$

$$\int_G f(hg) \omega \stackrel{!}{=} \int_G f(g) \omega , \quad \text{Hurwitz-Integral} . \quad (26.2.3)$$

Wir betrachten den Fall einer Matrix-Lie-Gruppe G . Seien $\{x^j\}$ ein lokales Koordinatensystem in $U \subset G$ und $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ die n -Form an der Stelle (x^1, \dots, x^n) und seien $A(x^1, \dots, x^n) \in U \subset G$ und $A(y^1, \dots, y^n) := L_h A(x^1, \dots, x^n)$, dann gilt

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = L_h^* \omega = L_h^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n .$$

Wenn $\{x^j\}$ die Koordinaten der Identität $e \in G$ bezeichnen, dann sind die $\{y^i\}$ gerade die Koordinaten von $L_h e = h$. Das linksinvariante Haar-Maß an der Stelle $h \in G$ mit den Koordinaten $\{y^i\}$ ist also

$$\omega_L(h) = \det^{-1}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_e\right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n . \quad (26.2.4)$$

Ein beliebtes Standard-Beispiel ist die folgende Matrix-Lie-Gruppe (mit $e = \mathbb{1}$):

$$A(x^1, x^2) := \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x^1, x^2 \in \mathbb{R} .$$

$$A(y^1, y^2) = L_h A(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} h^1 & h^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^1 x^1 & (h^1 x^2 + h^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$y^1 = h^1 x^1 , \quad y^2 = h^1 x^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad y^1|_{\mathbb{1}} = h^1 , \quad y^2|_{\mathbb{1}} = h^2$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} h^1 & 0 \\ 0 & h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 & 0 \\ 0 & y^1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_{\mathbb{1}}\right) = (y^1)^2 .$$

Daraus folgt das linksinvariante Haar-Maß

$$\omega_L(h) = \frac{1}{(y^1)^2} dy^1 \wedge dy^2 .$$

Eine andere Möglichkeit, um das links- (oder rechts-) invariante Haar-Maß zu berechnen ist es, die links- (oder rechts-) invariante n -Form ω aus n links- (oder rechts-) invarianten 1-Formen zusammensetzen:

Lemma 26.2.1 Sei $A \in U \subset G$, mit einem lokalen Koordinatensystem $\{x^i\}$ in U , dann sind

$$A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i A^{-1} \quad (26.2.5)$$

Matrizen von n linear unabhängigen links-, bzw. rechts-invarianten 1-Formen.

Beweis: Die Linksmultiplikation mit einer festen Matrix L_h induziert eine Koordinatentransformation in A . Dabei möge die Norm von L_h so klein sein, daß auch $L_h A \in U \subset G$ gelte.

$$\begin{aligned} L_h A(x^1, \dots, x^n) &= A(y^1, \dots, y^n) \quad \Rightarrow \\ A^{-1}(y^1, \dots, y^n) \frac{\partial A(y^1, \dots, y^n)}{\partial y^j} dy^j &= A^{-1}(x^1, \dots, x^n) L_h^{-1} \frac{\partial (L_h A(x^1, \dots, x^n))}{\partial y^j} dy^j \\ &= A^{-1}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial A(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \\ &= A^{-1}(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial A(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i} dx^i. \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der 1-Formen folgt die lineare Unabhängigkeit der Matrizen $\frac{\partial A}{\partial x^i}$ und diese sind ja Tangentialvektoren an die Gruppe G in der Umgebung U . \square

Wir betrachten wieder das obige Beispiel:

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{x^1} & \frac{dx^2}{x^1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für das linksinvariante Haarmaß

$$\omega_L = \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2.$$

Für diese Beispiel-Liegruppe stimmt das linksinvariante Haarmaß nicht mit dem rechtsinvarianten Haarmaß überein, denn

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i A^{-1} = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x^1} & -\frac{x^2}{x^1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{x^1} & (-\frac{x^2 dx^1}{x^1} + dx^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für das rechtsinvariante Haarmaß

$$\omega_R = \frac{dx^1}{x^1} \wedge \left(-\frac{x^2 dx^1}{x^1} + dx^2 \right) = \frac{1}{x^1} dx^1 \wedge dx^2.$$

Satz 26.2.3 *In einer kompakten zusammenhängenden Lie-Gruppe gibt es ein bi-invariantes Haar-Maß. Dieses ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.*

Beweis: Seien $g, h, k \in G$ und $L_h : G \rightarrow G$ mit $L_h g := hg$, und $R_k : G \rightarrow G$ mit $R_k g := gk$, und $B \subset G$ eine Borelmenge. Sei ω_L ein linksinvariantes Haar-Maß, dann folgt, daß auch $R_k^* \omega_L$ linksinvariant ist, denn

$$R_k^* \omega_L(B) = R_k^* L_h^* \omega_L(B) = L_h^* R_k^* \omega_L(B),$$

da L_h^* und R_k^* kommutieren. Das linksinvariante Haar-Maß ist als n -Form in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit eindeutig bis auf eine Konstante, also folgt $R_k^* \omega_L = c \cdot \omega_L$. Da G kompakt ist existiert das Hurwitz-Integral und es ist

$$\int_G R_k^* \omega_L = c \cdot \int_G \omega_L.$$

Da R_k^* nur eine Variablentransformation bewirkt ist also $c = 1$ und daraus folgt

$$R_k^* \omega_L = \omega_L \quad \Rightarrow \quad \omega_L \text{ ist auch rechtsinvariant, d.h. } \omega_L = \omega_R. \quad \square$$

26.3 Lie-Algebren

Die axiomatische Definition einer Lie-Algebra ist die sehr allgemeine folgende algebraische Definition.

Definition 26.3.1 *Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Vektorraum über einem Feld \mathbb{F} , hier immer \mathbb{R} oder \mathbb{C} , mit einem Produkt, genannt Lie-Klammer, mit den Eigenschaften:*

- $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{g} ;$
- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad \text{für } a, b \in \mathbb{F}, X, Y, Z \in \mathfrak{g} ;$
- $[X, Y] = -[Y, X] ;$
- $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}).$

Hierbei gilt es zu beachten, daß man von einer reellen/komplexen Lie-Algebra spricht, wenn das Feld \mathbb{F} des Vektorraums gleich \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} ist, unabhängig von der Frage, ob die Matrizen von \mathfrak{g} evtl. komplexe Elemente enthalten oder nicht!

Der Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren ist aus geometrischer Sicht einfach: Lie-Gruppen sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, also existiert der Tangentialraum der Lie-Gruppe an der Stelle der Identität $T_e G$, und da die Tangentialvektoren wegen 15.2.6 und 15.2.8 die Axiome einer Lie-Algebra erfüllen, definiert man als die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

$$\mathfrak{g} := T_e G. \quad (26.3.1)$$

Seien $g, h \in G$, und $e \in G$ die Einheit in G , dann definiert man auf G eine Linkstranslation von h durch

$$L_g h := gh \quad \Leftrightarrow \quad L_g e := ge = g. \quad (26.3.2)$$

Sei nun $X_e \in \mathfrak{g}$, dann wird durch L_{g*} angewandt auf X_e ein Vektorfeld auf G definiert:

$$X_g := L_{g*} X_e. \quad (26.3.3)$$

Lemma 26.3.2 *Jede Lie-Gruppe ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Für das Vektorfeld $X_g = L_{g*} X_e$ gilt nun $X_g \neq 0$ auf ganz G , denn $X_g = 0$ an einer Stelle $g \in G$ würde zu $X_g = 0$ auf ganz G führen. Sei $\{X_1, \dots, X_n\}$ eine Basis von \mathfrak{g} , dann haben alle Basisvektoren X_i keine Nullstelle und das bedeutet: jede Lie-Gruppe ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit. \square

Jedes Vektorfeld, das die Bedingung

$$L_{g*} X_h = X_{gh} \quad \text{bzw.} \quad R_{g*} X_h = X_{hg}$$

erfüllt, nennt man ein links-, bzw. ein rechts-invariantes Vektorfeld.

Für die Charakterisierung von Lie-Algebren ist der folgende nichttriviale Satz von Ado aus dem Jahr 1947 ganz grundlegend und wichtig!

Satz 26.3.4 (Ado) *Jede endlichdimensionale reelle, bzw. komplexe Lie-Algebra ist isomorph zu $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, bzw. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig und findet sich z.B. in Varadarajan (1984), S. 237.

Den Zusammenhang zwischen Lie-Gruppen und ihren Lie-Algebren kann man auch mittels der sog. Exponential-Abbildung herstellen.

Satz 26.3.5 *In einer Umgebung U von $e \in U \subset G$ gibt es eine 1-Parameter-Untergruppe $A(t)$ mit $A(0) := e$ und $\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$.*

Beweis: Sei jetzt G eine Matrix-Lie-Gruppe, dann kann man eine 1-Parameter-Untergruppe $A(t + t_2) = A(t)A(t_2)$ an der Stelle $t_2 = 0$ nach t_2 differenzieren und erhält

$$\frac{d}{dt_2} A(t + t_2)|_{t_2=0} = \frac{d}{d(t + t_2)} A(t + t_2) \cdot \left(\frac{d(t + t_2)}{dt_2} \right) |_{t_2=0} = \frac{d}{dt} A(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} A(t) = A(t) \cdot \frac{d}{dt_2} A(t_2)|_{t_2=0} = A(t) \cdot A'(0). \quad (26.3.4)$$

Da $A'(0)$ konstant ist folgt in einer Umgebung um $t = 0$ als Lösung dieser Differentialgleichung

$$A(t) = A(0) \cdot \exp(tA'(0)) = \exp(tA'(0)) , \quad (26.3.5)$$

mit

$$\exp(X) := \mathbb{1} + X + \frac{1}{2!}X^2 + \dots . \quad (26.3.6)$$

Diese Summe konvergiert, denn:

sei $\|X\|$ eine Norm, z.B. die Hilbert-Schmidt Norm

$$\|X\| := \left(\sum_{i,k=1}^n |X_{ik}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

dann gilt $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ und $\|XY\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ und aus $\|X\| < \infty$ folgt

$$\|\exp(X)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = \exp(\|X\|) < \infty .$$

Die obige Vorgehensweise kann man nun für den Fall von Nichtmatrix-Lie-Gruppen verallgemeinern. Die Gleichung 26.3.4 kann man als eine Linkstranslation ansehen:

$$A(t) = L_{A(t)}A(0) \quad \Rightarrow \quad A'(t) = L_{A(t)*}A'(0) , \quad (26.3.7)$$

d.h. die 1-Parameter-Gruppe $A(t)$ ist die Integralkurve des Vektorfeldes $X(t) := A'(t)$ mit $X := X(0) = A'(0)$ und dies schreibt man dann wie im Fall einer Matrix-Lie-Gruppe als

$$A(t) := \exp(tX) \quad \text{mit} \quad X = \frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} , \quad (26.3.8)$$

und wenn $X(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ analytisch ist gilt

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathbb{1} + \left(\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} \right) t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2}{dt^2}A(t)|_{t=0} \right) t^2 + \dots \\ &= \mathbb{1} + X t + O(t^2) . \end{aligned} \quad (26.3.9)$$

Da jedes $X \in \mathfrak{g}$ nach dem Satz von Ado isomorph zu einer endlichdimensionalen Matrix ist, existiert die Hilbert-Schmidt-Norm $\|X\| < \infty$ und wie oben folgt $\|\exp(X)\| = \exp(\|X\|) < \infty$. \square

Definition 26.3.7 Sei $A(t)$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G mit $A(0) := e$ und $\frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} = X \in \mathfrak{g}$, dann heißt die Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ mit $\exp(X) = A(1)$ die Exponentialabbildung von einer Lie-Algebra in die zugehörige Lie-Gruppe.

Diese Exponentialabbildung ist in einer Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ ein Diffeomorphismus. Das kann man direkt aus der obigen Konstruktion entnehmen, aber auch folgendermaßen sehen: $\mathfrak{g} = T_e G$ und der Tangentialraum an einen Tangentialraum ist wieder der gleiche Tangentialraum, also $T_0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Damit gilt für die Tangential-Abbildung (d.h. das Differential)

$$\exp_*|_0 : T_0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \rightarrow T_e G = \mathfrak{g}, \quad \exp_*(X)|_0 = X.$$

Also ist \exp_* an der Stelle $0 \in \mathfrak{g}$ die Identität und \exp nach dem Satz über inverse Funktionen in der Umgebung V von 0 ein Diffeomorphismus. Die Umkehrfunktion zu \exp heißt \log , d.h. $\log := \exp^{-1} : U \subset G \rightarrow V \subset \mathfrak{g}$.

Achtung: Aus der Darstellung einer 1-Parameter-Untergruppe $A(t) \subset G$ als Exponentialfunktion $A(t) = \exp(tX)$ mit $X = \frac{d}{dt}A(t)|_{t=0} \in \mathfrak{g}$ folgt nicht, daß für alle $A \in G$ gilt: $A = \exp(X)$ mit einem $X \in \mathfrak{g}$, sondern dies trifft eben nur zu für diejenigen A in einer kleinen Umgebung U um $e \in G$. Wenn aber G zusammenhängend ist, dann gibt es für $A \in G$ die folgende Darstellung:

Korollar 26.3.8 Sei G eine pfadzusammenhängende Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} , dann läßt sich jedes $A \in G$ darstellen als

$$A = e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_n}, \quad (26.3.10)$$

mit endlich vielen $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$.

Beweis: Da G zusammenhängend ist gibt es in G einen Pfad von $\tilde{A}(0) = e$ hin zu $\tilde{A}(1) = A$. Das Intervall $[0, 1] \in \mathbb{R}$ ist kompakt und $A(t)$ ist stetig, also gibt es eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, so daß alle $\tilde{A}(t_{k-1})^{-1} \tilde{A}(t_k)$ in einer Umgebung von e liegen, in der eine Exponentialdarstellung mittels eines Elements $X_k \in \mathfrak{g}$ gegeben ist, d.h. $\tilde{A}(t_{k-1})^{-1} \tilde{A}(t_k) = \exp(X_k)$.

$$\begin{aligned} A &= \tilde{A}(1) = e \cdot \tilde{A}(1) = \tilde{A}(t_0)^{-1} \cdot \tilde{A}(t_n) \\ &= (\tilde{A}(t_0)^{-1} \tilde{A}(t_1)) \cdot (\tilde{A}(t_1)^{-1} \tilde{A}(t_2)) \cdot \dots \cdot (\tilde{A}(t_{n-1})^{-1} \tilde{A}(t_n)) \\ &= e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_n}. \end{aligned} \quad \square$$

Hilfreich ist auch immer wieder die folgende Lie-Produktformel.

Korollar 26.3.10

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{m}X} e^{\frac{1}{m}Y})^m = e^{X+Y}. \quad (26.3.11)$$

Beweis: In einer ϵ -Umgebung um $t = 0$ gilt

$$\frac{d}{dt}(e^{Xt} e^{Yt}) = Xt + Yt + O(t^2) = \frac{d}{dt}(e^{(X+Y)t}),$$

und damit gilt in einer $m \cdot \epsilon$ -Umgebung um $t = 0$

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{m}Xt} e^{\frac{1}{m}Yt}) = \frac{1}{m}Xt + \frac{1}{m}Yt + O\left(\frac{t^2}{m^2}\right) = \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{m}(X+Y)t + O(\frac{t^2}{m^2})}).$$

Wenn m groß genug ist, d.h. für $m \rightarrow \infty$, gilt diese Beziehung also auch für $t = 1$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{m}X} e^{\frac{1}{m}Y}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{m}(X+Y) + O(\frac{1}{m^2})}) \Rightarrow \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{m}X} e^{\frac{1}{m}Y})^m &= \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{(X+Y) + O(\frac{1}{m})}) = e^{X+Y}. \quad \square \end{aligned}$$

Sei die Menge der $\{T_\alpha\}$ eine Basis von \mathfrak{g} , dann sind die Strukturkonstanten von \mathfrak{g} bzgl. dieser Basis definiert als

$$[T_\alpha, T_\beta] =: f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma. \quad (26.3.12)$$

Aus den Definitionsgleichungen für die Lie-Algebra \mathfrak{g} folgen sofort die beiden Gleichungen für die Strukturkonstanten von \mathfrak{g} :

$$f_{\alpha\beta}{}^\gamma = -f_{\beta\alpha}{}^\gamma. \quad (\text{Schiefsymmetrie}). \quad (26.3.13)$$

$$f_{\alpha\nu}{}^\mu f_{\beta\gamma}{}^\nu + f_{\gamma\nu}{}^\mu f_{\alpha\beta}{}^\nu + f_{\beta\nu}{}^\mu f_{\gamma\alpha}{}^\nu = 0. \quad (\text{Jacobi-Identität}). \quad (26.3.14)$$

Wir hatten im Abschnitt über Lie-Gruppen den folgende wichtigen Satz von Élie Cartan über Untergruppen einer Lie-Gruppe zitiert, den wir hier beweisen wollen. Wir folgen Bröcker u. tom Dieck (1985), S. 28 ff.

Satz 26.3.12 (Élie Cartan) *Ein Untergruppe H einer Lie-Gruppe G ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit von G , und damit ebenfalls eine Lie-Gruppe, wenn H in G abgeschlossen ist.*

Beweis: Sei also die Untergruppe H von G eine Untermannigfaltigkeit von G , dann ist H lokal abgeschlossen in G , d.h. zu jedem Punkt von H gibt es eine Umgebung $U \subset G$, deren Abschluß in G liegt. Also kann U als abgeschlossen in G , d.h. $U = \bar{U}$, angenommen werden. Damit gibt es eine abgeschlossene Umgebung U um das $\mathbb{1}$ -Element von G , so daß auch $H \cap U$ in U abgeschlossen ist, also ist $H \cap U = \overline{H \cap U} = \bar{H} \cap U$. Sei jetzt $y \in \bar{H}$ und $u \in U$, dann verschieben wir y in einen Punkt $x \in H$ mittels: $x := yu^{-1} \in yU^{-1} \cap H$. Es folgt

$$y \in \bar{H} \cap xU \Rightarrow x^{-1}y \in \bar{H} \cap U = H \cap U \Rightarrow y \in H \cap U.$$

Damit gilt für den Randpunkt $y \in \bar{H}$ auch $y \in H$ und also ist H abgeschlossen.

Jetzt soll die umgekehrte Richtung gezeigt werden: sei also H eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe. Es genügt zu zeigen, daß $H \cap U$ mit einer Umgebung $U \subset G$ eine Untermannigfaltigkeit von G ist, denn diese Umgebung U kann ja mit der Gruppenmultiplikation über ganz H verschoben werden und in jedem U_x mit $x \in H$ läßt sich eine Karte, d.h. ein Koordinatensystem definieren, welches differenzierbar mit den Koordinaten der Nachbarkarten zusammenhängt. Wir wählen wieder eine Umgebung U um das $\mathbb{1}$ -Element von G . Um jetzt ein lokales Koordinatensystem einer Untermannigfaltigkeit in $H \cap U$ zu konstruieren, versucht man zuerst eine Unter-Lie-Algebra \mathfrak{h}_U von $H \cap U$ in der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G zu konstruieren. Wenn das gelingt, kann man \mathfrak{h}_U exponentieren und hat das gesuchte lokale Koordinatensystem der Untermannigfaltigkeit $H \cap U$.

1. Sei $H' := \log(H \cap U)$, dann liegt H' in der Lie-Algebra \mathfrak{g} der Lie-Gruppe G . Wir statten \mathfrak{g} mit einer euklidischen Metrik aus. Sei $h_n \in H'$ eine Folge, die gegen $\hat{0}$ in H' konvergiere, so daß $h_n/|h_n| \rightarrow X \in \mathfrak{g}$. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $\exp(tX) \in H$, denn:

$$|h_n| \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t \frac{h_n}{|h_n|} \rightarrow tX.$$

Da $|h_n| \rightarrow 0$, gibt es eine Folge $m_n \in \mathbb{Z}$, so daß $m_n|h_n| \rightarrow t$, und damit

$$\exp(m_n h_n) = \exp(m_n |h_n| \frac{h_n}{|h_n|}) \rightarrow \exp(tX).$$

$$\exp(m_n h_n) = (\exp(h_n))^{m_n} \in H \quad \text{und } H \text{ ist abgeschlossen} \quad \Rightarrow \quad \exp(tX) \in H.$$

2. Die Menge $W := \{cX \mid X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{|h_n|}, h_n \in H', c \in \mathbb{R}\}$ ist ein linearer Unterraum von \mathfrak{g} , denn:

$$X, Y \in W \quad \Rightarrow \quad \exp(tX) \in H, \exp(tY) \in H \quad \Rightarrow \quad \exp(tX) \exp(tY) \in H \quad \Rightarrow$$

$$\exp(tX) \exp(tY) \in H \cap U \quad \text{für } t \rightarrow 0, t > 0, \quad \Rightarrow$$

$$h(t) := \log(\exp(tX) \exp(tY)) \in H' \quad \text{für } t \rightarrow 0, t > 0, \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{h(t)}{t} = (X + Y) \in H' \quad \text{und} \quad \frac{h(t)}{|h(t)|} \in W \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{h(t)}{|h(t)|} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{h(t)}{t} \frac{t}{|h(t)|} = \frac{X + Y}{|X + Y|} \in W \subseteq H' \subseteq \mathfrak{g}.$$

3. Also hat W eigentlich fast alle Eigenschaften, die man für die Unter-Lie-Algebra \mathfrak{h} verlangt. Offen ist nur noch die Frage, ob womöglich auch Elemente aus $\mathfrak{g} \setminus W$ durch die

Exponentialfunktion nach H abgebildet werden? Sei $D \in \mathfrak{g}$ das orthogonale Komplement zu W , also $\mathfrak{g} = W \oplus D$. Dann ist D als ein endlicher Vektorraum abgeschlossen. Wir erklären die Abbildung

$$\exp_2 : W \oplus D, \quad (X, Y) \mapsto \exp(X) \exp(Y),$$

die in einer Umgebung des Ursprungs invertierbar ist. Wir wählen eine Folge

$$(X_n, Y_n) \in W \oplus D \quad \text{mit} \quad X_n, Y_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, Y_n) = 0, \quad \exp(X_n) \exp(Y_n) \in H.$$

Da D abgeschlossen ist gibt es eine Folge $\frac{Y_n}{|Y_n|} \rightarrow Y \in D$. Nun liegt $\exp(X_n) \in H$ und H ist eine Untergruppe, also liegt auch $\exp(Y_n) \in H$ und damit liegen $Y_n \in H'$ und $Y \in W$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $Y \in D$ und also gibt es keine Elemente, die unter der Exponentialabbildung von D auf H abgebildet werden. Damit kann W tatsächlich mit der Unter-Lie-Algebra \mathfrak{h} der Unter-Gruppe H identifiziert werden, und damit hat H in der Umgebung von $\mathbb{1}$ das lokale Koordinatensystem von $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ und ist also eine Untermannigfaltigkeit von G . \square

Hilfreich im Zusammenhang endlichdimensionaler Matrix-Lie-Gruppen und ihrer Algebren ist auch das folgende Lemma für Determinanten.

Lemma 26.3.14

$$\det(\mathbb{1} + t\hat{A}) = 1 + t \cdot \text{tr}(\hat{A}) \quad \text{für} \quad t \ll 1. \quad (26.3.15)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + t\hat{A}) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} (\mathbb{1} + t\hat{A})_{1i_1} \cdots (\mathbb{1} + t\hat{A})_{ni_n} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} (\delta_{1i_1} + t\hat{A}_{1i_1}) \cdots (\delta_{ni_n} + t\hat{A}_{ni_n}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} \delta_{1i_1} \cdots \delta_{ni_n} \\ &\quad + t \sum_{k=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} (\delta_{1i_1} \cdots \delta_{k-1, i_{k-1}} \delta_{k+1, i_{k+1}} \cdots \delta_{ni_n}) \hat{A}_{ki_k} + O(t^2) \\ &= 1 + t \sum_{k=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon_{1, \dots, k-1, i_k, k+1, \dots, n} \hat{A}_{ki_k} + O(t^2) \\ &= 1 + t \sum_{k=1}^n \epsilon_{1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n} \hat{A}_{kk} + O(t^2) \\ &= 1 + t \text{tr}(\hat{A}) + O(t^2). \end{aligned} \quad \square$$

Zunächst seien hier kurz einige Eigenschaften der $SU(n)$ -Matrix-Lie-Gruppe, bzw. der $\mathfrak{su}(n)$ Matrix-Lie-Algebra, zusammengetragen. Sei $GL(n, \mathbb{C})$ die Lie-Gruppe der n -dimensionalen, invertierbaren Matrizen über \mathbb{C} . Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ eine Kurve in $GL(n, \mathbb{C})$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2), \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Daraus folgt $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$.

Sei $SL(n, \mathbb{C})$ die Untergruppe der n -dimensionalen Matrizen aus $GL(n, \mathbb{C})$ mit Determinante 1. Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ eine Kurve in $SL(n, \mathbb{C})$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2), \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow$$

$$\det(\hat{c}(t)) = \det(\mathbb{1} + t\hat{A}) = 1 + t \operatorname{tr}(\hat{A}) + O(t^2) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{tr}(\hat{A}) = 0.$$

Also besteht $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ aus den spurfreien n -dimensionalen Matrizen von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und es gilt $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.

Sei $U(n)$ die Untergruppe der n -dimensionalen unitären Matrizen aus $GL(n, \mathbb{C})$. Sei $\hat{c} : \mathbb{R} \rightarrow U(n)$ eine Kurve in $U(n)$ mit $\hat{c}(0) = \mathbb{1}$. In der Umgebung von $t = 0$ hat dann $\hat{c}(t)$ die Gestalt

$$\hat{c}(t) = \mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2), \quad \text{mit } \hat{A} \in \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow$$

$$\hat{c}(t)\hat{c}^\dagger(t) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \quad \Rightarrow$$

$$[\mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2)][\mathbb{1} + t\hat{A} + \hat{O}(t^2)]^\dagger = \mathbb{1} \quad \Rightarrow$$

$$t(\hat{A} + \hat{A}^\dagger) = 0 + \hat{O}(t^2) \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = -\hat{A}^\dagger + \hat{O}(t).$$

Also besteht $\mathfrak{u}(n)$ aus den schiefsymmetrisch-hermiteschen n -dimensionalen Matrizen von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und es gilt $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$.

Die Lie-Gruppe $SU(n)$ ist die Untergruppe der n -dimensionalen unitären Matrizen mit Determinante 1 aus $GL(n, \mathbb{C})$, also $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.

Damit ist $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ mit $\dim \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) = n^2 - 1$.

Achtung: wir folgen hier der Schreibweise, daß $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{su}(n)$ immer die reellen Lie-Algebren bezeichnen möge, und $\mathfrak{u}(n)_\mathbb{C}$ und $\mathfrak{su}(n)_\mathbb{C}$ die komplexifizierten Lie-Algebren.

Unter der Komplexifizierung einer reellen Lie-Algebra \mathfrak{g} versteht man den Übergang von dem reellen Vektorraum V , über dem \mathfrak{g} definiert ist, zu einem komplexen Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$. Dies ist eindeutig möglich, denn für die Lie-Klammer gilt mit $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [i(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] &= [(iX_1 - X_2), (Y_1 + iY_2)] \\ &= -[X_2, Y_1] - [X_1, Y_2] + i([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) , \\ i[(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] &= i\{[(X_1, Y_1] - [(X_2, Y_2] + i([(X_2, Y_1] + [(X_1, Y_2)])\} \\ &= -[(X_2, Y_1] - [(X_1, Y_2] + i([(X_1, Y_1] - [(X_2, Y_2]) . \end{aligned}$$

Also ist

$$[i(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] = i[(X_1 + iX_2), (Y_1 + iY_2)] . \quad (26.3.16)$$

Auch die Jacobi-Identität bleibt bei einer Komplexifizierung gültig, denn sei etwa $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $Y, Z \in \mathfrak{g}$, dann ist die Jacobi-Identität komplex linear in X . Im nächsten Schritt erweitert man die Jacobi-Identität auf $Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ und dann auf $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Beispiel: Zum Beispiel ist $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, weil die schiefsymmetrisch hermiteschen Matrizen von $\mathfrak{u}(n)$ nach der Komplexifizierung eben nicht mehr schiefsymmetrisch hermitesch sind. Weiter gilt $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ und daraus folgt dann

$$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) . \quad (26.3.17)$$

□

Élie Cartan führte die folgenden adjungierten Abbildungen Ad_A und ad_X auf einer Lie-Algebra ein.

Definition 26.3.17 Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann kann man für jedes $A \in G$ und jedes $Y \in \mathfrak{g}$ die folgende lineare Adjungierte Abbildung $Ad_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definieren:

$$Ad_A(Y) := AYA^{-1} . \quad (26.3.18)$$

Damit ist Ad eine Abbildung von G in die Menge der linearen invertierbaren Abbildungen von \mathfrak{g} , also $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$. Die Untergruppe $Ad(G) \subset GL(\mathfrak{g})$ heißt die adjungierte Gruppe, oder die adjungierte Darstellung von G .

Jetzt kann man das Differential von Ad an der Stelle der Identität $e \in G$ mit $Ad_A e = e$ betrachten. Diese lineare Abbildung Ad_* bildet den Tangentialraum $T_e(G) = \mathfrak{g}$ in den Tangentialraum $T_{Ad_A e} G = T_e G = \mathfrak{g}$ ab, also $Ad_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ und wird häufig auch als $ad := Ad_*$ bezeichnet.

Wenn man jetzt für ein festes $X \in \mathfrak{g}$ die Einparameteruntergruppe $A(t) = e^{tX} \in G$ betrachtet, so erhält man für $Y \in \mathfrak{g}$

$$Ad_{A(t)}(Y) = e^{tX} Y e^{-tX} \quad \text{und}$$

$$ad_X(Y) = Ad_{*X}(Y) = \frac{d}{dt} Ad_{A(t)}(Y)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})|_{t=0} = [X, Y].$$

In Komponenten bzgl. einer Basis der Lie-Algebra bedeutet dies

$$(ad_X(Y))^\alpha = [X, Y]^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta Y^\gamma \quad \text{bzw.} \quad (ad_X)_\gamma^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta.$$

Die Abbildung ad erfüllt die Eigenschaften einer Derivations-Algebra, d.h. einer verallgemeinerten Leibnizregel, denn wegen der Jacobi-Identität in der Definition von \mathfrak{g} gilt:

$$\begin{aligned} ad_{[X,Y]}(Z) &= [[X, Y], Z] = [Y, [Z, X]] + [X, [Y, Z]] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= ad_X \cdot ad_Y(Z) - ad_Y \cdot ad_X(Z) = [ad_X, ad_Y](Z) \quad \Rightarrow \\ &ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]. \end{aligned} \tag{26.3.19}$$

Die parametrisierte Abbildung $Ad_{A(t)}$ kann man wie jede 1-Parametergruppe in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Exponentialfunktion $e^{tZ} := Ad_{A(t)}$ schreiben und dann ist

$$\begin{aligned} Z &= \frac{d}{dt}(e^{tZ})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(Ad_{A(t)})|_{t=0} = ad_X \quad \Rightarrow \\ &Ad_{e^{tX}} = e^{t ad_X}. \end{aligned} \tag{26.3.20}$$

Damit kann man dann schreiben

$$\begin{aligned} Ad_{e^{tX}} Y &= (1 + t ad_X + \frac{t^2}{2} ad_X \cdot ad_X + \dots) Y \\ &= Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2} [X, [X, Y]] + \dots \end{aligned}$$

26.4 Der Satz von Baker-Campbell-Hausdorff

Es zeigt sich, daß für Elemente X, Y der Lie-Algebra \mathfrak{g} in einer Umgebung von 0, für welche die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus darstellt, sich das Ergebnis von $\exp(X) \cdot \exp(Y)$ als ein $\exp(Z)$ darstellen läßt, allerdings gilt $Z = X + Y$ nur bei kommutierenden X, Y . Falls $[X, Y] \neq 0$ ist, läßt sich Z als eine komplizierte Potenzreihe in X und Y schreiben - die nichttriviale Essenz des Baker-Campbell-Hausdorff Satzes ist nun, daß diese Potenzreihe ab dem zweiten Glied nur Kommutatoren von X und Y enthält. Wir folgen hier weitgehend Hall (2003), S. 70 ff. Hall behandelt in seiner schönen Einführung zwar nur Matrix Lie-Gruppen, aber in Bezug auf Lie-Algebren können wir uns ja auf den fundamentalen Satz von Ado stützen, demzufolge alle Lie-Algebren isomorph zu Matrizen aus $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ oder $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ sind.

Zum Beweis des BCH-Satzes ist der folgende Satz über die Ableitung der Exponentialabbildung hilfreich.

Satz 26.4.1 Sei $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$, dann gilt mit $\dot{Z}(t) := \frac{dZ(t)}{dt}$ für die Ableitung von $e^{Z(t)}$:

$$\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = e^{Z(t)} f(ad_{Z(t)}) \frac{dZ(t)}{dt} \quad \text{mit } f(u) := \frac{1 - e^{-u}}{u}, \quad (26.4.1)$$

$$\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = e^{Z(t)} \left(\dot{Z}(t) - \frac{1}{2!}[Z(t), \dot{Z}(t)] + \frac{1}{3!}[Z(t), [Z(t), \dot{Z}(t)]] - \dots \right). \quad (26.4.2)$$

Beweis: Sei $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ eine analytische Funktion auf \mathfrak{g} und $Z(t)$ ein Operator in einem normierten Raum, dann ist per Definition $\frac{d}{dt}f(Z(t))|_{t=t_0}$ die Richtungsableitung (Fréchet-Ableitung) von f an der Stelle $t = t_0$ in Richtung $\dot{Z}(t_0) := \frac{dZ(t)}{dt}|_{t=t_0}$, d.h.

$$\frac{d}{dt}f(Z(t))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}f(Z(t_0) + t\dot{Z}(t_0)),$$

wobei dieser Ausdruck linear in $\dot{Z}(t_0)$ ist. Also genügt es, die Behauptung des Satzes für $Z(t) := Z(0) + t\dot{Z}(0) := X + tY$ an der Stelle $t = 0$ zu beweisen, d.h. wir wollen zeigen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} &= e^X f(ad_X)Y \quad \text{mit } f(u) := \frac{1 - e^{-u}}{u}, \\ \frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} &= e^X \left(Y - \frac{1}{2!}[X, Y] + \frac{1}{3!}[X, [X, Y]] - \dots \right). \end{aligned}$$

Zunächst einmal gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$e^{X+tY} = \left\{ \exp\left(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m}\right) \right\}^m.$$

Jetzt wenden wir beim Differenzieren auf der rechten Seite die Produktregel an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{X+tY}|_{t=0} &= \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^{m-k-1} \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m}\right) \right\}_{t=0} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^k \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^{-k} \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + t\frac{Y}{m}\right) \right\}_{t=0} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^k \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^{-k} \left\{ \frac{1}{m} \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + tY\right) \right\}_{t=0} \left\{ \exp\left(\frac{X}{m}\right) \right\}^k \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ Ad_{X/m} \right\}^{-k} \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + tY\right) \right\}_{t=0} \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp(-ad_{X/m}) \right\}^k \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + tY\right) \right\}_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(-\frac{k}{m}ad_X\right) \right\} \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + tY\right) \Big|_{t=0} \right\}.$$

Dies gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$, also können wir diesen Ausdruck auch für $m \rightarrow \infty$ untersuchen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{m-1}{m}X\right) \right\} = e^X,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{X}{m} + tY\right) \Big|_{t=0} \right\} = \frac{d}{dt} \exp(tY) \Big|_{t=0} = Y.$$

Also bleibt noch zu untersuchen

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(-\frac{k}{m}ad_X\right) \right\} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(-\frac{k}{m}ad_X\right)^i \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i \right\} \frac{(-1)^i}{i!} (ad_X)^i. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{k}{m} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i < m \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i \right\} < 1,$$

und $\|ad_X\|$ ist beschränkt und damit ist die Reihe in i

$$\left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{k}{m}\right)^i \right\} \frac{(-1)^i}{i!} (ad_X)^i$$

absolut konvergent und wir können $\lim_{m \rightarrow \infty}$ und $\sum_{i=0}^{\infty}$ vertauschen:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \exp\left(-\frac{k}{m}ad_X\right) \right\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} \left(\frac{k}{m}\right)^i \right\} \frac{(-1)^i}{i!} (ad_X)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 ds (s)^i \right\} \frac{(-1)^i}{i!} (ad_X)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \frac{(-1)^i}{i!} (ad_X)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} (ad_X)^i. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1 - e^{-u}}{u} = \frac{1}{u} \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} u^i \right) = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} u^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} u^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} u^i$$

folgt also letztlich

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} = e^X \left(\frac{1 - e^{-ad_X}}{ad_X} \right) Y = e^X f(ad_X) Y \quad \text{mit } f(u) := \frac{1 - e^{-u}}{u} .$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{X+tY} \Big|_{t=0} &= e^X \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} (ad_X)^i Y \\ &= e^X \left(Y - \frac{1}{2!} [X, Y] + \frac{1}{3!} [X, [X, Y]] - \dots \right) . \quad \square \end{aligned}$$

Satz 26.4.3 (Baker-Campbell-Hausdorff) Sei G eine Liegruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{g} und der Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Seien X, Y zwei Elemente der Lie-Algebra aus einer hinreichend kleinen Umgebung $V \subset \mathfrak{g}$ um $0 \in \mathfrak{g}$, dann gibt es ein $Z \in V \subset \mathfrak{g}$ mit

$$e^Z = e^X e^Y \quad \text{und} \quad (26.4.3)$$

$$Z = X + \left\{ \int_0^1 dt g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) \right\} Y \quad \text{mit } g(u) := \frac{\log(u)}{1 - u^{-1}} , \quad (26.4.4)$$

$$Z = X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y . \quad (26.4.5)$$

Z ist also gleich $X + Y$ plus eine Potenzreihe von Kommutatoren von X und Y .

Beweis: Sei $e^{Z(t)} = e^X e^{tY}$, dann folgt für die Ableitung nach t mit Hilfe des vorausgegangenen Satzes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{Z(t)} &= \begin{cases} \frac{d}{dt} e^X e^{tY} = e^X Y e^{tY} = e^X e^{tY} Y = e^{Z(t)} Y , \\ e^{Z(t)} \frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \frac{dZ(t)}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \\ &\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \frac{dZ(t)}{dt} = Y . \end{aligned}$$

Wenn X und Y klein sind, d.h. in einer geeigneten Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ liegen, dann liegt wegen der Stetigkeit von G auch $Z(t)$ in V und ist ebenfalls klein und damit liegt

$$\left(\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} (ad_{Z(t)})^i$$

in der Nähe von 1 und ist also invertierbar und damit folgt

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \left(\frac{1 - e^{-ad_{Z(t)}}}{ad_{Z(t)}} \right)^{-1} Y = \left(\frac{ad_{Z(t)}}{1 - (e^{ad_{Z(t)}})^{-1}} \right) Y .$$

Aus $\exp(ad_{Z(t)}) = \exp(ad_X) \exp(ad_{tY})$ folgt nun $ad_{Z(t)} = \log(\exp(ad_X) \exp(ad_{tY}))$ und damit ergibt sich

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \left(\frac{\log(e^{ad_X} e^{tad_Y})}{1 - (e^{ad_X} e^{tad_Y})^{-1}} \right) Y =: g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y \quad \Rightarrow$$

$$Z(1) - Z(0) = Z - X = \int_0^1 dt g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y \quad \Rightarrow$$

$$Z = X + \int_0^1 dt g(e^{ad_X} e^{tad_Y}) Y .$$

Für $g(u)$ gilt die folgende Reihenentwicklung

$$g(u) = \frac{\log(u)}{1 - u^{-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} (u-1)^n$$

und mit

$$u - 1 = e^{ad_X} e^{tad_Y} - 1 = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} (ad_X)^i (ad_Y)^j$$

ergibt sich für $Z = Z(1)$ die Reihenentwicklung

$$Z = X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y . \quad \square$$

Sehr hilfreich für die Darstellungstheorie ist diese Folgerung aus dem BCH-Satz.

Korollar 26.4.5 Sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe G und sei π ein Lie-Algebra Homomorphismus $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Wenn X und Y klein sind, d.h. in einer geeigneten Umgebung von $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ liegen, so daß der BCH-Satz gilt, dann folgt

$$\pi(\log(e^X e^Y)) = \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) . \quad (26.4.6)$$

Beweis: Für die Funktion $g(u) = \frac{\log(u)}{1-u^{-1}}$ aus dem BCH-Satz gilt

$$X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad ad_X, ad_Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad g(e^{ad_X} e^{ad_Y})(Y) \in \mathfrak{g} .$$

Da π ein Lie-Algebra Homomorphismus ist folgt:

$$\pi(ad_Y(X)) = \pi([Y, X]) = [\pi(Y), \pi(X)] = ad_{\pi(Y)}(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi((ad_Y)^n(X)) = \pi((ad_Y)^{n-1}[Y, X]) = \dots = (ad_{\pi(Y)})^n(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi(e^{ad_Y}(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \pi((ad_Y)^i(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} ((ad_{\pi(Y)})^i(\pi(X))) = e^{ad_{\pi(Y)}}(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\pi((e^{ad_X} e^{ad_Y})(X)) = (e^{ad_{\pi(X)}} e^{ad_{\pi(Y)}})(\pi(X)) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \pi(\log(e^X e^Y)) &= \pi \left(X + Y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} ad_X^i ad_Y^j \right)^n \right\} Y \right) \\ &= \pi(X) + \pi(Y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left\{ \int_0^1 dt \left(\sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq 1}}^{\infty} \frac{t^j}{i!j!} (ad_{\pi(X)})^i (ad_{\pi(Y)})^j \right)^n \right\} \pi(Y) \\ &= \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) . \end{aligned} \quad \square$$

26.5 Killing-Formen

Man kann nun in einer Lie-Algebra eine bilineare Form einführen, die den Namen *Killing-Form* trägt, obwohl ihre eigentliche Einführung und Anwendung auf die Theorie der Lie-Algebren in der Dissertation von Élie Cartan im Jahr 1894 erfolgte.

Definition 26.5.1 Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$, dann heißt die folgende Bilinearform eine *Killing-Form*:

$$\langle X | Y \rangle := \text{tr}(ad_X \cdot ad_Y) . \quad (26.5.1)$$

Die Symmetrie und Bilinearität sieht man unmittelbar aus den Eigenschaften der Spur und der Linearität von ad . Darüber hinaus gilt noch die folgende Eigenschaft für die Killing-Form

$$\langle ad_X Y | Z \rangle + \langle Y | ad_X Z \rangle = \langle [X, Y] | Z \rangle + \langle Y | [X, Z] \rangle = 0 . \quad (26.5.2)$$

Beweis: $X, Y, Z, V \in \mathfrak{g}$, dann folgt

$$\mathrm{tr}(ad_{XY}V) = \mathrm{tr}([XY, V]) = \mathrm{tr}(XYV - VXY) ,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y V) &= \mathrm{tr}(ad_X[Y, V]) = \mathrm{tr}([X, [Y, V]]) \\ &= \mathrm{tr}(X[Y, V] - [Y, V]X) = \mathrm{tr}(XYV - XVY - YVX + VYX) \\ &= \mathrm{tr}(XYV - VXY + XVY - XVY) = \mathrm{tr}(XYV - VXY) \\ &= \mathrm{tr}(ad_{XY}V) . \end{aligned}$$

$$\langle [X, Y] | Z \rangle = \mathrm{tr}(ad_{[X, Y]} \cdot ad_Z) = \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y \cdot ad_Z - ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z) ,$$

$$\begin{aligned} \langle Y | [X, Z] \rangle &= \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_{[X, Z]}) = \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z - ad_Y \cdot ad_Z \cdot ad_X) \\ &= \mathrm{tr}(ad_Y \cdot ad_X \cdot ad_Z - ad_X \cdot ad_Y \cdot ad_Z) \\ &= -\langle [X, Y] | Z \rangle . \end{aligned} \quad \square$$

Die Killing-Form ist invariant unter Automorphismen:

Lemma 26.5.3 *Seien \mathfrak{g} eine reelle oder komplexe Lie-Algebra, $X, Y \in \mathfrak{g}$, und $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Automorphismus, dann gilt*

$$\langle \varphi(X) | \varphi(Y) \rangle = \langle X | Y \rangle . \quad (26.5.3)$$

Beweis: Da φ ein Automorphismus ist gilt $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ und daraus folgt

$$ad_{\varphi(X)}(Y) = [\varphi(X), Y] = \varphi([X, \varphi^{-1}(Y)]) = \varphi(ad_X(\varphi^{-1}(Y))) \quad \Rightarrow$$

$$ad_{\varphi(X)} = \varphi \circ ad_X \circ \varphi^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(X) | \varphi(Y) \rangle &= \mathrm{tr}(ad_{\varphi(X)} \cdot ad_{\varphi(Y)}) \\ &= \mathrm{tr}(\varphi \circ ad_X \circ \varphi^{-1} \cdot \varphi \circ ad_Y \circ \varphi^{-1}) \\ &= \mathrm{tr}(ad_X \cdot ad_Y) = \langle X | Y \rangle . \end{aligned} \quad \square$$

In Komponenten bzgl. einer Basis der Lie-Algebra kann man die Killing-Form schreiben als:

$$\begin{aligned} \langle X | Y \rangle &= \mathrm{tr}((ad_X)_\gamma^\alpha (ad_Y)_\beta^\gamma) = (ad_X)_\gamma^\alpha (ad_Y)_\alpha^\gamma \\ &= f_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta f_{\epsilon\alpha}^\gamma Y^\epsilon = (f_{\beta\gamma}^\alpha f_{\epsilon\alpha}^\gamma) X^\beta Y^\epsilon . \end{aligned}$$

Wenn man $\langle X | Y \rangle$ als eine Art Skalarprodukt auffaßt, dann spielt das Produkt der Strukturkonstanten die Rolle eines 2-stufigen kovarianten metrischen Tensors, den man den Cartanschen Metriktensor der Lie-Algebra nennt:

$$g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} := f_{\alpha\gamma}{}^{\kappa} f_{\beta\kappa}{}^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \langle X | Y \rangle = g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} . \quad (26.5.4)$$

Die Killing-Form einer komplexen Lie-Algebra ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl und auch die Killing-Form einer reellen Lie-Algebra kann im allgemeinen Fall entartet sein, denn z.B. bei einer kommutativen Lie-Algebra sind ja alle Strukturkonstanten $f_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = 0$.

Satz 26.5.5 Für die Killing-Form in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ gilt

$$\langle X | Y \rangle = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y) . \quad (26.5.5)$$

Beweis: Die Standard-Basis in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ist die sog. Weyl-Basis, eine Menge von Matrizen $T_{\alpha\beta}$, die nur an der Position $\alpha\beta$ eine 1 und ansonsten überall eine 0 aufweisen, also: $(T_{\alpha\beta})_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu}$. Man beachte: die Matrizen der Weyl-Basis werden mit dem Doppelindex $\alpha\beta$ nummeriert. Sei also X eine Matrix aus $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, dann kann X als Linearkombination $X = T_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta}$ geschrieben werden. Jetzt suchen wir die Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und betrachten dazu den Kommutator

$$\begin{aligned} ([T_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'}])_{\mu\nu} &= (T_{\alpha\beta} T_{\alpha'\beta'})_{\mu\nu} - (T_{\alpha'\beta'} T_{\alpha\beta})_{\mu\nu} \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \{ (T_{\alpha\beta})_{\mu\lambda} (T_{\alpha'\beta'})_{\lambda\nu} - (T_{\alpha'\beta'})_{\mu\lambda} (T_{\alpha\beta})_{\lambda\nu} \} \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \{ \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} \delta_{\alpha'\lambda} \delta_{\beta'\nu} - \delta_{\alpha'\mu} \delta_{\beta'\lambda} \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\nu} \} \\ &= \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\beta'\nu} - \delta_{\alpha'\mu} \delta_{\beta'\alpha} \delta_{\beta\nu} = \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta'\nu} \delta_{\beta\alpha'} - \delta_{\alpha'\mu} \delta_{\beta\nu} \delta_{\beta'\alpha} \\ &= (T_{\alpha\beta'})_{\mu\nu} \delta_{\beta\alpha'} - (T_{\alpha'\beta})_{\mu\nu} \delta_{\beta'\alpha} \quad \Leftrightarrow \\ [T_{\alpha\beta}, T_{\alpha'\beta'}] &= T_{\alpha\beta'} \delta_{\beta\alpha'} - T_{\alpha'\beta} \delta_{\beta'\alpha} . \end{aligned}$$

Damit folgen die Strukturkonstanten von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ in der Weyl-Basis (Doppelindizes)

$$f_{\alpha\beta, \alpha'\beta'}{}^{\gamma\epsilon} = \delta_{\beta\alpha'} \delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta'}^{\epsilon} - \delta_{\beta'\alpha} \delta_{\alpha'}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\epsilon} ,$$

und daraus der Cartansche Metriktensor in der Weyl-Basis (Doppelindizes)

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{g},\alpha\beta, \alpha'\beta'} &= f_{\alpha\beta, \gamma\epsilon}{}^{\kappa\lambda} f_{\alpha'\beta', \kappa\lambda}{}^{\gamma\epsilon} \\ &= (\delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\kappa} \delta_{\epsilon}^{\lambda} - \delta_{\epsilon\alpha} \delta_{\gamma}^{\kappa} \delta_{\beta}^{\lambda}) (\delta_{\beta'\kappa} \delta_{\alpha'}^{\gamma} \delta_{\lambda}^{\epsilon} - \delta_{\lambda\alpha'} \delta_{\kappa}^{\gamma} \delta_{\beta'}^{\epsilon}) \\ &= (\delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha}^{\kappa} \delta_{\epsilon}^{\lambda} \delta_{\beta'\kappa} \delta_{\alpha'}^{\gamma} \delta_{\lambda}^{\epsilon} + \delta_{\epsilon\alpha} \delta_{\gamma}^{\kappa} \delta_{\beta}^{\lambda} \delta_{\lambda\alpha'} \delta_{\kappa}^{\gamma} \delta_{\beta'}^{\epsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\delta_{\beta\gamma}\delta_\alpha^\kappa\delta_\epsilon^\lambda\delta_{\lambda\alpha'}\delta_\kappa^\gamma\delta_{\beta'}^\epsilon + \delta_{\epsilon\alpha}\delta_\gamma^\kappa\delta_\beta^\lambda\delta_{\beta'\kappa}\delta_{\alpha'}^\gamma\delta_\lambda^\epsilon) \\
& = (n\delta_{\beta\gamma}\delta_\alpha^\kappa\delta_{\beta'\kappa}\delta_{\alpha'}^\gamma + n\delta_{\epsilon\alpha}\delta_\beta^\lambda\delta_{\lambda\alpha'}\delta_{\beta'}^\epsilon) \\
& \quad - (\delta_{\beta\gamma}\delta_\alpha^\gamma\delta_{\beta'}^\lambda\delta_{\lambda\alpha'} + \delta_{\epsilon\alpha}\delta_{\alpha'}^\kappa\delta_\beta^\epsilon\delta_{\beta'\kappa}) \\
& = n(\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} + \delta_{\beta'\alpha}\delta_{\beta\alpha'}) - (\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'} + \delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha}) \\
& = 2n\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'} .
\end{aligned}$$

Und damit folgt für die Killing-Form (berechnet in der Weyl-Basis mit Doppelindizes):

$$\begin{aligned}
\langle X | Y \rangle & = g_{\mathfrak{g},\alpha\beta,\alpha'\beta'} X^{\alpha\beta} Y^{\alpha'\beta'} \\
& = (2n\delta_{\beta\alpha'}\delta_{\beta'\alpha} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\beta'\alpha'}) X^{\alpha\beta} Y^{\alpha'\beta'} \\
& = 2n X^{\alpha\beta} Y_{\beta\alpha} - 2 X^\alpha_\alpha Y^{\alpha'}_{\alpha'} \\
& = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y) . \quad \square
\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, daß die Killing-Form in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ entartet ist, denn

$$X := \lambda \mathbb{1} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow$$

$$\langle X | Y \rangle = 2n \operatorname{tr}(XY) - 2 \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y) = 2n\lambda \operatorname{tr}(Y) - 2n\lambda \operatorname{tr}(Y) = 0 .$$

Achtung: In einer komplexen Lie-Algebra ist die Killing-Form immer indefinit!

Korollar 26.5.7 *Aus der Killing-Form für die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ folgt die Killing-Form für die Lie-Unteralgebren $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ und $\mathfrak{u}(n)$ und $\mathfrak{su}(n)$, deren Matrizen alle spurfrei sind, zu*

$$\langle X | Y \rangle = 2n \operatorname{tr}(XY) . \quad (26.5.6)$$

Für die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{su}(n)$ ist die Killing-Form $\langle X | Y \rangle$ negativ definit, also ein echtes Skalarprodukt, denn die Matrizen $X \in \mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{u}(n)$ sind schiefsymmetrisch-hermitesch, also sind die Matrizen $X' := iX$ hermitesch und lassen sich mittels einer Matrix U in eine reelle Diagonalmatrix Λ überführen:

$$\begin{aligned}
-\langle X | X \rangle & = \langle iX | iX \rangle = \langle X' | X' \rangle = 2n \operatorname{tr}(X'X') \\
& = 2n \operatorname{tr}(U^{-1}UX'U^{-1}UX') = 2n \operatorname{tr}(UX'U^{-1}UX'U^{-1}) \\
& = 2n \operatorname{tr}(\Lambda\Lambda) = 2n \sum_{i=1}^n \Lambda_{ii}^2 \geq 0 .
\end{aligned}$$

Wenn es in der Lie-Algebra ein definites Skalarprodukt gibt, wie soeben bei $\mathfrak{su}(n)$ gezeigt, dann kann man mit Hilfe des Cartanschen Metrikensors $g_{\mathfrak{g},\alpha\beta}$ auch die vollständig kovarianten Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta\gamma}$ betrachten und mit 26.3.13 und 26.3.14 zeigen, daß diese total antisymmetrisch sind:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma} &= f_{\alpha\beta}{}^{\kappa} g_{\mathfrak{g},\kappa\gamma} = f_{\alpha\beta}{}^{\kappa} (f_{\kappa\nu}{}^{\mu} f_{\gamma\mu}{}^{\nu}) = (f_{\alpha\beta}{}^{\kappa} f_{\kappa\nu}{}^{\mu}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} \\ &= (f_{\nu\kappa}{}^{\mu} f_{\beta\alpha}{}^{\kappa}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} = (-f_{\alpha\kappa}{}^{\mu} f_{\nu\beta}{}^{\kappa} - f_{\beta\kappa}{}^{\mu} f_{\alpha\nu}{}^{\kappa}) f_{\gamma\mu}{}^{\nu} \\ &= f_{\alpha\kappa}{}^{\mu} f_{\beta\nu}{}^{\kappa} f_{\gamma\mu}{}^{\nu} + f_{\nu\alpha}{}^{\kappa} f_{\kappa\beta}{}^{\mu} f_{\mu\gamma}{}^{\nu} . \end{aligned}$$

Jetzt ist $f_{\alpha\beta\gamma}$ antisymmetrisch in α, β und invariant unter zyklischen Permutationen von α, β, γ , also ist $f_{\alpha\beta\gamma}$ total antisymmetrisch:

$$f_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!} f_{\alpha\beta\gamma} . \quad (26.5.7)$$

Satz 26.5.8 Wenn \mathfrak{g} die Lie-Algebra einer kompakten Lie-Gruppe G ist, dann gibt es in \mathfrak{g} eine positiv definite quadratische Form $(\cdot | \cdot)$, welche die folgende Bedingung erfüllt

$$([X, Y] | Z) + (Y | [X, Z]) = 0 .$$

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{g}$ und $(X, X)_0$ irgendeine positiv definite quadratische Form auf \mathfrak{g} , also z.B. $\sum_{\alpha=1}^n (X^\alpha)^2$. Sei $A \in G$, dann kann man, weil G kompakt ist, mittels des folgenden Hurwitz-Integrals mit dem Haar-Maß dA eine neue positiv definite quadratische Form $(\cdot | \cdot)$ auf \mathfrak{g} bilden:

$$(X | X) := \int_G (Ad_A(X), Ad_A(X))_0 dA .$$

Wegen der Invarianz des Haar-Maßes gegenüber einer Linkstranslation und wegen $Ad_A Ad_B = Ad_{AB}$ gilt

$$\begin{aligned} (Ad_B Y | Ad_B Z) &= \int_G (Ad_A Ad_B(Y), Ad_A Ad_B(Z))_0 dA = \int_G (Ad_{AB}(Y), Ad_{AB}(Z))_0 dA \\ &= \int_G (Ad_A(Y), Ad_A(Z))_0 dA = (Y | Z) . \end{aligned}$$

Sei $B = e^{tX}$, dann folgt

$$0 = \frac{d}{dt} (Y | Z)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (Ad_B Y | Ad_B Z)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_G (Ad_A Ad_B(Y), Ad_A Ad_B(Z))_0 dA|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} \int_G (Ad_A(e^{tX} Y e^{-tX}), Ad_A(e^{tX} Z e^{-tX}))_0 dA|_{t=0} \\
&= \int_G \{ (Ad_A(X e^{tX} Y e^{-tX} - e^{tX} Y e^{-tX} X), Ad_A(e^{tX} Z e^{-tX}))_0 \\
&\quad + (Ad_A(e^{tX} Y e^{-tX}), Ad_A(X e^{tX} Z e^{-tX} - e^{tX} Z e^{-tX} X))_0 \} dA|_{t=0} \\
&= \int_G \{ (Ad_A(XY - YX), Ad_A(Z))_0 + (Ad_A(Y), Ad_A(XZ - ZX))_0 \} dA \\
&= ([X, Y] | Z) + (Y | [X, Z]) . \quad \square
\end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, daß die Killing-Form immer die folgende Bedingung $\langle [X, Y] | Z \rangle + \langle Y | [X, Z] \rangle = 0$ erfüllt, aber eben nicht immer negativ definit ist. Zum Beispiel ist die Lie-Gruppe $SU(n)$ kompakt und in der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ ist die negative Killing-Form $(-\langle X | X \rangle)$ eine positiv definite quadratische Form.

Dieses Ergebnis gibt Anlaß zu der Definition der 'Kompaktheit' einer LieAlgebra:

Definition 26.5.10 *Eine Lie-Algebra \mathfrak{g} heißt kompakt, wenn es in \mathfrak{g} eine positiv definite quadratische Form $(\cdot | \cdot)$ gibt, welche für $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ die folgende Bedingung erfüllt*

$$([X, Y] | Z) + (Y | [X, Z]) = 0 . \quad (26.5.8)$$

Weyl hat die folgende Erweiterung des obigen Satzes bewiesen:

Satz 26.5.11 (Weyl) *Eine reelle Lie-Gruppe ist genau dann kompakt, wenn ihre Killing-Form negativ definit ist.*

Der Beweis dieses Satzes ist aufwendig und findet sich in einer Kurzform in Sattinger u. Weaver (1986), S. 154 und ausführlich z.B. in Varadarajan (1984), S. 345.

26.6 Die Lie-Gruppen $SO(3)$ und $Spin(3) \simeq SU(2)$

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist die Matrix-Lie-Gruppe aller n -dimensionalen reellen orthogonalen Matrizen. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ und $A \in O(n)$ dann gilt

$$\langle Ax | Ax \rangle = \langle x | A^T Ax \rangle = \langle x | x \rangle \quad \Rightarrow \quad A^T A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \det A = \pm 1 . \quad (26.6.1)$$

Damit zerfällt $O(n)$ in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten mit $\det A = \pm 1$. Die Teilmenge von $O(n)$ mit $\det A = +1$ heißt die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$. Wir hatten in 26.1.10 gesehen, daß $SO(n)$ pfadzusammenhängend ist. Allerdings ist

$SO(n)$ nicht einfach zusammenhängend, siehe 19.2.6, und deswegen geht man in der Darstellungstheorie zur Universellen Überlagerungsgruppe von $SO(n)$ über, welche als $Spin(n)$ bezeichnet wird. Dabei gilt $SO(n) \simeq Spin(n)/\mathbb{Z}_2$, was man häufig auch in der folgenden *kurzen exakten Sequenz* von Lie-Gruppen ausdrückt (d.h. das Bild einer Abbildung = der Kern der Folgeabbildung):

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(n) \rightarrow SO(n) \rightarrow 1. \quad (26.6.2)$$

Jetzt soll gezeigt werden, daß für den 3-dimensionalen Fall die Lie-Gruppe $Spin(3)$, die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$, gerade isomorph zu $SU(2)$ ist.

Achtung: Für $n \geq 4$ ist die Lie-Gruppe $Spin(n)$, die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(n)$, nicht mehr isomorph zu $SU(n-1)$.

Satz 26.6.1 Die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ ist $SU(2)$.

Beweis: Wenn $A \in SU(2)$ dann gilt $AA^\dagger = \mathbb{1}$ und $\det A = 1$. Seien also $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$, dann folgt

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (|z_1|^2 + |z_2|^2) & (z_1 z_3^* + z_2 z_4^*) \\ (z_1 z_3^* + z_2 z_4^*)^* & (|z_3|^2 + |z_4|^2) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ z_1 z_3^* + z_2 z_4^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{z_4^*} z_1 z_3^*.$$

$$\det A = z_1 z_4 - z_2 z_3 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_3} (z_1 z_4 - 1).$$

$$-\frac{1}{z_4^*} z_1 z_3^* = \frac{1}{z_3} (z_1 z_4 - 1) \Rightarrow -z_1 |z_3|^2 - z_1 |z_4|^2 = -z_4^* \Rightarrow z_1 = z_4^*.$$

$$\det A = z_1 z_4 - z_2 z_3 = |z_1|^2 - z_2 z_3 = 1 \Rightarrow$$

$$1 - |z_2|^2 - z_2 z_3 = 1 \Rightarrow z_2 z_2^* = -z_2 z_3 \Rightarrow z_3 = -z_2^*.$$

Damit kann also jede Matrix $A \in SU(2)$ geschrieben werden als

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_4 & x_2 + ix_3 \\ -(x_2 - ix_3) & x_1 - ix_4 \end{pmatrix}$$

mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, bzw. mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung $\det A = 1$ bedeutet dann $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = 1$ und das ist gerade die Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Also ist $SU(2) \simeq S^3$ und von der einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit S^3 hatten wir bereits in 19.2.6 gesehen, daß $SO(3) = S^3/\{+1, -1\} = S^3/\mathbb{Z}_2$ ist. Also ist $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$. \square

Als nächstes soll die Projektion von $SU(2)$ auf $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ konstruiert werden.

Wir hatten oben für die Lie-Algebra von $SU(2)$ gefunden: $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(2) \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, d.h. $\mathfrak{su}(2)$ besteht aus schiefsymmetrisch-hermiteschen, spurfreien, 2-dimensionalen Matrizen. Physiker gehen traditionell zum Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$, dem Raum der hermiteschen, spurfreien, 2-dimensionalen Matrizen, über. Eine Basis von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ stellen die Pauli-Matrizen dar:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26.6.3)$$

Mit den Pauli-Matrizen kann man einen linearen Isomorphismus $\mathfrak{X} : \mathbb{R}^3 \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2)$ definieren:

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \quad (26.6.4)$$

Die Umkehrabbildung $\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist dann gerade

$$x^i := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X \sigma_i). \quad (26.6.5)$$

Dies ist (bis auf den Normierungsfaktor) gerade eine positiv definite Killing-Form, denn oben (26.5.6) hatten wir gesehen, daß für $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ die Killing-Form $\langle X | Y \rangle = 4 \operatorname{tr}(XY)$ ein negativ definites Skalarprodukt ist, und damit ist für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$ die Killing-Form ein positiv definites Skalarprodukt.

Nun kann man für jedes $U \in SU(2)$ und jedes $X \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$ die adjungierte Abbildung $Ad_U : i \cdot \mathfrak{su}(2) \rightarrow i \cdot \mathfrak{su}(2)$ betrachten:

$$Ad_U(X) := UXU^{-1}. \quad (26.6.6)$$

Das Skalarprodukt ergibt nun für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{su}(2)$:

$$\langle Ad_U(X) | Ad_U(Y) \rangle = 4 \operatorname{tr}(UXU^{-1}UYU^{-1}) = 4 \operatorname{tr}(XY) = \langle X | Y \rangle. \quad (26.6.7)$$

Also ist Ad_U eine orthogonale Transformation auf dem Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$.

Mit dem Isomorphismus $\mathfrak{X}^{-1} : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ kann man jetzt von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ nach \mathbb{R}^3 übergehen:

$$\tilde{Ad}_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \tilde{Ad}_U := \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X}. \quad (26.6.8)$$

\tilde{Ad}_U ist ebenso wie Ad_U stetig und auch ein Gruppen-Homomorphismus, also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \tilde{Ad}_{UU'}(x) &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'}(X) \\ &= \mathfrak{X}^{-1} UU' XU'^{-1} U^{-1} = \mathfrak{X}^{-1} U(U' XU'^{-1}) U^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{X}^{-1} \text{Ad}_U(U' X U'^{-1}) = \mathfrak{X}^{-1} \text{Ad}_U \circ \text{Ad}_{U'}(X) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} \text{Ad}_U \circ \text{Ad}_{U'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} \text{Ad}_U \mathfrak{X} \circ \mathfrak{X}^{-1} \text{Ad}_{U'} \mathfrak{X}(x) \\
&= \tilde{\text{Ad}}_U \circ \tilde{\text{Ad}}_{U'}(x) .
\end{aligned}$$

Mithilfe der Killingform auf $\mathfrak{su}(2)$ kann man nun das folgende Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 definieren:

$$\langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^3} := \langle \mathfrak{X}(x) \mid \mathfrak{X}(y) \rangle \quad (26.6.9)$$

und damit gilt für $\tilde{\text{Ad}}_U(x)$

$$\langle \tilde{\text{Ad}}_U(x) \mid \tilde{\text{Ad}}_U(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \text{Ad}_U(X) \mid \text{Ad}_U(X) \rangle = \langle X \mid X \rangle = \langle x \mid x \rangle_{\mathbb{R}^3} . \quad (26.6.10)$$

Also ist $\tilde{\text{Ad}}_U$ eine orthogonale Transformation auf dem Raum \mathbb{R}^3 . Damit ist die Abbildung $P : SU(2) \rightarrow O(3)$ mit $P(U) = \tilde{\text{Ad}}_U$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus in den Raum $O(3)$. Nun hat $O(3)$ aber zwei verschiedene von einander getrennte Definitionsbereiche, nämlich mit $\det = \pm 1$. Da nun $\tilde{\text{Ad}}_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ ist, bildet P das Einselement von $SU(2)$ auf das Einselement von $O(3)$ ab, also ist $P : SU(2) \rightarrow SO(3)$. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob die Projektion P auch surjektiv ist, ob also jedes Element von $SO(3)$ durch die Projektion eines Elements von $SU(2)$ erreicht werden kann. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt. Wegen $\tilde{\text{Ad}}_U = \tilde{\text{Ad}}_{U^{-1}}$ sieht man auch sofort, daß P eine zwei-zu-eins Abbildung ist, daß also $SU(2)$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ mit $SO(3) = SU(2)/\mathbb{Z}_2$ ist.

Beispiel: Rotationen in \mathbb{R}^3 um die x^3 -Achse.

Rotationen in \mathbb{R}^3 um die x^3 -Achse stellen eine 1-Parameter-Untergruppe von $SO(3)$ dar:

$$R_3(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (26.6.11)$$

Zum Vorzeichen: wir folgen hier der mathematischen Konvention, bei welcher man eine Drehung als Drehung des Koordinatensystems im mathematisch positiven Sinn, d.h. im Gegenuhrzeigersinn, darstellt. Im Gegensatz dazu verstehen Physiker unter einer Drehung zumeist die Drehung eines Vektors, ebenfalls im mathematisch positiven Sinn, bei festgehaltenem Koordinatensystem.

Das entsprechende Basiselement der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist

$$J_3 := \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (26.6.12)$$

Tatsächlich ist $R_3(\theta) = \exp(\theta J_3)$, denn

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_3^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3^3 = -J_3, J_3^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \exp(\theta J_3) &= \mathbb{1} + \theta J_3 + \frac{1}{2!}\theta^2 J_3^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 J_3^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 J_3^4 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots & -\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 - \dots & 0 \\ +\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26.6.13)$$

Jetzt geht man mittels \mathfrak{X} von der Drehachse x^3 in den Raum $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ über und erhält für $y^3 = (0, 0, 1)^T$ gerade $\mathfrak{X}(y^3) = \sigma_3$. Die entsprechende 1-Parameter-Untergruppe von $SU(2, \mathbb{C})$ ist dann

$$U(\theta) = \exp\left(\theta \frac{1}{i}\sigma_3\right) = \exp\begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \quad (26.6.14)$$

Die entsprechende $SU(2)$ -Drehung in $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ ist dann

$$\begin{aligned} Ad_{U(\theta)}(X) &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta}x^3 & e^{-i\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i\theta}(x^1 + ix^2) & -e^{i\theta}x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^3 & e^{-i2\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i2\theta}(x^1 + ix^2) & -x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (26.6.15)$$

$$x'^1 = x^1 \cos 2\theta - x^2 \sin 2\theta,$$

$$x'^2 = x^1 \sin 2\theta + x^2 \cos 2\theta,$$

$$x'^3 = x^3 .$$

Wenn man wissen möchte welcher Drehung dies in \mathbb{R}^3 entspricht, dann geht man von $Ad_{U(\theta)}(X)$ zu $\tilde{A}d_{U(\theta)}(x)$ über:

$$\begin{aligned} x' &= \tilde{A}d_{U(\theta)}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U(\theta)} \mathfrak{X}(x) \\ &= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} x^3 & e^{-i2\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{i2\theta}(x^1 + ix^2) & -x^3 \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (26.6.16)$$

Das heißt, einer $SU(2)$ -Drehung um die $\mathfrak{X}(x)$ mit dem Winkel θ in $i \cdot \mathfrak{su}(2)$ entspricht eine $SO(3)$ -Drehung um die x^3 -Achse mit dem Winkel 2θ in \mathbb{R}^3 . Umgekehrt ausgedrückt gibt es also zu jeder $SO(3)$ -Drehung eine entsprechende $SU(2)$ -Drehung - und damit ist die Projektion $P : SU(2) \rightarrow SO(3)$ surjektiv. \square

Die beiden in $SU(2)$ verschiedenen Drehungen um die Winkel π und 2π führen in \mathbb{R}^3 zum gleichen Punkt $2\pi \cong 4\pi$, was ja gerade die zwei-zu-eins Überdeckung von $SO(3)$ durch ihre Universelle Überlagerungsgruppe $SU(2)$ ausdrückt.

Seien $R_1(\theta), R_2(\theta), R_3(\theta) \in SO(3)$ Drehungen mit dem Winkel θ um die x^1, x^2, x^3 -Achse in \mathbb{R}^3 . Dann sind die entsprechenden Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ gerade die Matrizen

$$J_1 = \frac{d}{d\theta} R_1(\theta)|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (26.6.17)$$

Daraus folgen die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{so}(3)$ Lie-Algebra:

$$[J_1, J_2] = J_3, \quad [J_2, J_3] = J_1, \quad [J_3, J_1] = J_2,$$

also

$$[J_i, J_j] = f_{ij}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}^k = \epsilon_{ijk} . \quad (26.6.18)$$

Für die Pauli-Matrizen, die Basis von $i \cdot \mathfrak{su}(2)$, folgen die Vertauschungsrelationen:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2,$$

also

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (26.6.19)$$

Mit

$$S_k := \frac{1}{2i}\sigma_k \quad \Rightarrow \quad [S_i, S_j] = f_{ij}^k S_k \quad \text{mit } f_{ij}^k = \epsilon_{ijk} \quad (26.6.20)$$

haben wir eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ gefunden. Diese stimmt in ihren Vertauschungsrelationen mit der Basis von $\mathfrak{so}(3)$ überein, was nicht überrascht, da $SU(2)$ als Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ in einer Umgebung des $\mathbb{1}$ -Elements mit $SO(3)$ übereinstimmt.

26.7 Die Lie-Gruppen $O(3, 1)_+^\uparrow$ und $Spin(3, 1) = SL(2, \mathbb{C})$

Zunächst noch eine kurze Bemerkung zur Bezeichnungweise, die in der Literatur leider nicht eindeutig ist. Wir verwenden so wie Misner u. a. (1973) und die meisten *Relativisten* und *Geometer* bzgl. der Koordinaten $(x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4$ die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$, was zwei Vorteile hat:

1. für *raumartig* gelegenen Punkte (also Punkte außerhalb einer Kausalitätsbeziehung) ist die Metrik positiv definit, d.h. es gilt $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0$, was von Vorteil bei der Lösung von Anfangswert-Problemen in der *Allgemeinen Relativitätstheorie* ist,
2. der Übergang zur euklidischen 3-Geometrie mit der Metrik $\text{diag}(+1, +1, +1)$ ist völlig natürlich.

Auch Weinberg (1995a) verwendet in seinem 3-bändigen Standardwerk *Quantum Theory of Fields* im Gegensatz zu zahlreichen anderen *Quantenphysikern* und *Algebraikern* diese Metrik.

Isomorph zu unserem Minkowski-Raum ist ein Minkowski-Raum, bei dem wir die Zeitkoordinate x^0 zu x^4 umbenennen, und bzgl. dieser Koordinaten-Umbenennung können wir dann von der Lorentzgruppe als $SO(3, 1)$ sprechen. Diese Vorgehensweise haben etwa auch Freedman u. Van Proeyen (2012) gewählt, deren Bezeichnungweise wir uns weitgehend anschließen.

Mit der Minkowski-Metrik

$$\langle x | y \rangle := \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \quad \text{mit } \mu, \nu \in \{0, \dots, 3\}$$

gilt für die Lie-Gruppe der Lorentz-Transformationen $O(3, 1)$:

$$O(3, 1) := \{ \Lambda_\nu^\mu | \langle \Lambda x | \Lambda y \rangle \stackrel{!}{=} \langle x | y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^4 \}.$$

Daraus folgt sofort für die Matrizen Λ^μ_ν der Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned} \Lambda^\kappa_\lambda x^\lambda \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_\nu x^\nu &= x^\lambda \Lambda^\kappa_\lambda \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\lambda \eta_{\lambda\nu} x^\nu \quad \Rightarrow \\ \Lambda^\kappa_\lambda \eta_{\kappa\mu} \Lambda^\mu_\nu &= \eta_{\lambda\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \end{aligned} \quad (26.7.1)$$

Aus $\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\eta)$ folgt $\det(\Lambda) = \pm 1$. Und mit $e^T := (1, 0, 0, 0)^T$ folgt

$$\langle \Lambda e \mid \Lambda e \rangle = \begin{cases} \langle e \mid e \rangle = -1, \\ -(\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^0_0)^2 \geq 1.$$

Also setzt sich $O(3, 1)$ aus vier disjunkten Untergruppen zusammen:

$$\begin{aligned} O(3, 1)_+^\uparrow &:= \{ \Lambda \in O(3, 1) \mid \det(\Lambda) = +1, \Lambda^0_0 \geq 1 \}, \\ O(3, 1)_-^\uparrow &:= \{ \Lambda \in O(3, 1) \mid \det(\Lambda) = -1, \Lambda^0_0 \geq 1 \}, \\ O(3, 1)_+^\downarrow &:= \{ \Lambda \in O(3, 1) \mid \det(\Lambda) = +1, \Lambda^0_0 \leq -1 \}, \\ O(3, 1)_-^\downarrow &:= \{ \Lambda \in O(3, 1) \mid \det(\Lambda) = -1, \Lambda^0_0 \leq -1 \}. \end{aligned}$$

Die Untergruppe $O(3, 1)_+^\uparrow$ wird als die eigentliche (+), orthochrone (\uparrow) Lorentzgruppe bezeichnet. Da sie das $\mathbb{1}$ -Element der Gruppe enthält stimmt sie mit $SO(3, 1)$ überein. Von $O(3, 1)_+^\uparrow$ kann man mittels einer Raumspiegelung \mathcal{P} , einer Zeitspiegelung \mathcal{T} , oder einer kombinierten Raumzeit-Spiegelung \mathcal{PT} zu den anderen obigen Untergruppen übergehen.

Eine Lorentz-Transformation aus $SO(3, 1)$, welche nur die Raumkoordinaten $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ transformiert, stellt einfach eine Drehung aus $SO(3)$ dar. Eine spezielle Lorentz-Transformationen aus $SO(3, 1)$, die nur $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$ transformiert, heißt Lorentz-Boost. Während wir sonst fast immer die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt haben, führen wir hier c in den folgenden Zeilen der Klarheit halber explizit auf. Damit schreibt man für einen Lorentz-Boost in x^3 -Richtung:

$$\beta := \frac{v}{c} =: \tanh(\alpha), \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \cosh(\alpha) := \gamma, \quad \sinh(\alpha) := \beta\gamma, \quad (26.7.2)$$

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & 0 & \sinh(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\alpha) & 0 & 0 & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (26.7.3)$$

denn

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1, \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) &= \left(\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha} - e^{2\alpha} + 2 - e^{-2\alpha}) = 1. \end{aligned}$$

Der Wertebereich von β ist $(-1, +1)$ und damit ist der Wertebereich von $\alpha = \tanh^{-1}(\frac{v}{c})$, der sog. *Rapidität*, der Bereich $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ und damit ist $SO(3, 1)$ wegen der Lorentz-Boosts eine nichtkompakte Lie-Gruppe.

Lemma 26.7.1 *Für die Matrizen der Liegruppe $SL(n, \mathbb{C})$ gibt eine eindeutige Polarzerlegung, d.h. für $A \in SL(n, \mathbb{C})$ gibt es eine eindeutige Darstellung als $A = UH$ mit $U \in SU(n)$ und einer selbstadjungierten, positiven Matrix H mit $\det H = 1$.*

Beweis: 1. Sei H selbstadjungiert und positiv, d.h. $H = H^\dagger$ und $\langle x | Hx \rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Dann gibt es eine eindeutige unitäre Matrix U , welche die Matrix H zur Diagonalmatrix H_λ diagonalisiert:

$$H = UH_\lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0.$$

Damit gibt es eine eindeutige Matrix $H^{1/2}$, die ebenfalls selbstadjungiert und positiv ist:

$$H^{1/2} := UH_\lambda^{1/2}U^{-1} := U \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{1/2} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

2. Wenn $A \in SL(n, \mathbb{C})$, dann ist $A^\dagger A$ eine selbstadjungierte und positive Matrix, denn

$$\langle x | A^\dagger A x \rangle = \langle Ax | Ax \rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus 0,$$

denn $A \in SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ und alle Matrizen aus $GL(n, \mathbb{C})$ sind invertierbar, haben also keinen Eigenwert 0. Jetzt definieren wir $H := (A^\dagger A)^{1/2}$ und dies ist also eine selbstadjungierte und positive Matrix.

3. Wir suchen zu diesem H eine unitäre Matrix U mit $A = UH$, also $U = AH^{-1}$ und zeigen, daß dieses U tatsächlich unitär ist:

$$UU^\dagger = AH^{-1}(AH^{-1})^\dagger = AH^{-1}(H^{-1})^\dagger A^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= A(A^\dagger A)^{-1/2}((A^\dagger A)^{-1/2})^\dagger A^\dagger \\
&= A(A^\dagger A)^{-1/2}(A^\dagger A)^{-1/2} A^\dagger = A(A^\dagger A)^{-1} A^\dagger \\
&= A(A)^{-1}(A^\dagger)^{-1} A^\dagger = \mathbb{1} .
\end{aligned}$$

Damit ist $U \in U(n)$ und $\det U = \pm 1$. Weiter gilt

$$1 = \det A = \det(UH) = (\det U)(\det H) .$$

Da H positiv ist gilt $\det H > 0$ und damit folgt $\det U = +1$, also $U \in SU(n)$. \square

Lemma 26.7.3 *Die Lie-Gruppe $SL(n, \mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \in SL(n, \mathbb{C})$, dann gibt es nach dem obigen Lemma eine eindeutige Darstellung $A = UH$ mit $U \in SU(n)$ und einer positiven selbstadjungierten Matrix $H = H^\dagger$ mit $\det H = 1$.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} + ih'_{12} & \dots & \dots & h_{1n} + ih'_{1n} \\ h_{12} - ih'_{12} & h_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & h_{n-1,n-1} & h_{n-1n} + ih'_{n-1n} \\ h_{1n} - ih'_{1n} & \dots & \dots & h_{n-1n} + ih'_{n-1n} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $h_{11}, \dots, h_{nn} \in \mathbb{R}_+$, $h_{ij}, h'_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Unter Berücksichtigung von $\det H = 1$ ist also die Menge der Matrizen H homöomorph zu $\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}^{(n-1)n}$ und dieses ist homotop zu $\mathbb{R}^{(n-1)(n+1)}$ und damit also einfach zusammenhängend. Da auch $SU(n)$ einfach zusammenhängend ist folgt, daß $SL(n, \mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist. \square

Satz 26.7.5 *Die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3, 1)$ ist $SL(2, \mathbb{C})$.*

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie im Fall $SO(3) \cong SU(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Wir betrachten den Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ der komplexen, hermiteschen, 2-dimensionalen Matrizen und wir wählen als Basis:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26.7.4)$$

Mit dieser Basis kann man einen linearen Isomorphismus $\mathfrak{X} : \mathbb{R}^4 \rightarrow i \cdot \mathfrak{u}(2)$ definieren:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (26.7.5)$$

Die Umkehrabbildung $\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{u}(2) \rightarrow \mathbb{R}^4$ ist dann gerade

$$x^i := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X \sigma_i) . \quad (26.7.6)$$

Dies ist (bis auf den Normierungsfaktor) gerade eine positiv definite Killing-Form, denn oben (26.5.6) hatten wir gesehen, daß für $X, Y \in \mathfrak{u}(2)$ die Killing-Form $\langle X | Y \rangle = 4 \operatorname{tr}(XY)$ ein negativ definites Skalarprodukt ist, und damit ist für $X, Y \in i \cdot \mathfrak{u}(2)$ die Killing-Form ein positiv definites Skalarprodukt.

Für die Minkowski-Norm gilt:

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -\langle x | x \rangle .$$

Nun kann man für jedes $U \in SL(2, \mathbb{C})$ und jedes $X \in i \cdot \mathfrak{u}(2)$ die adjungierte Abbildung $Ad_U : i \cdot \mathfrak{u}(2) \rightarrow i \cdot \mathfrak{u}(2)$ betrachten:

$$Ad_U(X) := UXU^\dagger .$$

Mit $\det(U) = 1$ für $U \in SL(2, \mathbb{C})$ folgt

$$\det(Ad_U(X)) = \det(UXU^\dagger) = \det(X) = -\langle x | x \rangle .$$

Also ist Ad_U eine Lorentz-Transformation auf dem Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2)$.

Mit dem Isomorphismus $\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathfrak{u}(2) \rightarrow \mathbb{R}^4$ kann man jetzt von $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ nach \mathbb{R}^4 übergehen:

$$\tilde{Ad}_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad \tilde{Ad}_U := \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} .$$

\tilde{Ad}_U ist ebenso wie Ad_U stetig und auch ein Gruppen-Homomorphismus, also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \tilde{Ad}_{UU'}(x) &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{UU'}(X) \\ &= \mathfrak{X}^{-1} UU' XU'^\dagger U^\dagger = \mathfrak{X}^{-1} U(U' XU'^\dagger) U^\dagger \\ &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U(U' XU'^\dagger) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'}(X) \\ &= \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \circ Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X} \circ \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U'} \mathfrak{X}(x) \\ &= \tilde{Ad}_U \circ \tilde{Ad}_{U'}(x) . \end{aligned}$$

Weiter gilt für $\tilde{Ad}_U(x)$

$$\begin{aligned} -\langle \tilde{Ad}_U(x) | \tilde{Ad}_U(x) \rangle_{\mathbb{R}^4} &= \det(\mathfrak{X}(\tilde{Ad}_U(x))) = \det(\mathfrak{X} \mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X}(x)) \\ &= \det(Ad_U(X)) = \det(X) = -\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^4} . \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{A}d_U$ eine Lorentz-Transformation auf dem Minkowski-Raum \mathbb{R}^4 . Damit ist die Abbildung $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)$ mit $P(U) = \tilde{A}d_U$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus in den Raum $O(3, 1)$. Nun hat $O(3, 1)$ aber vier verschiedene von einander getrennte Definitionsbereiche, nämlich $O(3, 1)_+^\uparrow, O(3, 1)_-^\uparrow, O(3, 1)_+^\downarrow, O(3, 1)_-^\downarrow$. Da $\tilde{A}d_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$ ist, bildet P das Einselement von $SL(2, \mathbb{C})$ auf das Einselement von $O(3, 1)$ ab, also ist $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)_+^\uparrow$. Weiter wird der Vektor $x = (1, 0, 0, 0)^T$ durch $\tilde{A}d_U$ abgebildet auf $\tilde{A}d_U(x)$ und damit folgt

$$\begin{aligned} (\tilde{A}d_U(x))^0 &= (\mathfrak{X}^{-1} Ad_U \mathfrak{X}(x))^0 = (\mathfrak{X}^{-1} Ad_U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^0 \\ &= (\mathfrak{X}^{-1} U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^\dagger)^0 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(UU^\dagger \sigma_0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(UU^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{21}^* \\ u_{12}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} (|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 + |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2) > 0, \end{aligned}$$

und damit ist das zu $P = \tilde{A}d_U$ gehörige $\Lambda_0^0 > 0$, also ist $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow O(3, 1)_+^\uparrow = SO(3, 1)$. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob die Projektion P auch surjektiv ist, ob also jedes Element von $O(3, 1)_+^\uparrow$ durch die Projektion eines Elements von $SL(2, \mathbb{C})$ erreicht werden kann. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

Wegen $\tilde{A}d_U = \tilde{A}d_{-U}$ sieht man auch sofort, daß P eine zwei-zu-eins Abbildung ist, daß also $SL(2, \mathbb{C})$ die Universelle Überlagerungsgruppe von $SO(3, 1)$ mit $SO(3, 1) = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ ist. \square

Beispiel: Boosts in \mathbb{R}^4 in x^3 -Richtung.

Den Fall der Rotationen in \mathbb{R}^3 um die x^3 -Achse hatte wir ja schon bei der Besprechung der $SU(2)$ -Gruppe besprochen. Daher beschränken wir uns hier auf die Diskussion der Boosts in x^3 -Richtung.

Boosts in \mathbb{R}^4 in x^3 -Richtung mit $\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\alpha)$ stellen eine 1-Parameter-Untergruppe von $O(3, 1)$ dar:

$$R_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}.$$

Das entsprechende Basiselement der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ ist

$$K_3 := \frac{d}{d\alpha} \left(\begin{array}{cccc} \cosh \alpha & 0 & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{array} \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich ist $R_3(\alpha) = \exp(\alpha K_3)$, den

$$K_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K_3^3 = K_3, K_3^4 = K_3^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \exp(\alpha K_3) &= \mathbb{1} + \alpha K_3 + \frac{1}{2!} \alpha^2 K_3^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 K_3^3 + \frac{1}{4!} \alpha^4 K_3^4 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 + \dots & 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\alpha + \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots & 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & 0 & \sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \alpha & 0 & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jetzt geht man mittels \mathfrak{X} von der Boost-Richtung x^3 in den Raum $i \cdot \mathfrak{u}(2, \mathbb{C})$ über und erhält für $y^3 = (0, 0, 0, 1)^T$ gerade $\mathfrak{X}(y^3) = \sigma_3$. Die entsprechende 1-Parameter-Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$ ist

$$U(\alpha) = \exp(\alpha \sigma_3) = \exp \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Der entsprechende $SL(2, \mathbb{C})$ -Boost in $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ ist dann

$$\begin{aligned} Ad_{U(\alpha)}(X) &= \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\alpha(x^0 + x^3) & e^\alpha(x^1 - ix^2) \\ e^{-\alpha}(x^1 + ix^2) & e^{-\alpha}(x^0 - x^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} e^{2\alpha}(x^0 + x^3) & (x^1 - ix^2) \\ (x^1 + ix^2) & e^{-2\alpha}(x^0 - x^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x'^0 + x'^3) & (x'^1 - ix'^2) \\ (x'^1 + ix'^2) & (x'^0 - x'^3) \end{pmatrix} \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$x'^0 = x^0 \cosh 2\alpha + x^3 \sinh 2\alpha ,$$

$$x'^1 = x^1 , \quad x'^2 = x^2 ,$$

$$x'^3 = x^0 \sinh 2\alpha + x^3 \cosh 2\alpha .$$

Wenn man wissen möchte welcher Drehung dies in \mathbb{R}^4 entspricht, dann geht man von $Ad_{U(\alpha)}(X)$ zu $\tilde{A}d_{U(\alpha)}(x)$ über:

$$\begin{aligned}
x' &= \tilde{A}d_{U(\alpha)}(x) = \mathfrak{X}^{-1} Ad_{U(\alpha)} \mathfrak{X}(x) \\
&= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} e^{2\alpha}(x^0 + x^3) & (x^1 - ix^2) \\ (x^1 + ix^2) & e^{-2\alpha}(x^0 - x^3) \end{pmatrix} \\
&= \mathfrak{X}^{-1} \begin{pmatrix} (x'^0 + x'^3) & (x'^1 - ix'^2) \\ (x'^1 + ix'^2) & (x'^0 - x'^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh 2\alpha & 0 & 0 & \sinh 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh 2\alpha & & & \cosh 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Das heißt, einem $SL(2, \mathbb{C})$ -Boost in Richtung der x^3 -Achse mit $\alpha = \tanh^{-1}(\frac{v}{c})$ in $i \cdot \mathfrak{u}(2)$ entspricht ein $SO(3, 1)$ -Boost in Richtung der x^3 -Achse mit 2α in \mathbb{R}^3 . Umgekehrt ausgedrückt gibt es also zu jedem $SO(3, 1)$ -Boost einen entsprechende $SL(2, \mathbb{C})$ -Boost - und damit ist die Projektion $P : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(3, 1)$ surjektiv. \square

Für die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{so}(3)$ Lie-Algebra hatten wir in 26.6.18 gefunden

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} ,$$

und für die Vertauschungsrelationen der $\mathfrak{su}(2)$ Lie-Algebra in 26.6.20

$$S_k := \frac{1}{2i} \sigma_k \quad \Rightarrow \quad [S_i, S_j] = f_{ij}{}^k S_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk}$$

Dies trifft natürlich auch für die reinen Drehungen der Lorentz-Gruppe zu, da $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{so}(3, 1)$, bzw. $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Jetzt betrachten wir die Boosts der Lorentz-Gruppe:

Seien $R_1(\alpha), R_2(\alpha), R_3(\alpha) \in SO(3, 1)$ Boosts mit $\alpha = \tanh^{-1}(v/c)$ in Richtung der x^1, x^2, x^3 -Achse in \mathbb{R}^4 . Dann sind die entsprechenden Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ gerade die Matrizen

$$K_1 = \frac{d}{d\alpha} R_1(\alpha)|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26.7.7)$$

Daraus folgen die Vertauschungsrelationen:

$$[K_1, K_2] = -J_3, \quad [K_2, K_3] = -J_1, \quad [K_3, K_1] = -J_2,$$

$$[J_1, K_2] = K_3, \quad [J_2, K_3] = K_1, \quad [J_3, K_1] = K_2,$$

also

$$[K_i, K_j] = \bar{f}_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } \bar{f}_{ij}{}^k = -\epsilon_{ijk},$$

$$[J_i, K_j] = f_{ij}{}^k K_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk},$$

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk}. \quad (26.7.8)$$

Häufig faßt man die Generatoren der Drehungen und Boosts der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ in einer einheitlichen Schreibweise zusammen. Sei E_1 eine Drehung um x^1 in der (x^2, x^3) -Ebene, P_1 ein Boost in x^1 -Richtung in der (x^0, x^1) -Ebene, dann kann man die folgenden Generatoren definieren:

$$m_{[23]} := -J_1 \quad \Rightarrow \quad m_{[23]}{}^\mu{}_\nu = \delta_2^\mu \eta_{\nu 3} - \delta_3^\mu \eta_{2\nu},$$

$$m_{[01]} := K_1 \quad \Rightarrow \quad m_{[01]}{}^\mu{}_\nu = \delta_0^\mu \eta_{\nu 1} - \delta_1^\mu \eta_{0\nu},$$

oder allgemein

$$m_{[\rho\sigma]}{}^\mu{}_\nu = \delta_\rho^\mu \eta_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu \eta_{\rho\nu} = -m_{[\sigma\rho]}{}^\mu{}_\nu. \quad (26.7.9)$$

Damit folgen die Vertauschungsrelationen

$$[m_{[\mu\nu]}, m_{[\rho\sigma]}] = \eta_{\nu\rho} m_{[\mu\sigma]} - \eta_{\mu\rho} m_{[\nu\sigma]} - \eta_{\nu\sigma} m_{[\mu\rho]} + \eta_{\mu\sigma} m_{[\nu\rho]} \quad (26.7.10)$$

$$= f_{[\mu\nu][\rho\sigma]}^{[\kappa\tau]} m_{[\kappa\tau]} ,$$

mit den Strukturkonstanten

$$f_{[\mu\nu][\rho\sigma]}^{[\kappa\tau]} = \eta_{\nu\rho} \delta_\mu^\kappa \delta_\sigma^\tau - \eta_{\mu\rho} \delta_\nu^\kappa \delta_\sigma^\tau - \eta_{\nu\sigma} \delta_\mu^\kappa \delta_\rho^\tau + \eta_{\mu\sigma} \delta_\nu^\kappa \delta_\rho^\tau . \quad (26.7.11)$$

Beweis: Sei zunächst $\mu = \rho$ und $\nu = \sigma$, dann ist

$$[m_{[\rho\sigma]}, m_{[\rho\sigma]}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\sigma\rho} m_{[\rho\sigma]} - \eta_{\rho\rho} m_{[\sigma\sigma]} - \eta_{\sigma\sigma} m_{[\rho\rho]} + \eta_{\rho\sigma} m_{[\sigma\rho]} = 0 .$$

Sei $\mu = 2, \nu = 3, \rho = 3, \sigma = 1$, dann ist

$$[m_{[23]}, m_{[31]}] = [-J_1, -J_2] = [J_1, J_2] = J_3 = -m_{[12]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{33} m_{[21]} - \eta_{23} m_{[31]} - \eta_{31} m_{[23]} + \eta_{21} m_{[33]} = \eta_{33} m_{[21]} = m_{[21]} = -m_{[12]} .$$

Sei $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 0, \sigma = 2$, dann ist

$$[m_{[01]}, m_{[02]}] = [K_1, K_2] = -J_3 = m_{[12]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{10} m_{[02]} - \eta_{00} m_{[12]} - \eta_{12} m_{[00]} + \eta_{02} m_{[10]} = -\eta_{00} m_{[12]} = m_{[12]} .$$

Sei $\mu = 2, \nu = 3, \rho = 0, \sigma = 2$, dann ist

$$[m_{[23]}, m_{[02]}] = [-J_1, K_2] = -[J_1, K_2] = -K_3 = -m_{[03]} \quad \text{und}$$

$$\eta_{30} m_{[22]} - \eta_{20} m_{[32]} - \eta_{32} m_{[20]} + \eta_{22} m_{[30]} = \eta_{22} m_{[30]} = m_{[30]} = -m_{[03]} . \quad \square$$

Mit diesen Generatoren können wir dann eine Lorentz-Transformation aus $SO(3, 1)$ schreiben als:

$$\Lambda = \exp(\theta^i J_i + \alpha^i K_i) \quad (26.7.12)$$

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} m_{[\rho\sigma]}\right) , \quad \text{mit } \lambda^{\rho\sigma} = -\lambda^{\sigma\rho} . \quad (26.7.13)$$

Da $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3, 1)$ können wir eine entsprechende Darstellung der Algebra $m_{[\rho\sigma]}$ auch als Basis in $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ verwenden.

Häufig verwendet man auch die infinitesimale Version von 26.7.13. Seien also die $\lambda^{\rho\sigma}$ sehr klein, dann folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^\mu &\simeq \delta_\nu^\mu + \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (m_{[\rho\sigma]})_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} (\delta_\rho^\mu \eta_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu \eta_{\rho\nu}) \\ &= \delta_\nu^\mu + \frac{1}{2} (\lambda^{\mu\sigma} \eta_{\nu\sigma} - \lambda^{\rho\mu} \eta_{\rho\nu}) = \delta_\nu^\mu + \frac{1}{2} (\lambda^{\mu\sigma} \eta_{\nu\sigma} + \lambda^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu}) \\ &= \delta_\nu^\mu + \lambda_\nu^\mu . \end{aligned} \quad (26.7.14)$$

26.8 Darstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren

In der Physik spielen nun aber nicht die Lie-Gruppen als solche eine fundamentale Rolle, sondern ihre Darstellungen als lineare Operatoren auf Vektorräumen. Wir folgen in diesem Abschnitt vorwiegend Hall (2003).

Definition 26.8.1 Sei G eine Lie-Gruppe, V ein komplexer Vektorraum, $GL(V)$ die Menge aller bijektiven, beschränkten (und damit auch stetigen), linearen Operatoren $B : V \rightarrow V$, also die Automorphismengruppe von V , dann heißt ein stetiger Homomorphismus Π

$$\Pi : G \rightarrow GL(V)$$

eine Darstellung von G in V . Unter der Stetigkeit von Π ist hier die sog. starke Stetigkeit gemeint, d.h.

$$A_i, A \in G, v \in V, \lim_{i \rightarrow \infty} \|A - A_i\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\Pi(A)v - \Pi(A_i)v\| \rightarrow 0.$$

Die Darstellung einer Lie-Gruppe heißt irreduzibel, wenn kein von $\{0\}$ verschiedener Unterraum W in V existiert, der bzgl. aller $\Pi(g)$ für $g \in G$ invariant ist, d.h. für den gilt $\Pi(g) \subseteq W$.

Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra, V ein komplexer Vektorraum, $\mathfrak{gl}(V)$ die Menge aller bijektiven, linearen Operatoren $B : V \rightarrow V$, also die Automorphismengruppe von V , dann heißt der Homomorphismus

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

eine Darstellung von \mathfrak{g} in V .

Die Darstellung einer Lie-Algebra heißt irreduzibel, wenn kein von $\{0\}$ verschiedener Unterraum W in V existiert, der bzgl. aller $\pi(g)$ für $g \in \mathfrak{g}$ invariant ist, d.h. für den gilt $\pi(g) \subseteq W$.

Die Darstellung einer Lie-Gruppe, bzw. einer Lie-Algebra, heißt treu, wenn Π , bzw. π , injektiv ist.

Wenn $\dim V = n < \infty$, dann ist natürlich $GL(V) \cong GL(n, \mathbb{C})$, bzw. $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Satz 26.8.2 Seien G und H zwei Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} , sei weiter $\Pi : G \rightarrow H$ ein Lie-Gruppen Homomorphismus, dann gibt es einen eindeutigen, reellen, linearen Lie-Algebra Homomorphismus $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ mit

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \text{für } X \in \mathfrak{g}. \quad (26.8.1)$$

Beweis: Die Lie-Gruppen G und H sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ihre Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} sind per Definition die Tangentialräume an der Stelle der Identität $e \in G$ und $e' \in H$, also $\mathfrak{g} = T_e G$ und $\mathfrak{h} = T_{e'} H$. Sei nun $\Pi : G \rightarrow H$, dann existiert mit

der Tangentialabbildung Π_* (d.h. dem Differential $d\Pi$) an der Stelle e eine Abbildung von \mathfrak{g} nach \mathfrak{h} . Für kleine $t \in \mathbb{R}$ gilt, daß $A(t) = e^{tX}$ mit $X \in \mathfrak{g}$ in einer Umgebung von $e \in G$ liegt und $\Pi(e^{tX}) = B(t) \in H$ in einer Umgebung von $e' \in H$ liegt und sich deshalb als $B(t) = e^{tY}$ mit $Y \in \mathfrak{h}$ schreiben läßt. Damit können wir die Abbildung $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ definieren als:

$$\pi := \Pi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} \quad \text{mit} \quad \pi(X) := \Pi_*(e^{tX})|_{t=0} = Y .$$

Diese Abbildung π ist tatsächlich linear, denn mithilfe der Lie-Produktformel 26.3.11 und der Stetigkeit des Homomorphismus Π ergibt sich

$$\Pi(e^{tsX}) = e^{tsY} = \begin{cases} e^{t\pi(sX)} \\ e^{ts\pi(X)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \pi(sX) = s\pi(X) \quad \text{für } s \in \mathbb{R} ,$$

$$\begin{aligned} e^{t\pi(X+Y)} &= e^{\pi(t(X+Y))} = \Pi(e^{t(X+Y)}) \\ &= \Pi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{t}{m}X} e^{\frac{t}{m}Y})^m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pi\left((e^{\frac{t}{m}X} e^{\frac{t}{m}Y})^m\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\Pi(e^{\frac{t}{m}X})\Pi(e^{\frac{t}{m}Y}))^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{t}{m}\pi(X)} e^{\frac{t}{m}\pi(Y)})^m \\ &= e^{t\pi(X)+t\pi(Y)} = e^{t(\pi(X)+\pi(Y))} \quad \Rightarrow \quad \pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y) . \end{aligned}$$

Auch die Eindeutigkeit von π sieht man sofort. Aus der Definition von π folgt ja

$$\pi(X) = Y = \frac{d}{dt} e^{tY} |_{t=0} = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX}) |_{t=0} .$$

Sei nun ψ ein zweiter Lie-Algebra Homomorphismus mit

$$e^{t\psi(X)} = e^{\psi(tX)} \stackrel{!}{=} \Pi(e^{tX}) \quad \Rightarrow$$

$$\psi(X) = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX}) |_{t=0} = \pi(X) . \quad \square$$

Natürlich stellt sich sofort die Frage nach der Umkehrung dieses Satzes: läßt sich aus einem Lie-Algebra Homomorphismus eindeutig auf einen Lie-Gruppen Homomorphismus schließen? Wenn man sich aber daran erinnert, daß die Lie-Algebra \mathfrak{g} der Tangentialraum an die Lie-Gruppe G an der Stelle der Einheit $e \in G$ ist, dann ist eigentlich klar, daß man vom Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit an einer Stelle im Allgemeinen nicht auf die globale Natur der Mannigfaltigkeit zurückschließen kann. Umso bemerkenswerter ist der folgende Satz, daß ein Lie-Algebra Homomorphismus eindeutig einen Lie-Gruppen Homomorphismus induziert, sofern nur die Lie-Gruppe *einfach zusammenhängend* ist!

Satz 26.8.4 Seien G und H zwei Lie-Gruppen mit den zugehörigen Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} , sei weiter $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebra Homomorphismus. Wenn G einfach zusammenhängend ist, dann gibt es einen eindeutigen Lie-Gruppen Homomorphismus $\Pi : G \rightarrow H$ mit

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)} \quad \text{für } X \in \mathfrak{g} .$$

Beweis: Es sei $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ gegeben und es soll also ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\Pi : G \rightarrow H$ konstruiert werden. In einer Umgebung von $1 \in U \subset G$, bzw. $0 \in V \subset \mathfrak{g}$, ist die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus und wir wählen U klein genug, so daß für alle $X, Y \in U$ die inversen Exponentialabbildungen $\log(X), \log(Y) \in V$, und daß in V der Baker-Campbell-Hausdorff Satz gültig ist. Dann gilt ja die Folgerung 26.4.6:

$$\pi(\log(e^X e^Y)) = \log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)}) .$$

Jetzt definieren wir $\Pi : U \subset G \rightarrow H$ als

$$\Pi(A) := e^{\pi(\log(A))}$$

und wollen zeigen, daß diese Abbildung in Fall einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe G auf ganz G definiert werden kann.

Zunächst sieht man, daß diese Definition von Π in einer Umgebung U um 1 den richtigen Zusammenhang mit π ergibt, denn sei $A(t) \in G$ eine Einparameter-Untergruppe von G mit $A(t) = e^{tX}$ in der Umgebung U von 1 , dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi(A(t))|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX})|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Pi(e^{t \log(A)})|_{t=0} = \frac{d}{dt} (e^{\pi(t \log(A))})|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (e^{t\pi(\log(A))})|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\pi(X)}|_{t=0} = \pi(X) . \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich dann aus der obigen BCH-Folgerung sofort, daß Π ein lokaler Homomorphismus auf U ist, denn

$$\begin{aligned} \Pi(AB) &= \exp(\pi(\log(AB))) = \exp(\pi(\log(e^X e^Y))) = \exp(\log(e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)})) \\ &= e^{\pi(X)} e^{\pi(Y)} = e^{\pi(\log(A))} e^{\pi(\log(B))} = \Pi(A)\Pi(B) . \end{aligned}$$

Da G pfadzusammenhängend ist, gibt es für jedes $A \in G$ einen Pfad $A(t)$ von $A(0) = 1$ nach $A(1) = A$. Da das Intervall $[0, 1]$ kompakt ist gibt es eine Zerlegung der Einheit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ so, daß für alle $0 \leq i \leq m-1$ gilt

$$t_i \leq s_1 \leq s_2 \leq t_{i+1} \quad \text{mit} \quad A(s_1)A(s_2)^{-1} \in U .$$

Jetzt kann man $A = A(1) = A(t_m)$ schreiben als

$$A = \{A(t_m)A(t_{m-1})^{-1}\} \{A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\} \cdots \{A(t_1)A(t_0)^{-1}\} A(t_0) .$$

Zum einen ist jeder einzelne Klammerausdruck $\{\cdot\} \in U$ und dafür hatten wir Π definiert, zum anderen ist Π auf U ein Homomorphismus, und damit folgt:

$$\Pi(A) = \Pi\{A(t_m)A(t_{m-1})^{-1}\} \Pi\{A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}\} \cdots \Pi\{A(t_1)A(t_0)^{-1}\}.$$

Weiter hängt Π nicht von der speziellen *Zerlegung der Einheit* ab, denn wenn wir diese Zerlegung verfeinern, indem wir etwa zwischen t_i und t_{i+1} einen weiteren Punkt t_s einfügen, dann erhalten wir mit der lokalen Homomorphismus-Eigenschaft

$$\begin{aligned} \Pi\{A(t_{i+1})A(t_s)^{-1}\} \Pi\{A(t_s)A(t_i)^{-1}\} &= \Pi\{A(t_{i+1})A(t_s)^{-1}A(t_s)A(t_i)^{-1}\} \\ &= \Pi\{A(t_{i+1})A(t_i)^{-1}\} \end{aligned}$$

den gleiche Ausdruck für $\Pi(A)$ wie zuvor.

Jetzt gilt es, die Wegunabhängigkeit dieser Abbildung Π zu zeigen. Seien zwei verschiedene Pfade $A_1(t)$ und $A_2(t)$ zwischen $\mathbb{1} = A_1(0) = A_2(0)$ und $A = A_1(1) = A_2(1)$ gegeben, dann kann man eine Homotopie \tilde{A} definieren

$$\begin{aligned} \tilde{A} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow G \quad \text{mit} \\ \tilde{A}(0, t) = A_1(t), \quad \tilde{A}(1, t) = A_2(t) \quad &\text{und} \quad \tilde{A}(s, 0) = \mathbb{1}, \quad \tilde{A}(s, 1) = A. \end{aligned}$$

Da $[0, 1] \times [0, 1]$ kompakt ist kann man eine *Zerlegung der Einheit* dieses Quadrates durchführen und den Pfad $\tilde{A}(0, t) = A_1(t)$ in endlich vielen Schritten durch Einfügung zusätzlicher Punkte in den Pfad $\tilde{A}(1, t) = A_2(t)$ verschieben, ohne daß sich $\Pi(A)$ ändert. Natürlich funktioniert dieses Verfahren nur dann, wenn es keine 'Löcher' zwischen den Wegen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ gibt, d.h. wenn G einfach zusammenhängend ist! \square

Gerade dieser Satz ist der tiefere Grund für die Anwendung der per Konstruktion einfach zusammenhängenden Universellen Überlagerungsgruppe in der Darstellungstheorie der Lie-Gruppen!

Die Irreduzibilität von Darstellungen zusammenhängender Lie-Gruppen und Darstellungen ihrer Lie-Algebren bedingen einander, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 26.8.6 *Sei Π eine Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G und π die entsprechende Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra \mathfrak{g} , dann ist Π genau dann irreduzibel, wenn π irreduzibel ist.*

Beweis: Sei Π irreduzibel und sei $W \subseteq V$ ein Unterraum des Darstellungsraums V , der unter $\pi(X)$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ invariant ist. Wir wollen zeigen, daß dann W nur $\{0\}$ oder V sein kann. Da G zusammenhängend ist, kann jedes $A \in G$ geschrieben werden als

$$A = e^{X_1} \cdots e^{X_m} \quad \text{mit } X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}.$$

W ist nach Annahme invariant unter $\pi(X)$ und damit auch invariant unter $e^{\pi(X)}$ und damit auch invariant unter

$$\Pi(A) = \Pi(e^{X_1} \dots e^{X_m}) = \Pi(e^{X_1}) \dots \Pi(e^{X_m}) = e^{\pi(X_1)} \dots e^{\pi(X_m)} .$$

Da nun Π irreduzibel ist kann W nur $\{0\}$ oder V sein, und damit ist auch π irreduzibel.

Um die Umkehrung zu zeigen nehmen wir an, daß π irreduzibel ist und $W \subseteq V$ ein Unterraum des Darstellungsraums V , der unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$ invariant ist. Dann ist also W invariant unter $\Pi(e^{tX})$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und damit ist W auch invariant unter

$$\pi(X) = \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX})|_{t=0} .$$

Da nun π irreduzibel ist kann W nur $\{0\}$ oder V sein und damit ist auch Π irreduzibel. \square

Weiter kann man sich die Frage stellen, wie die Irreduzibilität einer endlichdimensionalen, komplexen Darstellung π einer reellen Lie-Algebra \mathfrak{g} mit der Irreduzibilität derselben Darstellung der komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ zusammenhängt?

Satz 26.8.8 *Sei π eine endlichdimensionale, komplexe Darstellung einer reellen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann ist π bzgl. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ genau dann irreduzibel, wenn π bzgl. \mathfrak{g} irreduzibel ist.*

Beweis: Sei also π eine Darstellung einer reellen Lie-Algebra \mathfrak{g} in einen endlichdimensionalen, komplexen Vektorraum V . Sei nun π irreduzibel bzgl. \mathfrak{g} . Wenn nun $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum unter $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ist, dann ist W auch invariant unter $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, und daraus folgt, daß W gleich $\{0\}$ oder V ist, daß also π auch bzgl. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ irreduzibel ist.

Sei umgekehrt π irreduzibel bzgl. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Wenn nun $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum unter \mathfrak{g} ist, dann ist W auch invariant unter $\pi(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, und daraus folgt, daß W gleich $\{0\}$ oder V ist, daß also π auch bzgl. \mathfrak{g} irreduzibel ist. \square

Definition 26.8.10 *Eine endlichdimensionale Darstellung einer Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt vollständig reduzibel, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe endlich vieler irreduzibler Darstellungen ist.*

Eine Lie-Gruppe oder Lie-Algebra heißt vollständig reduzibel, wenn jede endlichdimensionale Darstellung vollständig reduzibel ist.

Besonders interessant für Physiker sind natürlich unitäre Darstellungen von Lie-Algebren in Hilbert-Räumen.

Definition 26.8.11 *Seien G eine Lie-Gruppe, \mathcal{H} ein endlich- oder unendlichdimensionaler Hilbert-Raum und $U(\mathcal{H})$ eine Gruppe unitärer Operatoren auf \mathcal{H} , dann heißt der Homomorphismus $\Pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung von G .*

Eine unitäre Darstellung heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und \mathcal{H} keinen unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$ abgeschlossenen invarianten Unterraum gibt.

Für endlichdimensionale unitäre Darstellungen findet man:

Satz 26.8.12 *Sei G eine Lie-Gruppe und Π eine endlichdimensionale unitäre Darstellung von G auf den endlichdimensionalen Hilbert-Raum \mathcal{H} . Dann ist Π vollständig reduzibel.*

Beweis: Sei $W \subseteq \mathcal{H}$ ein invarianter Unterraum unter $\Pi(A)$ für alle $A \in G$, dann folgt aus der Existenz des Skalarprodukts $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$. Nun ist auch W^\perp ein invarianter Unterraum, denn mit $v \in W^\perp$, $w \in W$ gilt

$$\langle \Pi(A)v \mid w \rangle = \langle v \mid \Pi(A)^\dagger w \rangle = \langle v \mid \Pi(A)^{-1}w \rangle = \langle v \mid \Pi(A^{-1})w \rangle = 0 .$$

Wenn nun \mathcal{H} nicht irreduzibel ist, dann gibt es einen nichttrivialen invarianten Unterraum $W \subset \mathcal{H}$ mit einem invarianten Komplement W^\perp mit $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$. Entweder sind W und W^\perp irreduzibel, oder es gibt in ihnen wiederum invariante Unterräume. Dieses Verfahren kann man fortsetzen, bis man alle irreduziblen Unterräume gefunden hat - und da wir von einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum ausgegangen sind, kommt man auch mit endlich vielen Schritten zum Ziel einer vollständigen Zerlegung von \mathcal{H} in irreduzible Unterräume. \square

In Kapitel 26.2 hatten wir gesehen, daß man für eine kompakte Lie-Gruppe mittels eines biinvarianten Haar-Maßes (26.2.3) das Hurwitz-Integral über die Lie-Gruppe definieren kann. Hiervon macht der Beweis des folgenden Satzes von Weyl, bekannt auch als „Weyls Unitaritäts-Trick“ Gebrauch.

Satz 26.8.14 (Weyl) *Jede kompakte Lie-Gruppe ist vollständig reduzibel.*

Beweis: Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und Π eine endlichdimensionale Darstellung von G auf einen Vektorraum V mit einem beliebigen inneren Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Dann kann man mittels eines linksinvarianten Haar-Maßes μ ein neues inneres Produkt auf V definieren, bzgl. dem Π eine unitäre Darstellung ist. Seien $v_1, v_2 \in V$, dann definieren wir

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle_G := \int_G \langle \Pi(g)v_1 \mid \Pi(g)v_2 \rangle d\mu(g) .$$

Aus der Linksinvarianz des Haar-Maßes μ folgt nun die Unitarität von Π bzgl. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G$, denn sei $h \in G$, dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \Pi(h)v_1 \mid \Pi(h)v_2 \rangle_G &:= \int_G \langle \Pi(g)\Pi(h)v_1 \mid \Pi(g)\Pi(h)v_2 \rangle d\mu(g) \\ &= \int_G \langle \Pi(gh)v_1 \mid \Pi(gh)v_2 \rangle d\mu(g) \\ &= \int_G \langle \Pi(gh)v_1 \mid \Pi(gh)v_2 \rangle d\mu(gh) \end{aligned}$$

$$= \langle v_1 \mid v_2 \rangle_G .$$

Aus dem vorherigen Satz über die vollständige Reduzibilität endlichdimensionaler unitärer Darstellungen folgt jetzt die Behauptung. \square

Nach diesem schönen Ergebnis für kompakte Lie-Gruppen stellt sich natürlich die Frage nach unitären Darstellungen nichtkompakter Lie-Gruppen. Hier findet man, daß es keine endlichdimensionalen, treuen Darstellungen gibt und man somit gezwungen ist, unendlichdimensionale Darstellungen zu betrachten.

Satz 26.8.16 *Sei G eine einfach zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppe, dann gibt es keine unitären, treuen Darstellungen auf einen endlich-dimensionalen Hilbert-Raum \mathcal{H} .*

Beweis: Sei Π eine unitäre Darstellung von G auf einen endlichdimensionalen Hilbert-Raum \mathcal{H} der Dimension n . Dann ist das Bild $\Pi(G)$ eine Teilmenge der Lie-Gruppe der n -dimensionalen, unitären Matrizen $\{U(n)\}$. Nun ist die Menge $\{U(n)\}$ eine beschränkte und abgeschlossene Untermenge von $\{GL(n, \mathbb{C})\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ und damit nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe etwa: Fischer u. Kaul (2001), S. 49) eine kompakte Menge. Und ebenso ist die Menge $\Pi(G) \subset \{U(n)\}$ eine beschränkte und abgeschlossene Untermenge von \mathbb{R}^{2n} und damit kompakt.

Der Kern von Π ist ein Normalteiler von G . Da G nach Voraussetzung eine einfache Lie-Gruppe ist hat sie keine anderen Normalteiler als G oder $\mathbb{1}_G$. Wenn $\ker(\Pi) = G$ ist, dann werden alle Elemente von G auf $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ abgebildet und die Darstellung Π ist nicht treu sondern trivial. Wenn dagegen $\ker(\Pi) = \mathbb{1}_G$ ist, dann ist die Darstellung treu und auf dem Bild von Π invertierbar, d.h. $\Pi(G)$ ist isomorph zu G . Da Π^{-1} stetig ist folgt aus der Kompaktheit von $\Pi(G)$, daß auch $\Pi^{-1}(\Pi(G)) = G$ kompakt ist. Dies ist ein Widerspruch, also gibt es keine endlichdimensionale, unitäre, treue Darstellung $\Pi(G)$. \square

Aus diesem Satz folgert man in der Literatur, daß es unitäre, treue Darstellungen für einfach zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppen eben nur auf unendlichdimensionalen Hilbert-Räumen geben kann. Aber an welcher Stelle bricht dann eigentlich der obige Beweis im Falle unendlichdimensionaler Hilbert-Räume zusammen? Die Menge der unitären Operatoren $\{U\}$ auf einem unendlichdimensionalen Hilbert-Raum \mathcal{H} bildet einen unendlichdimensionalen normierten Vektorraum, einen Banach-Raum, und hierfür wird in der Funktionalanalysis der folgende Satz bewiesen (siehe etwa Werner (2005), S. 27):

Satz 26.8.18 *Ein normierter Vektorraum ist genau dann endlichdimensional, wenn jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge kompakt ist.*

Wenn wir also mit der Menge der unitären Operatoren $\{U\}$ von einem endlichdimensionalen zu einem unendlichdimensionalen normierten Vektorraum übergehen, dann ist die Abschließung dieser beschränkten Menge nicht mehr kompakt und damit ist die Argumentation im Beweis des obigen Satzes nicht mehr möglich.

26.9 Produktdarstellungen

Häufig kommen in der Physik Produktdarstellungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren vor. Seien G eine Lie-Gruppe, $A \in G$, Π_1 und Π_2 zwei Darstellungen von G auf den endlichdimensionalen Darstellungs-Räumen V_1 und V_2 , dann wird die Produktdarstellung $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ definiert als

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(A) := \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A) .$$

Für die der Lie-Gruppe G entsprechende Lie-Algebra \mathfrak{g} folgt dann:

Satz 26.9.1 *Seien $X \in \mathfrak{g}$, π_1 und π_2 Darstellungen von \mathfrak{g} auf V_1 und V_2 , die den Darstellungen Π_1 und Π_2 von G entsprechen, dann gilt:*

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X) = \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(X) .$$

Beweis: Seien $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, dann folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(X)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{dt} (\Pi_1(e^{tX})v_1 \otimes \Pi_2(e^{tX})v_2)_{t=0} \\ &= \pi_1(X)v_1 \otimes \mathbb{1}v_2 + \mathbb{1}v_1 \otimes \pi_2(X)v_2 . \end{aligned} \quad \square$$

Wenn π_1 und π_2 irreduzible Darstellungen von \mathfrak{g} sind, dann ist $\pi_1 \otimes \pi_2$ im Allgemeinen reduzibel. Im Fall von $\mathfrak{su}(2)$ ist die Darstellung von $\pi_1 \otimes \pi_2$ als einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen gerade die allen Physikern bekannte Clebsch-Gordon-Theorie (hierzu später mehr).

Den obigen Satz kann man jetzt mühelos auf das direkte Produkt der Darstellungen zweier verschiedener Lie-Gruppen, bzw. Lie-Algebren verallgemeinern. Seien G und H Lie-Gruppe, $A \in G$, $B \in H$, Π_1 und Π_2 zwei Darstellungen von G und H auf den endlichdimensionalen Darstellungs-Räumen V_1 und V_2 , dann wird die Produktdarstellung $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ auf $V_1 \otimes V_2$ definiert als

$$\Pi_1 \otimes \Pi_2(A, B) := \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(B) .$$

Für die den Lie-Gruppen G und H entsprechenden Lie-Algebren \mathfrak{g} und \mathfrak{h} folgt dann:

Satz 26.9.3 *Sei $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ π_1 und π_2 Darstellungen von \mathfrak{g} und \mathfrak{h} auf V_1 und V_2 , die den Darstellungen Π_1 und Π_2 von G und H entsprechen, dann gilt:*

$$\pi_1 \otimes \pi_2(X, Y) = \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(Y) .$$

Beweis: Seien $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, dann folgt wie oben mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \pi_1 \otimes \pi_2(X, Y)(v_1 \otimes v_2) &= \frac{d}{dt} (\Pi_1(e^{tX})v_1 \otimes \Pi_2(e^{tY})v_2)_{t=0} \\ &= \pi_1(X)v_1 \otimes \mathbb{1}v_2 + \mathbb{1}v_1 \otimes \pi_2(Y)v_2 . \end{aligned} \quad \square$$

26.10 Das Lemma von Schur

Wir hatten gerade gesehen, daß es unitäre, treue Darstellungen für einfache, zusammenhängende, nichtkompakte Lie-Gruppen nur auf unendlichdimensionalen Hilbert-Räumen geben kann - und dies führt uns zwangsläufig zu einem kleinen Ausflug in die Funktionalanalysis. Wir erinnern ohne Beweise an die Spektralsätze für lineare, beschränkte, selbstadjungierte Operatoren in Hilbert-Räumen (siehe etwa die kurze Zusammenfassung in Barut u. Raczka (1986), S. 649, oder die ausführliche Besprechung in dem schönen Buch über Funktionalanalysis von Werner (2005), S. 313 ff.).

Satz 26.10.1 (Rellich-Hilbert-Schmidt) *Sei X ein linearer, beschränkter, kompakter, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum \mathcal{H} , dann gilt:*

$$X = \sum_{i=1}^N \lambda_i E_i, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{H}_i \text{ mit } X\mathcal{H}_0 = 0, \quad \text{und } \lim_{\substack{i \geq 1 \\ i \rightarrow \infty}} |\lambda_i| = 0,$$

mit einem endlich- oder unendlichdimensionalen Kern \mathcal{H}_0 und mit den Orthogonalprojektoren E_i mit $1 \leq i \leq N \leq \infty$ auf die endlichdimensionalen Eigenräume $\mathcal{H}_i = E_i \mathcal{H}$ mit $X|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$ für $|u_i\rangle \in \mathcal{H}_i$.

Wenn man die Forderung der Kompaktheit aufgibt, dann ist das Spektrum der linearen, beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbert-Raum \mathcal{H} nicht mehr zwangsläufig diskret und man muß den obigen Spektralsatz für kontinuierliche Spektren erweitern. Hierzu führt man als Verallgemeinerung der obigen Orthogonalprojektoren E_i das sog. Spektralmaß $E(\lambda)$ ein:

Definition 26.10.2 *Sei $\lambda \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, dann heißt die Abbildung $E : \mathbb{R} \rightarrow \{\text{Menge der linearen, beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf } \mathcal{H}\}$ ein Spektralmaß, wenn gilt:*

$$E(-\infty) = \hat{0}, \quad E(+\infty) = \mathbb{1},$$

$$E(\lambda)^\dagger = E(\lambda),$$

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)),$$

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} E(\lambda + \mu) = E(\lambda).$$

Mit Hilfe dieses Spektralmaßes kann man jetzt den Spektralsatz für lineare, beschränkte, selbstadjungierte Operatoren in Hilbert-Räumen formulieren.

Satz 26.10.3 (Hilbert-v.Neumann) Sei X ein linearer, beschränkter, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum \mathcal{H} , dann gibt es ein Spektralmaß $E(\lambda)$ mit

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda),$$

wobei diese Darstellung im 'schwachen' Sinne zu verstehen ist, d.h. mit $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle Xu | v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle E(\lambda)u | v \rangle.$$

Weiter gilt: ein beschränkter, linearer Operator Y auf \mathcal{H} kommutiert genau dann mit X , wenn er mit allen $E(\lambda)$ kommutiert.

Issai Schur hat seinen berühmten Satz, das sog. Lemma von Schur für endlichdimensionale Matrizen bewiesen. Wir folgen hier dem Hilbert-Raum-Beweis in Knapp (1986), S. 12.

Satz 26.10.4 (Lemma von Schur) Eine unitäre Darstellung Π einer Liegruppe G auf einem Hilbert-Raum \mathcal{H} ist genau dann irreduzibel, wenn die einzigen beschränkten, linearen Operatoren auf \mathcal{H} , die mit allen $\Pi(g)$ mit $g \in G$ kommutieren, Vielfache der Einheit sind, d.h. $c\mathbb{1}$ mit $c \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei \mathcal{H} reduzibel und $W \subset \mathcal{H}$ ein nichttrivialer, abgeschlossener, invarianter Unterraum, dann ist der Projektor auf W ein beschränkter, linearer Operator, der kein Vielfaches von $\mathbb{1}$ ist und mit allen $\Pi(g)$ kommutiert. Oder negativ ausgedrückt: wenn es außer dem Vielfachen von $\mathbb{1}$ keinen beschränkten, linearen Operator gibt, der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, dann ist \mathcal{H} irreduzibel.

Für die umgekehrte Richtung argumentiert man: sei Y ein beschränkter, linearer Operator auf \mathcal{H} der kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist und der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, dann gilt wegen

$$[Y, \Pi(g)] = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [Y, \Pi(g)]^\dagger = [\Pi(g)^\dagger, Y^\dagger] = [\Pi(g)^{-1}, Y^\dagger] = [\Pi(-g), Y^\dagger],$$

daß auch Y^\dagger mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, und ebenso die beiden selbstadjungierten Operatoren

$$Z_1 := \frac{1}{2}(Y + Y^\dagger), \quad Z_2 := \frac{1}{2i}(Y - Y^\dagger).$$

Da $Y = Z_1 + iZ_2$ kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist, so ist also zumindest Z_1 oder Z_2 kein Vielfaches der $\mathbb{1}$. Nehmen wir also an Z_1 sei kein Vielfaches der $\mathbb{1}$, dann gibt es nach dem Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf \mathcal{H} zumindest ein Spektralmaß $E(\lambda)$ das kein Vielfaches der $\mathbb{1}$ ist und das mit allen $\Pi(g)$ kommutiert, also ist \mathcal{H} reduzibel. Oder negativ ausgedrückt: wenn \mathcal{H} irreduzibel ist, dann gibt es außer dem Vielfachen von $\mathbb{1}$ keinen beschränkten, linearen Operator, der mit allen $\Pi(g)$ kommutiert. \square

26.11 Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ und $SO(3)$

Dieses Thema findet sich in jedem Lehrbuch über Quantenmechanik unter dem Stichwort 'Drehimpuls-Operatoren'. Wir wollen hier die Darstellungen von $SO(3)$ und $SU(2)$, bzw. von $\mathfrak{su}(2)$, etwas ausführlicher und im Zusammenhang mit den vorigen Kapiteln behandeln und folgen Hall (2003), S. 97 ff. und van der Waerden (1974), S. 90 ff.

Sei V_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ der folgende $(n+1)$ -dimensionale, komplexe Vektorraum, der aus den $(n+1)$ homogenen Polynomen n -ten Grades in zwei komplexen Variablen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gebildet wird:

$$V_n := \left\{ f(z_1, z_2) := \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k}, \text{ mit } a_k, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}. \quad (26.11.1)$$

Mit dem folgenden Skalarprodukt kann man V_n zu einem $(n+1)$ -dimensionalen Hilbert-Raum machen.

$$\langle f | f' \rangle := \sum_{k=0}^n a_k^* a'_k. \quad (26.11.2)$$

Sei $U \in SU(2)$ und wirke auf $\mathbb{C}^2 = \{z := (z_1, z_2)^T \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ mit

$$U : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (26.11.3)$$

dann kann man die folgende $(n+1)$ -dimensionale Darstellung von $SU(2)$ auf V_n definieren:

$$(\Pi_n(U)f)(z) := f(U^{-1}z), \quad \text{d.h.} \quad (26.11.4)$$

$$(\Pi_n(U)f)(z_1, z_2)^T := \sum_{k=0}^n a_k ((U^{-1})_{11}z_1 + (U^{-1})_{12}z_2)^{n-k} ((U^{-1})_{21}z_1 + (U^{-1})_{22}z_2)^k. \quad (26.11.5)$$

Die Inversbildung U^{-1} auf der rechten Seite ist notwendig, damit Π_n tatsächlich ein Homomorphismus und damit eine Darstellung ist, denn

$$(\Pi_n(U_1)(\Pi_n(U_2)f))(z) = (\Pi_n(U_2)f)(U_1^{-1}z) = f(U_2^{-1}U_1^{-1}z) = (\Pi_n(U_1U_2)f)(z).$$

Jetzt kann man zur entsprechenden Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ übergehen. Sei $X \in \mathfrak{su}(2)$, dann gilt

$$\pi_n(X) = \frac{d}{dt} \Pi_n(e^{tX})|_{t=0} \quad \Rightarrow \quad (\pi_n(X)f)(z) = \frac{d}{dt} f(e^{-tX}z)|_{t=0}. \quad (26.11.6)$$

Sei nun $z(t) = (z_1(t), z_2(t))^T := e^{-tX} z \in \mathbb{C}^2$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= -Xz = (-X_{11}z_1 - X_{12}z_2, -X_{21}z_1 - X_{22}z_2)^T, \\ (\pi_n(X)f)(z(t)) &= \frac{d}{dt} f(e^{-tX} z(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{dz_2(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial z_1} (X_{11}z_1 + X_{12}z_2) - \frac{\partial f}{\partial z_2} (X_{21}z_1 + X_{22}z_2). \end{aligned} \quad (26.11.7)$$

Die weitere Behandlung wird einfacher, wenn man die reelle Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ komplexifiziert, also zu $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ übergeht. Der Hintergrund ist, daß man dann die folgende Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ benutzen kann, für die es kein Äquivalent in $\mathfrak{su}(2)$ gibt:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26.11.8)$$

Mit 26.11.7 folgt

$$(\pi_n(\hat{H})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} z_2.$$

Wenn man jetzt $\pi_n(\hat{H})$ statt auf $f(z)$ nur auf $z_1^k z_2^{n-k}$, d.h. ein Basiselement von V_n , anwendet, so erhält man

$$\pi_n(\hat{H})(z_1^k z_2^{n-k}) = -k z_1^k z_2^{n-k} + (n-k) z_1^k z_2^{n-k} = (n-2k) z_1^k z_2^{n-k},$$

und damit ist $z_1^k z_2^{n-k}$ ein Eigenvektor von $\pi_n(\hat{H})$ mit dem Eigenwert $(n-2k)$. Entsprechend erhält man für $\pi_n(\hat{X})$ und $\pi_n(\hat{Y})$

$$(\pi_n(\hat{X})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_1} z_2, \quad (\pi_n(\hat{Y})f)(z) = -\frac{\partial f}{\partial z_2} z_1, \quad \Rightarrow$$

$$\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}) = -k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1}, \quad \pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}) = -(n-k) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \pi_n(\hat{H})\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}) &= \pi_n(\hat{H})(-k z_1^{k-1} z_2^{n-k+1}) = -k(n-2k+2) z_1^{k-1} z_2^{n-k+1} \\ &= (n-2k+2)\pi_n(\hat{X})(z_1^k z_2^{n-k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_n(\hat{H})\pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}) &= \pi_n(\hat{H})(-(n-k) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}) \\ &= -(n-k)(n-2k-2) z_1^{k+1} z_2^{n-k-1} \\ &= (n-2k-2)\pi_n(\hat{Y})(z_1^k z_2^{n-k}). \end{aligned}$$

Das heißt, $\pi_n(\hat{X})$ und $\pi_n(\hat{Y})$ wirken als 'Schiebeoperatoren', welche Eigenvektoren von $\pi_n(\hat{H})$ zu einem Eigenwert m in Eigenvektoren zu $(m+2)$, bzw. $(m-2)$ überführen.

Satz 26.11.1 Die Darstellung $\pi_n : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_n$ ist irreduzibel und bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis: Der Beweis folgt dem üblichen Schema für Irreduzibilitätsbeweise: man nimmt an, daß es einen nicht leeren, invarianten Unterraum $W \subseteq V_n$ gebe und zeigt dann, daß $W = V_n$ ist.

Da W nach Annahme nicht leer ist gibt es ein $w \in W$ mit

$$w = \sum_{k=0}^n a_k z_1^k z_2^{n-k} \quad \text{mit mindestens einem } a_k \neq 0 .$$

Sei nun a_{k_0} der Koeffizient mit dem größten nichtverschwindenden a_k , d.h. $k_0 = \max_{a_k \neq 0}(k)$, dann ist

$$(\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(w) = (\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(a_{k_0} z_1^{k_0} z_2^{n-k_0}) = (-1)^{k_0} k_0! a_{k_0} z_2^n ,$$

da evtl. Terme von w mit $a_k z_1^k z_2^{n-k}$ mit $k < k_0$ beim k_0 -fachen Differenzieren nach z_1 wegfallen. Weil W nach Annahme ein invarianter Unterraum von V_n ist, folgt

$$\begin{aligned} w \in W &\Rightarrow (\pi_n(\hat{X}))^{k_0}(w) \in W &\Rightarrow z_2^n \in W &\Rightarrow \\ &(\pi_n(\hat{Y}))^k(z_2^n) \in W &\Rightarrow z_1^k z_2^{n-k} \in W &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$W = V_n .$$

Sei nun $\pi'_n : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V'_n$ eine andere $(n+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, dann gibt es einen Isomorphismus von V_n in V'_n , da beides $(n+1)$ -dimensionale Vektorräume sind. \square

Damit haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine irreduzible Darstellung in einem $(n+1)$ -dimensionalen Vektorraum V_n gefunden.

Der Anschluß an die übliche Bezeichnungsweise in der Physik wird hergestellt durch die Definition der Spin-Quantenzahl $s := \frac{n}{2} \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ und der z -Komponente des Spins $m := k - s \in \{-s, -s+1, \dots, s\}$:

$$\psi_m^s(z_1, z_2) := z_1^{s+m} z_2^{s-m} := z_1^k z_2^{n-k} . \quad (26.11.9)$$

Die Darstellungen mit ungeradem $n \in \mathbb{N}_0$, bzw. mit halbzahligem Spin, heißen Spinordarstellungen, die Darstellungen mit geradem $n \in \mathbb{N}_0$, bzw. mit ganzzahligem Spin, heißen Vektordarstellungen.

Im Folgenden soll der Unterschied dieser beiden Darstellungen gezeigt werden.

Die Lie-Algebren $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$ sind isomorph, also haben sie bis auf Isomorphie gleiche Darstellungen. Die Darstellungen der Lie-Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ sind aber nicht immer isomorph, da $SU(2)$ einfach zusammenhängend ist, im Gegensatz zu $SO(3)$.

Sei $p : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ ein Isomorphismus zwischen den Lie-Algebren $\mathfrak{su}(2)$ und $\mathfrak{so}(3)$, siehe 26.6.18 und 26.6.20:

$$p(T_k) := E_k, \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei π_n eine $(n+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$. Dann ist $\sigma_n := \pi_n \circ p^{-1}$ eine $(n+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\mathfrak{so}(3)$. Jetzt wollen wir die Darstellung σ_n von $\mathfrak{so}(3)$ in eine Darstellung Σ_n von $SO(3)$ liften und stellen also die Frage: gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $X \in \mathfrak{so}(3)$ eine Darstellung Σ_n von $SO(3)$ mit

$$\Sigma_n(e^X) = e^{\sigma_n(X)} \quad ??$$

Sei nun

$$X := 2\pi E_3 = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \quad \Rightarrow$$

$$e^X = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi & 0 \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n}.$$

Andererseits ist

$$p^{-1}(X) = p^{-1}(2\pi E_3) = 2\pi \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\pi \hat{H} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_n(X) = \pi_n \circ p^{-1}(X) = -i\pi \pi_n(\hat{H}).$$

In einer Basis der Eigenvektoren von \hat{H} ergibt sich

$$\sigma_n(X) = -i\pi \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -(n-2) & \\ & & & & -(n) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{\sigma_n(X)} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi n} & & & & \\ & e^{-i\pi(n-2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{i\pi(n-2)} & \\ & & & & e^{i\pi n} \end{pmatrix}.$$

Wenn jetzt $n \in \mathbb{N}_0$ ungeradzahlig, bzw. die Spin-Quantenzahl halbzahlig ist, dann ist $-\mathbb{1}_{V_n} = e^{\sigma_n(X)} \neq \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n}$, d.h. σ_n von $\mathfrak{su}(2)$ kann nicht nach Σ_n von $SO(3)$ geliftet werden, oder mit anderen Worten: es gibt keine Vektordarstellungen von $SO(3)$ - aber natürlich Spinordarstellungen von $SU(2)$. Wenn $n \in \mathbb{N}_0$ jedoch geradzahlig, bzw. die Spin-Quantenzahl ganzzahlig ist, dann ist tatsächlich $e^{\sigma_n(X)} = \Sigma_n(e^X) = \mathbb{1}_{V_n}$, d.h. σ_n von $\mathfrak{su}(2)$ kann nach Σ_n von $SO(3)$ geliftet werden, oder mit anderen Worten: es gibt Vektordarstellungen von $SO(3)$.

In der Physik kommen häufig Produktdarstellungen von $\mathfrak{su}(2)$ vor, dort unter der Überschrift *Addition von Drehimpulsen*. Wie oben gehen wir wieder von $\mathfrak{su}(2)$ zu $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ über und verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Satz 26.11.1, wo wir gesehen hatten, daß die Darstellung $\pi_m : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_m$ irreduzibel ist. Die Produktdarstellung $\pi_m \otimes \pi_n$ ist nun nicht irreduzibel, aber es gibt hier das folgende schöne Ergebnis.

Satz 26.11.3 (Clebsch-Gordan) *Seien $\pi_m : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_m$ und $\pi_n : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow V_n$ irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit $m \geq n$ und $n > 0$ dann gilt*

$$\pi_m \otimes \pi_n = \pi_{m+n} \oplus \pi_{m+n-2} \oplus \dots \oplus \pi_{m-n}, \quad \text{bzw.}$$

$$V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus \dots \oplus V_{m-n}.$$

Beweis: Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 26.11.1. Wir wählen als Basis in V_m die Eigenvektoren von \hat{H} zu den Eigenwerten $\{m, m-2, \dots, -m\}$, die wir mit $\{u_m, u_{m-2}, \dots, u_{-m}\}$ bezeichnen, und entsprechend als Basis von V_n die Eigenvektoren von \hat{H} $\{v_n, v_{n-2}, \dots, v_{-n}\}$. Damit bilden wir eine Basis von $V_m \otimes V_n$ in der Form $\{u_k \otimes v_l \mid -m \leq k \leq m, -n \leq l \leq n\}$. Auf diese Basis wenden wir nun die Produkt-Darstellung von \hat{H} an, d.h.

$$\begin{aligned} \pi(\hat{H})u_k \otimes v_l &:= (\pi_m(\hat{H}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_n(\hat{H}))u_k \otimes v_l \\ &= (k\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes l\mathbb{1})u_k \otimes v_l \\ &= (k+l)u_k \otimes v_l. \end{aligned}$$

Jetzt betrachtet man die Eigenräume von $\pi(\hat{H})$ in $V_m \otimes V_n$. Für den Eigenwert $m+n$ ist der entsprechende Eigenraum eindimensional und wird durch den Eigenvektor $u_m \otimes v_n$ aufgespannt. Der nächste Eigenwert ist $m+n-2$ und der entsprechende Eigenraum wird aufgespannt von den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{n-2}, u_{m-2} \otimes v_n\}$. Der nächste Eigenwert ist $m+n-4$ und der entsprechende Eigenraum wird aufgespannt von den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{n-4}, u_{m-2} \otimes v_{n-2}, u_{m-4} \otimes v_n\}$. Mit jeder Abnahme des Eigenwerts von $\pi(\hat{H})$ um 2 nimmt also die Dimension der entsprechenden Eigenraums um 1 zu, und zwar solange, bis man den Eigenwert $m-n$ mit den Eigenvektoren $\{u_m \otimes v_{-n}, \dots, u_{m-2n} \otimes v_n\}$ erreicht. Dieser Eigenraum hat die Dimension $n+1$. Weil der Wert des Index l nicht kleiner als

$-n$ werden kann, bleibt die Dimension der folgenden Eigenräume von $\pi(\hat{H})$ mit jeweils um 2 verringertem Eigenwert weiter $n+1$, und zwar solange, bis der Eigenwert $n-m$ mit den Eigenvektoren $\{u_{-m+2n} \otimes v_{-n}, \dots, u_{-m} \otimes v_n\}$ erreicht ist. Beim nächsten Eigenwert $n-m-2$ verringert sich die Dimension des entsprechenden Eigenraums wieder um 1, denn die Eigenvektoren sind ja jetzt $\{u_{-m+2n-2} \otimes v_{-n}, \dots, u_{-m} \otimes v_{n-2}\}$. So nehmen also mit der weiteren Verringerung der Eigenwerte um 2 die Dimensionen der Eigenräume um jeweils 1 ab, bis mit dem Eigenwert $-m-n$ und dem Eigenvektor $u_{-m} \otimes v_{-n}$ wieder ein eindimensionaler Eigenraum erreicht wird.

Jetzt konstruieren wir in $V_m \otimes V_n$ einen Unterraum W_1 : zunächst einmal sei der Vektor $u_m \otimes v_n$ in W_1 . Wir fügen W_1 die folgendermaßen konstruierten Vektoren hinzu: der Schiebeoperator $\pi(\hat{X})$ angewandt auf $u_m \otimes v_n$ ergibt 0 und der Schiebeoperator $\pi(\hat{Y})$ angewandt auf $u_m \otimes v_n$ ergibt einen Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum Eigenwert $m+n-2$. Wenn man nun auf diesen Eigenvektor wiederholt $\pi(\hat{Y})$ anwendet so erhält man eine Kette von Eigenvektoren zu einem jeweils um 2 reduzierten Eigenwert von $\pi(\hat{H})$, bis man endlich beim Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum Eigenwert $-m-n$ angelangt ist. All diese $m+n+1$ Vektoren von W_1 sind linear unabhängig und damit isomorph zu V_{m+n} . Außerdem ist W_1 nach Konstruktion unter $\pi(\hat{H})$, $\pi(\hat{X})$ und $\pi(\hat{Y})$ invariant und damit nach Satz 26.11.1 irreduzibel unter $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Nun ist aber auch $W_1^\perp \subset V_m \otimes V_n$ ein invarianter Unterraum unter $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Nun enthält W_1 Eigenvektoren von $\pi(\hat{H})$ zu den Eigenwerten $m+n$ bis $-m-n$ jeweils mit einer Multiplizität 1, also ist der Eigenvektor von $\pi(\hat{H})$ zum höchste Eigenwert in W_1^\perp ein Eigenvektor zum Eigenwert $m+n-2$, der ebenfalls eine Multiplizität von 1 hat und bei der Anwendung des Schiebeoperators $\pi(\hat{X})$ ebenfalls 0 ergibt. Also können wir in W_1^\perp wie oben mit Hilfe des Schiebeoperators $\pi(\hat{Y})$ einen Unterraum W_2 konstruieren, der dann isomorph zu V_{m+n-2} und irreduzibel ist. Dieses Verfahren setzt man fort, bis alle Eigenvektoren von $\pi(\hat{H})$ in $V_m \otimes V_n$ ausgeschöpft sind, was gerade beim Eigenwert $m-n$, d.h. bei $W_{n+1} \simeq V_{m-n}$ der Fall ist. Alle W_i sind nach Konstruktion irreduzibel und damit gilt:

$$V_m \otimes V_n = W_1 \oplus \dots \oplus W_{n+1} = V_{m+n} \oplus \dots \oplus V_{m-n} . \quad \square$$

26.12 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Wir hatten für die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ der Lorentz-Gruppe in 26.7.8 die folgenden Lie-Klammern gefunden

$$[K_i, K_j] = \bar{f}_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } \bar{f}_{ij}{}^k = -\epsilon_{ijk} ,$$

$$[J_i, K_j] = f_{ij}{}^k K_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} ,$$

$$[J_i, J_j] = f_{ij}{}^k J_k \quad \text{mit } f_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk} .$$

Wenn man jetzt $\mathfrak{so}(3, 1)$ komplexifiziert zu $\mathfrak{so}(3, 1)_{\mathbb{C}}$, d.h. wenn man statt reellen auch komplexe Koeffizienten zuläßt, dann gilt

$$\mathfrak{so}(3, 1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) , \quad (26.12.1)$$

denn mit

$$I_k := \frac{1}{2}(J_k - iK_k) \quad \text{und} \quad I'_k := \frac{1}{2}(J_k + iK_k), \quad (26.12.2)$$

$$J_k = I_k + I'_k \quad \text{und} \quad K_k = i(I_k - I'_k) \quad (26.12.3)$$

gilt

$$\begin{aligned} [I_i, I_j] &= \frac{1}{4}[J_i - iK_i, J_j - iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\} \\ &= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k - i\epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{jik}K_k - (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{J_k - iK_k\} \\ &= \epsilon_{ijk}I_k, \\ [I'_i, I'_j] &= \frac{1}{4}[J_i + iK_i, J_j + iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + i^2[K_i, K_j]\} \\ &= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k + i\epsilon_{ijk}K_k - i\epsilon_{jik}K_k - (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{J_k + iK_k\} \\ &= \epsilon_{ijk}I'_k, \\ [I_i, I'_j] &= \frac{1}{4}[J_i - iK_i, J_j + iK_j] = \frac{1}{4}\{[J_i, J_j] + i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] - i^2[K_i, K_j]\} \\ &= \frac{1}{4}\{\epsilon_{ijk}J_k + i\epsilon_{ijk}K_k + i\epsilon_{jik}K_k + (-1)\epsilon_{ijk}J_k\} = 0. \end{aligned} \quad (26.12.4)$$

Die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ in einen $(n+1)$ -dimensionalen Vektorraum V_n kennen wir aber bereits sehr gut und hatten sie durch die Spin-Quantenzahl $s := \frac{n}{2} \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ charakterisiert. Dabei waren für geradzahlige Werte s Vektordarstellungen möglich und für halbzahlige Werte von s nur Spinordarstellungen.

Wegen $\mathfrak{so}(3, 1)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ kann man jetzt die endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{so}(3, 1)_{\mathbb{C}}$ durch die zwei Werte (s_1, s_2) charakterisieren:

$$\pi_{(s_1, s_2)}(J_k) = \pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k), \quad (26.12.5)$$

$$\pi_{(s_1, s_2)}(K_k) = i(\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} - \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)), \quad (26.12.6)$$

Die Dimension dieser Darstellung ist $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$ und der maximale Spinwert (mathematisch gesprochen: das höchste Gewicht) ist mit $J_k = I_k + I'_k$ gerade $s_1 + s_2$.

Mit $[I_i, I'_j] = 0$ und dem Satz von Baker-Campbell-Hausdorf (26.4.5) wird die entsprechende Darstellung von $SO(3, 1)$ auf $V_{2s_1} \otimes V_{2s_2}$ zu:

$$\Pi_{(s_1, s_2)}(\exp(\theta^k J_k + \alpha^k K_k)) = \exp(\pi_{(s_1, s_2)}(\theta^k J_k + \alpha^k K_k))$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\theta^k \pi_{(s_1, s_2)}(J_k) + \alpha^k \pi_{(s_1, s_2)}(K_k)) \\
&= \exp\{\theta^k (\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)) \\
&\quad + \alpha^k (i(\pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} - \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)))\} \\
&= \exp\{(\theta^k + i\alpha^k) \pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)} + (\theta^k - i\alpha^k) \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)\} \\
&= \exp\{(\theta^k + i\alpha^k) \pi_{(s_1)}(I_k) \otimes \mathbb{1}_{(2s_2+1)}\} \exp\{(\theta^k - i\alpha^k) \mathbb{1}_{(2s_1+1)} \otimes \pi_{(s_2)}(I'_k)\} \\
&= \Pi_{s_1}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)) \otimes \Pi_{s_2}(\exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k)). \tag{26.12.7}
\end{aligned}$$

Die Darstellung $\Pi_{(0,0)}$ ist 1-dimensional und charakterisiert damit einen Lorentz-Skalar.

Die Darstellung $\Pi_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ ist 4-dimensional und die beiden 2-dimensionalen Teilräume V_1 sind isomorph, also ist $\Pi_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ bis auf Isomorphie die übliche Vektordarstellung der Lorentzgruppe.

Die Darstellungen $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$ und $\Pi_{(0, \frac{1}{2})}$ sind 2-dimensionale Spinordarstellungen und charakterisieren einen *linkshändigen*, bzw. einen *rechtshändigen* Weyl-Spinor. Die unterschiedlichen Transformationseigenschaften der Darstellungen $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$ und $\Pi_{(0, \frac{1}{2})}$ heißen in der Physik *Chiralität* - man spricht also von links- bzw. rechtshändiger Chiralität.

In diesen 2-dimensionalen Spinordarstellungen können I_k und I'_k jetzt gerade als $S_k = \frac{1}{2i}\sigma_k$ aus 26.6.20 gewählt werden. Wir betrachten nun zuerst $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$. Da $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$ eine 2-dimensionale Darstellung auf dem 2-dimensionalen Vektorraum \mathbb{C}^2 ist, können wir $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$ als die sog. Fundamentaldarstellung wählen, die mit $I_k : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definiert ist als

$$\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}(\exp(\theta^k J_k + \alpha^k K_k)) = \Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)) = \exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k).$$

Damit transformiert sich der Weyl-Spinor $\psi_L \in \mathbb{C}^2$ unter dieser Darstellung einer Lorentztransformation als

$$\begin{aligned}
\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}(\exp(\theta^k S_k + \alpha^k K_k))\psi_L &= \Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}(\exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k))\psi_L = \exp((\theta^k + i\alpha^k)I_k)\psi_L \\
&= \exp((\theta^k + i\alpha^k)S_k)\psi_L = \exp((\theta^k + i\alpha^k)\frac{1}{2i}\sigma_k)\psi_L \\
&= \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k)\psi_L. \tag{26.12.8}
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für den rechtshändigen Weyl-Spinor $\psi_R \in \mathbb{C}^2$ mit $I'_k = S_k$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{(0, \frac{1}{2})}(\exp(\theta^k S_k + \alpha^k K_k))\psi_R &= \Pi_{(0, \frac{1}{2})}(\exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k))\psi_R = \exp((\theta^k - i\alpha^k)I'_k)\psi_R \\
&= \exp((\theta^k - i\alpha^k)S_k)\psi_R = \exp((\theta^k - i\alpha^k)\frac{1}{2i}\sigma_k)\psi_R \\
&= \exp(\frac{1}{2}(-i\theta^k - \alpha^k)\sigma_k)\psi_R. \tag{26.12.9}
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen $U_L, U_R \in SL(2, \mathbb{C})$ gilt also:

$$U_L := \exp\left(\frac{1}{2}(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k\right) \quad \text{und} \quad U_R := \exp\left(\frac{1}{2}(-i\theta^k - \alpha^k)\sigma_k\right). \quad (26.12.10)$$

Wegen $\sigma_k = \sigma_k^\dagger$ folgt

$$U_L^{-1} = U_R^\dagger \quad \text{bzw.} \quad U_L^\dagger = U_R^{-1}, \quad (26.12.11)$$

$$\psi'_L = U_L \psi_L \quad \text{und} \quad \psi'_R = U_R \psi_R = (U_L^\dagger)^{-1} \psi_R. \quad (26.12.12)$$

Weiter gilt

$$\sigma_2 U_L \sigma_2 = U_R^*, \quad (26.12.13)$$

denn mit $\sigma_2 \sigma_k \sigma_2 = 2\delta_{2,k} \sigma_2 - \sigma_k$ folgt

$$\begin{aligned} \sigma_2(-i\theta^k + \alpha^k)\sigma_k\sigma_2 &= \sigma_2(-i\theta^1 + \alpha^1)\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2(-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2\sigma_2 \\ &\quad \sigma_2(-i\theta^3 + \alpha^3)\sigma_3\sigma_2 \\ &= (-i\theta^1 + \alpha^1)(-1)\sigma_1 + (-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2 + (-i\theta^3 + \alpha^3)(-1)\sigma_3 \\ &= (+i\theta^1 - \alpha^1)\sigma_1 + (-i\theta^2 + \alpha^2)\sigma_2 + (+i\theta^3 - \alpha^3)\sigma_3 \\ &= (-i\theta^1 - \alpha^1)^* \sigma_1^* + (+i\theta^2 + \alpha^2)^* (-1)\sigma_2^* + (-i\theta^3 - \alpha^3)^* \sigma_3^* \\ &= (-i\theta^k - \alpha^k)^* \sigma_k^*. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma_2 U_L = U_R^* \sigma_2 \quad \Rightarrow \quad U_L^T \sigma_2^T = \sigma_2^T U_R^\dagger \quad \Rightarrow \quad U_L^T (-1)\sigma_2 = (-1)\sigma_2 U_L^{-1} \quad \Rightarrow \\ U_L^T \sigma_2 U_L = \sigma_2 \end{aligned} \quad (26.12.14)$$

Häufig geht man in dieser Beziehung von σ_2 über zu $\epsilon := i\sigma_2$, also

$$\epsilon := i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^2 = -\mathbb{1}, \quad \epsilon^T = \epsilon^{-1}, \quad (26.12.15)$$

und erhält

$$U_L^T \epsilon U_L = \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad U_L^T \epsilon^T U_L = \epsilon^T. \quad (26.12.16)$$

Mit

$$U_L^T = (U_R^*)^{-1} \quad \text{und} \quad U_L = (U_R^\dagger)^{-1} \quad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned}
(U_R^*)^{-1} \epsilon (U_R^\dagger)^{-1} = \epsilon &\Rightarrow (U_R^\dagger) \epsilon^T (U_R^*) = \epsilon^T \Rightarrow \\
(U_R^T) \epsilon^T U_R = \epsilon^T &\Rightarrow U_R^T \epsilon U_R = \epsilon.
\end{aligned} \tag{26.12.17}$$

In Analogie zu 26.7.1 spricht man von ϵ als einer Spinor-Metrik.

Jetzt kann man die Frage stellen, wie die beiden Weyl-Spinoren ψ_L und ψ_R zusammenhängen? Dazu betrachten wir ψ_L^* und ψ_R^* unter einer $SL(2, \mathbb{C})$ -Transformation:

$$\begin{aligned}
(\epsilon \psi_L^*)' &:= \epsilon U_L^* \psi_L^* = \epsilon U_L^* (-\epsilon \epsilon) \psi_L^* = U_R (\epsilon \psi_L^*), \\
(\epsilon \psi_R^*)' &:= \epsilon U_R^* \psi_R^* = \epsilon U_R^* (-\epsilon \epsilon) \psi_R^* = -U_L (\epsilon \psi_R^*).
\end{aligned}$$

Da sich also $\epsilon \psi_L^*$ unter U_R transformiert und $\epsilon \psi_R^*$ unter $-U_L$ kann man *definieren*:

$$\psi_L := \epsilon \psi_R^* \Leftrightarrow \psi_R := -\epsilon \psi_L^*. \tag{26.12.18}$$

26.13 Spinor-Indizes

Mit der in 26.12.15 definierten Metrik ϵ kann man den Übergang vom Spinorraum zu dessen Dualraum und ein entsprechendes Skalarprodukte definieren. Hierbei ist für konkrete Rechnungen genauso wie im Fall von Vektoren und Tensoren die Einführung einer Indexnotation notwendig. Allerdings muß man bei Weyl-Spinoren sorgfältig zwischen den linkshändigen $\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}$ und den rechtshändigen $\Pi_{(0, \frac{1}{2})}$ Spinoren unterscheiden, da diese sich bei einer Lorentz-Transformation ja nach verschiedenen Darstellungen transformieren. Insbesondere darf man natürlich nicht über Indizes mit verschiedener Chiralität, d.h. verschiedenem Transformationsverhalten, summieren!

Wir folgen hier einer Version der *Infeld-van der Waerden* Schreibweise, in der die Indizes der linkshändigen Spinoren mit lateinischen Buchstaben, a, b, c, \dots , bezeichnet werden und die Indizes der rechtshändigen Spinoren mit einem Überstrich $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ versehen werden. Infeld und van der Waerden hatten ursprünglich für die Indizes große lateinische Buchstaben A, B, C, \dots und für rechtshändige Spinoren einen Punkt $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dots$ eingeführt, aber es war dann manchmal in Publikationen nicht völlig klar, ob da jetzt ein Punkt war, oder doch nicht :-)

$$\psi_L := \psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = -\epsilon \psi_L^* := \psi_{\bar{a}} = \begin{pmatrix} \psi_{\bar{1}} \\ \psi_{\bar{2}} \end{pmatrix}. \tag{26.13.1}$$

Warum definieren Infeld und van der Waerden $\psi_R = \psi_{\bar{a}}$ mit einem kovarianten Index im Gegensatz zu $\psi_L = \psi^a$? Wir werden gleich sehen, daß diese Schreibweise den Vorteil hat, daß einem Vierervektor x^μ dann ein 2-stufiger Spinor der Form X^{ab} entspricht.

Wir hatten gerade $U_L^T \epsilon U_L = \epsilon$ und $U_R^T \epsilon U_R = \epsilon$ mit dem gleichen ϵ gefunden, also gilt in Komponentenschreibweise $\epsilon_{ab} = \epsilon_{\bar{a}\bar{b}}$ und $\epsilon^{ab} := (\epsilon^{-1})_{ab} = (\epsilon^T)_{ab} = \epsilon_{ba}$.

Bei Indexoperationen mit Spinoren ist aber auch deshalb Sorgfalt geboten, weil die Metrik ϵ antisymmetrisch ist! Und das hat die folgende Konsequenz:

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon_{ab}\psi^b = \begin{pmatrix} \psi^2 \\ -\psi^1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (\psi^b)^T(-\epsilon_{ba}) = (\psi^b)^T(\epsilon^T)_{ba} ,$$

bzw. kurz

$$\psi_a = \epsilon\psi^a = \psi^a\epsilon^T . \quad (26.13.2)$$

Wir folgen jetzt der klaren und schönen Darstellung von Steane (2013), S. 14 ff. Sei etwa $X = x^\mu\sigma_\mu$ die 2×2 Matrix eines Vierervektors x^μ bzgl. der Lorentz-Transformationen in $SL(2, \mathbb{C})$, dann ist $X\psi_L$ keineswegs ein 2-Spinor, denn

$$(X\psi_L)' = U_L X U_L^\dagger U_L \psi_L \neq U_L X \psi_L ,$$

da U_L ja nicht unitär ist.

Da wir jetzt eine Spinor-Metrik zur Verfügung haben, können wir kontravariante Spinoren in kovariante umwandeln, Skalarprodukte bilden, mehrstufige Spinoren verjüngen, usw. Allerdings dürfen wir nicht linkshändige mit rechthändigen Spinoren verjüngen, da sich diese in verschiedenen Räumen befinden! Sei etwa M ein 2-stufiger Spinor, den wir uns aus dem direkten Produkt zweier 1-stufiger Spinoren v, w zusammensetzen, also $M = v \otimes w^T$, dann folgt:

$$M^{ab} = v^a(w^b)^T = \epsilon^{ac}v_c(w^b)^T = \epsilon^{ac}M_c^b ,$$

$$M^{ab} = v^a(w^b)^T = v^a(\epsilon^{bc}w_c)^T = v^a(w_c)^T(\epsilon^{bc})^T = M_a^c\epsilon^{cb} ,$$

$$M_{ab} = v_a w_b^T = \epsilon_{ac}v^c w_b^T = \epsilon_{ac}M^c_b ,$$

$$M_{ab} = v_a w_b^T = v_a(\epsilon_{bc}w^c)^T = v_a(w^c)^T\epsilon_{bc}^T = M_a^c\epsilon_{cb} .$$

Um das Verhalten der möglichen 2-stufigen Spinoren unter Lorentztransformationen zu klassifizieren, setzen wir diese 2-stufigen Spinoren wieder aus dem direkten Produkt der beiden 1-stufigen Spinoren v, w zusammen, also $M = v \otimes w^T$, und finden zunächst für die Transformation der verschiedenen Varianten von v und w^T :

$$(v^a)' = U_L v^a ,$$

$$(v_a)' = (\epsilon_{ac}v^c)' = \epsilon_{ac}U_L v^c = (U_L^T)^{-1}\epsilon_{ac}v^c = (U_L^T)^{-1}v_a ,$$

$$(v^{\bar{a}})' = (\epsilon^{\bar{a}\bar{c}}v_{\bar{c}})' = \epsilon^{\bar{a}\bar{c}}U_R v_{\bar{c}} = (U_R^T)^{-1}\epsilon^{\bar{a}\bar{c}}v_{\bar{c}} = U_L^* v^{\bar{a}} ,$$

$$(v_{\bar{a}})' = U_R v_{\bar{a}} = (U_L^\dagger)^{-1} v_{\bar{a}} ,$$

$$((w^b)^T)' = (U_L w^b)^T = (w^b)^T U_L^T ,$$

$$((w_b)^T)' = ((\epsilon_{bc} w^c)^T)' = (\epsilon_{bc} U_L w^c)^T = ((U_L^T)^{-1} \epsilon_{bc} w^c)^T = (\epsilon_{bc} w^c)^T U_L^{-1} = w_b U_L^{-1} ,$$

$$((w^{\bar{b}})^T)' = ((\epsilon^{\bar{b}\bar{c}} w_{\bar{c}})^T)' = (\epsilon^{\bar{b}\bar{c}} U_R w_{\bar{c}})^T = ((U_R^T)^{-1} \epsilon^{\bar{b}\bar{c}} w_{\bar{c}})^T = (w^{\bar{b}})^T U_L^\dagger ,$$

$$((w_{\bar{b}})^T)' = (U_R w_{\bar{b}})^T = (w_{\bar{b}})^T (U_L^*)^{-1} .$$

Hieraus folgt nun z.B. für $M^{ab} = v^a (w^b)^T$:

$$(M^{ab})' = (v^a (w^b)^T)' = U_L v^a (U_L w^b)^T = U_L v^a (w^b)^T U_L^T = U_L M^{ab} U_L^T , \quad \text{usw.}$$

Zusammenfassend erhalten wir also für die 16 verschiedenen 2-stufigen Spinoren M das folgende Transformationsverhalten unter Lorentztransformationen:

$M = v w^T$	w^b	w_b	$w^{\bar{b}}$	$w_{\bar{b}}$
v^a	$U_L M^{ab} U_L^T$	$U_L M^a_b U_L^{-1}$	$U_L M^{a\bar{b}} U_L^\dagger$	$U_L M^a_{\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
v_a	$(U_L^T)^{-1} M_a^b U_L^T$	$(U_L^T)^{-1} M_{ab} U_L^{-1}$	$(U_L^T)^{-1} M_a^{\bar{b}} U_L^\dagger$	$(U_L^T)^{-1} M_{a\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
$v^{\bar{a}}$	$U_L^* M^{\bar{a}\bar{b}} U_L^T$	$U_L^* M^{\bar{a}}_{\bar{b}} U_L^{-1}$	$U_L^* M^{\bar{a}\bar{b}} U_L^\dagger$	$U_L^* M^{\bar{a}}_{\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$
$v_{\bar{a}}$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}}^b U_L^T$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}\bar{b}} U_L^{-1}$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}}^{\bar{b}} U_L^\dagger$	$(U_L^\dagger)^{-1} M_{\bar{a}\bar{b}} (U_L^*)^{-1}$

Physiker sind natürlich besonders an Lorentz-Skalaren interessiert. Ein aus dem Weyl-Spinor ψ_L mit Hilfe der Spinor-Metrik gebildeter Lorentz-Skalar ist

$$\langle \psi_L | \psi_L \rangle_\epsilon := \psi_L^T \epsilon \psi_L , \quad (26.13.3)$$

denn

$$\langle \psi'_L | \psi'_L \rangle_\epsilon = \psi_L^T U_L^T \epsilon U_L \psi_L = \psi_L^T \epsilon \psi_L = \langle \psi_L | \psi_L \rangle_\epsilon .$$

Für ψ_R gilt das gleiche. Interessant ist jetzt, daß die Komponenten von ψ_L und ψ_R antikommutierende Graßmann-Zahlen sein müssen, wenn diese Spinor-Norm nicht-trivial sein soll, denn:

$$\langle \psi_L | \psi_L \rangle_\epsilon = \psi_L^T \epsilon \psi_L = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}) \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{L,1} \\ \psi_{L,2} \end{pmatrix} = -\psi_{L,2} \psi_{L,1} + \psi_{L,1} \psi_{L,2}$$

$$= \begin{cases} 2\psi_{L,1}\psi_{L,2} & \text{für } \{\psi_{L,1}\psi_{L,2}\} = 0, \\ 0 & \text{für } [\psi_{L,1}\psi_{L,2}] = 0. \end{cases} \quad (26.13.4)$$

Wir hatten in 26.7.5 festgestellt, daß wir einem Vierervektor x^μ eine 2×2 Matrix X zuordnen können, so daß einer Lorentztransformation des Vierervektors eine $SL(2, \mathbb{C})$ -Transformation von X der Form UXU^\dagger entspricht:

$$\mathfrak{X} : \mathbb{R}^4 \rightarrow i \cdot \mathbf{u}(2), \quad \mathfrak{X}(x) := X := x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (26.13.5)$$

$$\mathfrak{X}^{-1} : i \cdot \mathbf{u}(2) \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad x^\mu := \mathfrak{X}^{-1}(X) = \frac{1}{2} \text{tr}(X \sigma_\mu). \quad (26.13.6)$$

Weiter sieht man anhand der obigen Tabelle sofort, daß der 2-stufige Spinor M^{ab} gerade das gleiche Transformationsverhalten hat wie die dem Vierervektor x^μ entsprechende Matrix X , d.h. wir können für X in Indexschreibweise schreiben:

$$(X^{ab})' = U_L X^{ab} U_L^\dagger. \quad (26.13.7)$$

In diesem Sinn kann man also von Vierervektoren als $\Pi_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ -Spinor-Darstellungen der Lorentzgruppe sprechen.

Um alle Vektor- und Tensor-Darstellungen der Lorentzgruppe auf Spinor-Darstellungen umschreiben zu können, benötigt man aber neben der Transformation für die Vektoren x^μ auch die Transformation für die Vektoren x_μ , und das in einer möglichst kovariaten Formulierung. Dies liefert das folgende Lemma, wobei wir uns an Misner u. a. (1973), S. 1150 ff. orientieren.

Definition 26.13.1 Zu den Pauli-Matrizen σ_μ^{ab}

$$\sigma_\mu^{ab} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (26.13.8)$$

lassen sich die folgenden dualen Pauli-Matrizen σ^μ_{ab} definieren:

$$\sigma^\mu_{ab} := \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu^{cd} \epsilon_{ca} \epsilon_{db} = \eta^{\mu\nu} (\epsilon^T)_{ac} \sigma_\nu^{cd} \epsilon_{db}, \quad d.h. \quad (26.13.9)$$

$$\sigma^\mu_{ab} = \left(- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right). \quad (26.13.10)$$

Lemma 26.13.2 Mit den Pauli-Matrizen σ_μ^{ab} und den dualen Pauli-Matrizen σ^μ_{ab} gilt:

$$\sigma_\mu^{ab} \sigma^\nu_{ab} = -2\delta_\mu^\nu, \quad \sigma_\mu^{ab} \sigma^\mu_{cd} = -2\delta_c^a \delta_d^b. \quad (26.13.11)$$

$$X^{a\bar{b}} = x^\mu \sigma_\mu^{a\bar{b}}, \quad X_{a\bar{b}} = x_\mu \sigma_\mu^{a\bar{b}}, \quad (26.13.12)$$

$$x^\mu = -\frac{1}{2} \sigma_\mu^{a\bar{b}} X^{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma^\mu X^T), \quad x_\mu = -\frac{1}{2} \sigma_\mu^{a\bar{b}} X_{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma_\mu X^T). \quad (26.13.13)$$

Damit gilt auch

$$X_{a\bar{b}} = \epsilon_{ac} \epsilon_{\bar{b}\bar{d}} X^{c\bar{d}} = -\epsilon_{ac} X^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}}. \quad (26.13.14)$$

Beweis: Zunächst die Herleitung der expliziten Form der $\sigma_{a\bar{b}}^\mu$:

$$\sigma_{a\bar{b}}^0 = \eta^{0\nu} (\epsilon^T)_{ac} \sigma_\nu^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a\bar{b}}^1 &= \eta^{1\nu} (\epsilon^T)_{ac} \sigma_\nu^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a\bar{b}}^2 &= \eta^{2\nu} (\epsilon^T)_{ac} \sigma_\nu^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a\bar{b}}^3 &= \eta^{3\nu} (\epsilon^T)_{ac} \sigma_\nu^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun zur ersten Orthogonalitätsbeziehung von $\sigma_\mu^{a\bar{b}}$ und $\sigma_{a\bar{b}}^\nu$.

$$\sigma_\mu^{a\bar{b}} \sigma_{a\bar{b}}^\nu = \sigma_\mu^{a\bar{b}} (\sigma^\nu)_{ba}^T = \operatorname{tr}(\sigma_\mu (\sigma^\nu)^T).$$

Zunächst einmal gilt im Fall $\mu = \nu$ (hier keine Summation über μ):

$$\sigma_\mu^{a\bar{b}} \sigma_{a\bar{b}}^\mu = \operatorname{tr}(\sigma_\mu (\sigma^\mu)^T) = \operatorname{tr}(-\mathbb{1}) = -2.$$

Für die Fälle $\mu \neq \nu$ entnimmt man aus

$$\begin{aligned}\sigma_0(\sigma^1)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_0(\sigma^2)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_0(\sigma^3)^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_1(\sigma^2)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ \sigma_1(\sigma^3)^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2(\sigma^3)^T &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

daß

$$\text{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\nu)^T) = 0$$

ist, also folgt

$$\sigma_\mu^{a\bar{b}}\sigma^\nu_{\bar{a}b} = \sigma_\mu^{a\bar{b}}((\sigma^\nu)^T)_{\bar{b}a} = \text{tr}(\sigma_\mu(\sigma^\nu)^T) = -2\delta_\mu^\nu.$$

Nun zur zweiten Orthogonalitätsbeziehung von $\sigma_\mu^{a\bar{b}}$ und $\sigma^\mu_{c\bar{d}}$.

$$\begin{aligned}\sigma_\mu^{a\bar{b}}\sigma^\mu_{c\bar{d}} &= [(\sigma_0 \otimes \sigma^0) + (\sigma_1 \otimes \sigma^1) + (\sigma_2 \otimes \sigma^2) + (\sigma_3 \otimes \sigma^3)]_{c\bar{d}}^{a\bar{b}}. \\ [\sigma_\mu \otimes \sigma^\mu] &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & -1 \\ & & -1 & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{array}{cccc} & & & -1 \\ & & +1 & \\ & +1 & & \\ -1 & & & \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) \\
& = \left(\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir als Zeilenindizes benutzt

$$(a, c) : (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

und als Spaltenindizes

$$(\bar{b}, \bar{c}) : (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2).$$

Damit folgt

$$\sigma_{\mu}{}^{a\bar{b}} \sigma^{\mu}{}_{c\bar{d}} = \left[\left(\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \right]_{c\bar{d}}^{a\bar{b}} = -2\delta_c^a \delta_{\bar{d}}^{\bar{b}}.$$

Den 2-stufigen Spinor $X^{a\bar{b}}$, der aus x^{μ} gebildet wird, kennen wir ja bereits aus 26.13.5

$$X^{a\bar{b}} := x^{\mu} \sigma_{\mu}{}^{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

und ebenso folgt $X_{a\bar{b}}$, das aus x_{μ} gebildet wird:

$$X_{a\bar{b}} = x_{\mu} \sigma^{\mu}{}_{a\bar{b}} = \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 - ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt soll die Umkehrung dieser Beziehungen gezeigt werden. Zunächst die Umkehrung von $X^{a\bar{b}}$:

$$-\frac{1}{2} \sigma^{\mu}{}_{a\bar{b}} X^{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma^{\mu} X^T) \quad \text{und dies ergibt:}$$

$$-\frac{1}{2} (\sigma^0{}_{a\bar{b}} (X^T)^{\bar{b}a}) = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \right) \right) = x^0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^1_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \\ x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \end{pmatrix} = x^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^2_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -ix^1 - x^2 & -ix^0 + ix^3 \\ ix^0 + ix^3 & ix^1 - x^2 \end{pmatrix} = x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma^3_{a\bar{b}}(X^T)^{\bar{b}a}) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & -x^0 + x^3 \end{pmatrix} = x^3, \end{aligned}$$

also

$$x^\mu = -\frac{1}{2} \sigma^\mu_{a\bar{b}} X^{a\bar{b}}.$$

Und jetzt die Umkehrung von $X_{a\bar{b}}$:

$$-\frac{1}{2} \sigma_\mu^{a\bar{b}} X_{a\bar{b}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\sigma_\mu X^T) \quad \text{und dies ergibt:}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_0^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} \right) = x_0,$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma_1^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \\ -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \end{pmatrix} = x_1, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_2^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} ix_1 - x_2 & ix_0 - ix_3 \\ -ix_0 - ix_3 & -ix_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_2 ,$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma_3^{a\bar{b}}(X^T)_{\bar{b}a}) &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ -x_1 - ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ x_1 + ix_2 & +x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_3 , \end{aligned}$$

also

$$x_\mu = -\frac{1}{2} \sigma_\mu^{a\bar{b}} X_{a\bar{b}} .$$

Zur Prüfung der Konsistenz schauen wir jetzt noch auf die Transformation von $X^{c\bar{d}}$ zu $X_{a\bar{b}}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ac} \epsilon_{\bar{b}\bar{d}} X^{c\bar{d}} &= -\epsilon_{ac} X^{c\bar{d}} \epsilon_{\bar{d}\bar{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^1 - ix^2 & -x^0 + x^3 \\ x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 - ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_0 - x_3 & -x_1 - ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = X_{a\bar{b}} . \quad \square \end{aligned}$$

Mit den σ_μ und σ^ν kann man also beliebige Tensoren in Spinoren umschreiben und umgekehrt, also z.B.:

$$T^{a\bar{b}}_{c\bar{d}} = t^\mu{}_\nu \sigma_\mu^{a\bar{b}} \sigma^\nu{}_{c\bar{d}} , \quad t^\mu{}_\nu = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^\mu{}_{a\bar{b}} \sigma_\nu{}^{c\bar{d}} T^{a\bar{b}}_{c\bar{d}} . \quad (26.13.15)$$

27 Graßmann-Algebren

27.1 Hermann Günther Graßmann (1809-1877)

Hermann Günther Graßmann (1809-1877, ?) war ein bedeutender deutscher Mathematiker, Physiker und Linguist. Er war der Sohn eines Gymnasiallehrers in Stettin, der sich sehr für Mathematik und Physik interessiert hatte. Hermann Graßmann studierte dann in Berlin und zog eine Ausbildung als protestantischer Pfarrer in Erwägung. Sein Studium legte er seinen vielfältigen Interessen folgend enzyklopädisch breit an und eignete sich sein selbstgewähltes riesiges Pensum vorwiegend autodidaktisch an. Einen tiefen Einfluß übten besonders die Vorlesungen von Schleiermacher auf ihn aus. Auch wenn er keine einzige Mathematikvorlesung besuchte hatte, ließ ihn die Faszination an Physik und Mathematik nicht los und begleitete ihn sein Leben lang.

Nach dem Studium wurde er zunächst Hilfslehrer, danach Lehrer und schließlich Gymnasiallehrer in Stettin. Im Jahr 1840 legte er eine Didaktik-Prüfungsarbeit zum Thema „*Theorie von Ebbe und Flut*“ vor, in der er zum ersten Mal die von ihm entwickelte Vektorrechnung präsentierte. Im Jahr 1844 erschien dann sein Hauptwerk „*Die Ausdehnungslehre*“, in dem er die Grundlagen der n -dimensionalen Vektor- und Tensor-Rechnung vorstellte, und in diesem Rahmen auch den Begriff des *Äußeren Produkts* (oder *Graßmann-Produkts*, oder *Keil-Produkts*, siehe 11.1.8 - 11.1.11) und der *Graßmann-Algebra*.

Da Graßmann aber an der Universität keine Mathematik studiert hatte war er mit der damaligen mathematischen Sprache nicht genügend vertraut, und zugleich waren sein Ideen und Visionen seiner Zeit um Jahrzehnte voraus und es fehlten auch noch grundlegende mathematische Begriffsbildungen, wie etwa die Mengenlehre und Abbildungen zwischen Mengen. So mußte Graßmann erleben, daß seine „*Ausdehnungslehre*“ von Gauß und fast allen anderen zeitgenössischen Mathematikern als 'wirr' abgelehnt wurde. Einzig Möbius interessierte sich für Graßmann und ermutigte ihn, in der zweiten Auflage der „*Ausdehnungslehre*“ (1861, 1862) eine strenge euklidische Darstellung



Abbildung 27.1: H.G. Graßmann
PD.

[https://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Graßmann]

(Definition, Satz, Beweis) zu wählen. Aber auch dies brachte ihm keine Anerkennung in der Gemeinschaft der Mathematiker ein - und Graßmann wendete sich enttäuscht den Sprachwissenschaften zu.

Im Jahr 1873 erschien sein Wörterbuch zur *Ṛgvedasaṃhitā*, das mit Einschränkungen bis heute in der Indologie in Benutzung ist. 1876 machte ihn *American Oriental Society* zu ihrem Mitglied und im gleichen Jahr erhielt er für seine Arbeit über die indischen Veden eine Ehrendoktorwürde der Universität Tübingen.

Gegen Ende seines Lebens durfte Graßmann dann aber doch noch erfahren, daß die ersten Mathematiker begannen sich für seine Gedanken zu interessieren. Zunächst entdeckte Hankel Graßmanns „*Ausdehnungslehre*“ und über ihn wurden dann auch Felix Klein, Alfred Clebsch und Sophus Lie auf Graßmann aufmerksam. Sophus Lie reiste sogar nach Stettin um mit Graßmann über Pfaffsche Systeme zu diskutieren. Im Jahr 1871 wurde Graßmann dann in Anerkennung seiner mathematischen Arbeiten von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften zum korrespondierenden Mitglied gewählt.

Dieudonné schreibt in seiner Würdigung von Graßmann:

„Against the succession of failures should be pitted all the gifts which he had received from nature: his indomitable patience and energy, his incredible capacity for work of all kinds and at top speed, his encyclopaedic curiosity and ability to become proficient in any subject of his choice, and of course, last but not least, the startling originality of his mathematical ideas.“ Dieudonné (1979)

Graßmann lebte aktiv und glücklich im Kreise seiner Familie und der Stettiner akademischen Gesellschaft. Graßmann leitete in Stettin auch mit Freude einen Chor und besuchte als Freimaurer regelmäßig die Stettiner Loge. Er hatte mit seiner Frau Marie Therese Knappe 11 Kinder, von denen 4 Kinder früh starben. Da er sich sehr um seine Familie kümmerte, es wird von regelmäßigen Lese- und Musikabenden berichtet, ist es nicht verwunderlich, daß auch einer seiner Söhne, Hermann Ernst Graßmann der Jüngere (1857-1922), ebenfalls Mathematiker wurde, der dann an der Universität Gießen lehrte und sich für das mathematische Erbe seines Vaters engagierte.

[Quellen: de.wikipedia: Hermann_Graßmann, *The Tragedy of Grassmann* by Dieudonné (1979)]

27.2 Graßmann-Algebren

Die Definition und Grundlagen von allgemeinen Algebren stellen wir im folgenden Kapitel über *Clifford-Algebren* (28) dar. Bezüglich der Graßmann-Algebren folgen wir Kalka u. Soff (1997), S. 116 ff., und Nakahara (2003), S. 40 ff. Aber weshalb interessieren sich Physiker überhaupt für Graßmann-Algebren?

Clifford Algebren und ihre Darstellungen werden in der Physik bei der Beschreibung von Fermionen verwendet, insb. stellen die Diracschen γ -Matrizen eine Darstellung einer speziellen Clifford-Algebra dar. Wenn man nun eine klassische fermionische Lagrange-Funktion zur Anwendung in einem Pfadintegral konstruieren möchte, dann benötigt man dazu antikommutierende Zahlen - und dies sind gerade die Graßmann-Zahlen.

Definition 27.2.1 Eine Graßmann-Algebra Λ^n ist eine assoziative Algebra über \mathbb{C} mit Einselement, die von n Generatoren $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ erzeugt wird, welche antikommutieren, d.h.

$$\{\zeta_i, \zeta_j\} := \zeta_i \zeta_j + \zeta_j \zeta_i = 0, \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n. \quad (27.2.1)$$

Λ^n ist als Algebra ja zugleich ein Vektorraum über \mathbb{C} und die Elemente

$$\{\mathbb{1}, \zeta_i, \zeta_i \zeta_j, \dots, \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n\}$$

alle Indizes in einem Produkt verschieden und nach Größe geordnet, also $i < j$.

bilden eine Basis. Die Dimension $\dim \Lambda^n = 2^n$, denn in einem beliebigen Basiselement kann jedes θ_i genau 0 oder 1 mal vorkommen. Ein beliebiges Element von $f \in \Lambda^n$ heißt *Graßmann-Zahl*, oder *Superzahl*, und wird in dieser Basis dargestellt als

$$f(\vec{\zeta}) = f_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^n f_i \zeta_i + \sum_{i_1 < i_2}^n f_{i_1 i_2} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} + \dots + f_{12 \dots n} \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n \quad (27.2.2)$$

$$= f_0 \mathbb{1} + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n f_i \zeta_i + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2}^n f_{i_1 i_2} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n}^n f_{i_1 i_2 \dots i_n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_n} \quad (27.2.3)$$

mit antisymmetrischen Koeffizienten $f_0, f_i, f_{i_1 i_2}, \dots, f_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \mathbb{C}$, und kann also als eine Funktion der ζ_i , bzw. als Taylorentwicklung einer Funktion von ζ_i interpretiert werden. Sei etwa $n = 1$, dann ist

$$e^\zeta = \mathbb{1} + \zeta, \quad \text{wegen } \zeta \cdot \zeta = 0. \quad (27.2.4)$$

In Λ^n kann man eine \mathbb{Z}_2 -Graduierung einführen, indem man Λ^n in die Unterräume mit einer geraden Anzahl von ζ_i und einer ungeraden Anzahl von ζ_i zerlegt:

$$\Lambda^n = \Lambda_+^n \oplus \Lambda_-^n. \quad (27.2.5)$$

Allerdings ist nur Λ_+^n eine Unteralgebra von Λ^n . Die Elemente von Λ_+^n kommutieren mit allen Graßmann-Zahlen und heißen deshalb zusammen mit den kommutierenden Zahlen aus \mathbb{C} *c-Zahlen*, wogegen die antikommutierenden Zahlen aus Λ_-^n *a-Zahlen* heißen.

Man definiert nun eine komplexe Konjugation auf Λ^n durch

$$\overline{\zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_k}} := \zeta_{i_k} \cdots \zeta_{i_2} \zeta_{i_1}. \quad (27.2.6)$$

Insbesondere folgt daraus, daß die Generatoren ζ_i bzgl. dieser komplexen Konjugation 'reell' sind und Paare von Generatoren $\overline{\zeta_i \zeta_j} = \zeta_j \zeta_i = -\zeta_i \zeta_j$ stets 'imaginär', bzw. in der Form $\overline{i \zeta_i \zeta_j} = -i \zeta_j \zeta_i = i \zeta_i \zeta_j$ stets 'reell'.

In der Physik wählt man aber gerne bei geradzahligem n einen alternativen Satz von Generatoren für Λ^n aus, die konjugiert komplex zueinander sind:

$$\theta_i := \zeta_{2i-1} + i\zeta_{2i}, \quad \bar{\theta}_i := \zeta_{2i-1} - i\zeta_{2i}, \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2}. \quad (27.2.7)$$

Damit gilt dann

$$\overline{\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_k}} = \bar{\theta}_{i_k}\cdots\bar{\theta}_{i_2}\bar{\theta}_{i_1}. \quad (27.2.8)$$

Auch kann man eine Differentiation und eine Integration von Graßmann-Zahlen definieren. Da wegen der Antikommutativität die Reihenfolge der Operationen eine Rolle spielt, definieren wir hier die Differentiation und die Integration *von links*.

Definition 27.2.2 *Es gelte:*

$$\frac{\partial}{\theta_j}\theta_j := \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\theta_i}\mathbb{1} := 0. \quad (27.2.9)$$

Der Differentialoperator $\frac{\partial}{\theta_i}$ möge außerdem mit θ_j antikommutieren, d.h. es gelte die folgende Leibniz-Regel:

$$\frac{\partial}{\theta_i}(\theta_j\theta_k) := \left(\frac{\partial}{\theta_i}\theta_j\right)\theta_k - \theta_j\left(\frac{\partial}{\theta_i}\theta_k\right) = \delta_{ij}\theta_k - \delta_{ik}\theta_j. \quad (27.2.10)$$

Analog wird das bestimmte Integral über Graßmannfunktionen als die Umkehrung der Differentiation definiert. Man verlangt, daß die Integration der Ableitung einer Graßmannfunktion nur einen Oberflächenterm ergibt, der Null gesetzt wird, daß die Ableitung eines bestimmten Integrals auch Null ergibt und daß Konstante aus dem Integral herausgezogen werden können, also:

$$\int d\theta \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta) := 0, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} \int d\theta f(\theta) := 0, \quad (27.2.11)$$

$$\int d\theta f(\theta)g(\theta) := f(\theta) \int d\theta g(\theta), \quad \text{falls } f(\theta) \text{ konstant ist, d.h. } \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta) = 0. \quad (27.2.12)$$

Diese Forderungen werden gerade erfüllt, wenn man die Integration als identisch zur Differentiation definiert!

$$\int d\theta f(\theta) := \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta). \quad (27.2.13)$$

Der Hintergrund hierfür ist die Idempotenz der Graßmann-Generatoren und daraus folgend die Idempotenz der Differentiation

$$\theta_i^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2} = 0. \quad (27.2.14)$$

Aus der Definition der Integration folgt also sofort

$$\int d\theta = \int d\theta \mathbb{1} = \frac{\partial}{\partial\theta} \mathbb{1} = 0, \quad \int d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\theta} = 1. \quad (27.2.15)$$

Etwas gewöhnungsbedürftig ist die Regel für die Änderung der Integrationsvariablen. Für gewöhnliche c -Zahlen $x, x', a \in \mathbb{C}$ gilt ja mit $x = ax'$:

$$\int dx f(x) = a \int dx' f(x').$$

Dagegen folgt für Graßman-Zahlen θ, θ' und $a \in \mathbb{C}$ mit $\theta = a\theta'$:

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\theta'} f(a\theta') = \frac{1}{a} \int d\theta' f(a\theta'). \quad (27.2.16)$$

Für Mehrfachintegrale ergibt sich entsprechend mit $\vec{\theta} = a\vec{\theta}'$, d.h. mit $\theta_i = \sum_j a_{ij}\theta'_j$:

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 \cdots d\theta_n f(\vec{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial\theta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta_n} f(\vec{\theta}) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^n \frac{\partial\theta'_{k_1}}{\partial\theta_1} \cdots \frac{\partial\theta'_{k_n}}{\partial\theta_n} \frac{\partial}{\partial\theta'_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta'_{k_n}} f(a\vec{\theta}') \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^n (a^{-1})_{k_1 1} \cdots (a^{-1})_{k_n n} \frac{\partial}{\partial\theta'_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta'_{k_n}} f(a\vec{\theta}') \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^n (a^{-1})_{k_1 1} \cdots (a^{-1})_{k_n n} \epsilon_{k_1 \dots k_n} \frac{\partial}{\partial\theta'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta'_n} f(a\vec{\theta}') \\ &= \det(a^{-1}) \frac{\partial}{\partial\theta'_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta'_n} f(a\vec{\theta}') \\ &= \frac{1}{\det(a)} \int d\theta'_1 \cdots d\theta'_n f(a\vec{\theta}'). \end{aligned} \quad (27.2.17)$$

28 Clifford-Algebren

28.1 William Kingdon Clifford (1845-1879)

William Kingdon Clifford war ein bedeutender englischer Mathematiker und Philosoph. Er wurde in Exeter, Devon in England geboren und war ein hochbegabter Schüler. Clifford begann sein Studium der Mathematik am College London bereits im Jahr 1860, mit 15 Jahren, und setzte es ab 1863 am Trinity College in Cambridge fort. Im Jahr 1871, mit nur 26 Jahren, wurde er Professor für Mathematik und Mechanik am University College London und drei Jahre später *Fellow of the Royal Society*. Im Jahr 1876 erlitt er einen ersten gesundheitlichen Zusammenbruch und reiste zur Erholung nach Algerien und Spanien. Man vermutet als Grund für Cliffords Zusammenbruch eine chronische Überarbeitung - tagsüber erledigte er all seine beruflichen Verpflichtungen und die Nächte hindurch arbeitete er an seinen Forschungen. 1878 kehrte er kurz nach England zurück, brach seine dortigen Arbeiten aber erneut ab und ging zur Genesung wiederum in den Süden, wo er mit nur 33 Jahren auf Madeira verstarb. Die meisten seiner Werke wurden posthum veröffentlicht. Die Titelseite seiner gesammelten Schriften trägt den Satz: „If he had lived we might have known something.“

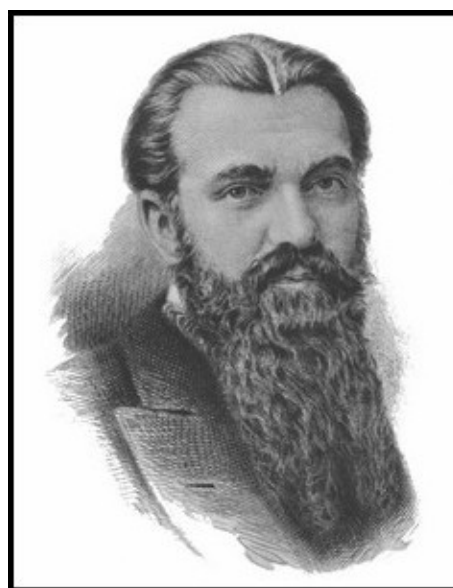


Abbildung 28.1: W.K. Clifford
PD.

[https://de.wikipedia.org/wiki/William_Kingdon_Clifford]

Clifford war von Riemanns Habilitationsvortrag aus dem Jahr 1854 „*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*“ so beeindruckt, daß er 1870 in der *Cambridge Philosophical Society* darüber referierte (publiziert 1876) und 1873 eine englische Übersetzung von Riemanns Arbeit in Natur veröffentlichte. Er äußerte bereits bei diesen Gelegenheiten die Vermutung, daß der physikalische Raum durch die Gravitation gekrümmt sein könne - 40 Jahre vor Einstein! Im Jahr 1878, ein Jahr vor seinem frühen Tod, publizierte Clifford eine Verallgemeinerung der Graßmann-Algebra, die heute sog. Clifford-Algebra, mit welcher er zu seiner Freude auch die 1843 von Hamilton gefundenen Quaternionen beschreiben und verallgemeinern konnte.

[Quellen: en.wikipedia: William_Kingdon_Clifford, und insb. der schöne Artikel von O'Connor u. Robertson (2019) auf MacTutor].

Élie Cartan (1869 - 1951) beschäftigte sich intensiv mit den Gedanken von Graßmann und Clifford. Seinen Differentialformen-Kalkül baute auf dem *Äußeren Produkt* von Graßmann auf und bereits im Jahr 1908 fand er die 8-Periodizität der reellen Clifford-Algebren. Diese Einsicht ging der Wissenschaftsgemeinschaft wieder verloren und wurde erst zu Beginn der 1960'er Jahre erneut von Bott entdeckt. Daher beginnt die moderne Beschäftigung mit Clifford-Algebren mit der berühmten Arbeit von Atiyah, Bott und Shapiro (Atiyah u. a. (1964)).

28.2 Einführung in die Clifford-Algebren

Clifford-Algebren, Clifford-Gruppen und deren Untergruppen, speziell die Spin-Gruppen, spielen heute eine bedeutende Rolle in der physikalischen Beschreibung von Fermionen, insb. stellen die Diracschen γ -Matrizen eine Darstellung einer speziellen Clifford-Algebra dar.

In dieser kleinen Einführung folgen wir Atiyah u. a. (1964), S. 3-11, Gallier (2014), Choquet-Bruhat u. DeWitt-Morette (1989), S. 6-39, Zeidler (2011), Kapitel 2, S. 115 ff., und Jost (2009), S. 50 ff.. Die mathematisch ausführliche Vorlesung von Fritzsche (2003) und die schönen Bücher von Lawson u. Michelsohn (1989) und Friedrich (1997) helfen immer dann weiter, wenn die mitunter etwas leichtfertigen Darstellungen der Physiker zu mehr Fragen als Antworten führen :-)

Seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein K -Vektorraum und $v \in V$ und $i : V \rightarrow A$ eine Einbettung von V in eine K -Algebra A und sei $Q : V \rightarrow K$ eine quadratische Form, dann gilt für eine Graßmann-Algebra

$$i(v) \otimes i(v) = 0_A, \quad (28.2.1)$$

und es gilt für eine Clifford-Algebra

$$i(v) \otimes i(v) = Q(v) \mathbb{1}_A. \quad (28.2.2)$$

Eine Clifford-Algebra kann also als eine *Quantisierung* einer Graßmann-Algebra verstanden werden.

Nun zu den exakten Definitionen.

Definition 28.2.1 Eine K -Algebra A mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist eine Menge A mit den folgenden Eigenschaften:

1. A ist ein linearer Raum über K ,
2. es existiert ein Produkt als eine bilineare Abbildung $B : A \times A \rightarrow A$, häufig schreibt man dieses Produkt $B(X, Y)$ für $X, Y \in A$ auch als $X \vee Y$, oder $X \otimes Y$, oder $X \cdot Y$, oder einfach als XY .

Wenn das Produkt assoziativ ist, d.h. $(XY)Z = X(YZ)$, spricht man von einer assoziativen Algebra.

Wenn das Produkt kommutativ ist, d.h. $XY = YX$, spricht man von einer kommutativen Algebra.

Wenn $A \neq \emptyset$ ist und es für das Produkt ein Einselement $\mathbb{1}_A \in A$ gibt spricht man von einer unitären Algebra.

Und dann gibt es häufig lineare Abbildungen zwischen Algebren, welche die multiplikative Struktur erhalten.

Definition 28.2.2 Seien A und B zwei Algebren und $m : A \rightarrow B$ eine lineare Abbildung mit

$$m(XY) = m(X)m(Y) \quad \text{für } X, Y \in A$$

dann heißt die Abbildung m ein Algebra-Homomorphismus, bzw. wenn m bijektiv ist, ein Algebra-Isomorphismus.

Definition 28.2.3 Sei V ein linearer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Tensor-Algebra $\otimes(V)$ ist definiert als

$$\otimes(V) := \text{vspan}\{\mathbb{1}_{\otimes(V)} \oplus_{i \geq 1} \underbrace{(V \otimes \dots \otimes V)}_{i \text{ fach}}\}, \quad (28.2.3)$$

d.h. sie besteht aus endlichen Summen von Elementen der Form

$$a_0 \mathbb{1}_{\otimes(V)} + \sum_{i \geq 1} a_i (v^1 \otimes \dots \otimes v^{n_i}) \quad \text{mit } a_i \in K. \quad (28.2.4)$$

Das unten dargestellte kommutative Diagramm zum Tensor-Produkt illustriert eine sog. Universalitäts-Eigenschaft, daß also eine Tensor-Algebra isomorph zu einer allgemeinen K -Algebra ist.

Lemma 28.2.4 Für die 3 endlich-dimensionalen und ansonst beliebigen linearen Räume X, Y, Z über dem Körper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und die kanonische bilineare Abbildung β gilt:

1. wenn $L : X \otimes Y \rightarrow Z$ linear und das Diagramm kommutativ ist, dann ist auch $B : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear;
2. wenn $B : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear ist, dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $L : X \otimes Y \rightarrow Z$, so daß das Diagramm kommutativ ist, d.h. jede bilineare Abbildung B in einen linearen Raum Z kann verstanden werden als $B = L \circ \beta$, als Produkt der kanonischen Abbildung β und einer linearen Abbildung L .
3. $L : X \otimes Y \rightarrow Z$ ist ein linearer Isomorphismus.

Diese Aussagen bleiben bei Verwendung einer Hamel-Basis auch richtig für unendlich-dimensionale lineare Räume X, Y, Z , siehe Zeidler (2011), S. 152 und S. 314, was wir aber hier nicht beweisen werden.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times Y & \xrightarrow{B} & Z \\
 \beta \downarrow & \nearrow L & \\
 X \otimes Y & &
 \end{array}$$

Beweis: 1. β ist die kanonische Abbildung $\beta : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ und ist also bilinear, $L : X \otimes Y \rightarrow Z$ ist linear, in $X \otimes Y$ gilt Distributivität $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$, wegen der Kommutativität des Diagramms ist $B = L \circ \beta$ und damit B bilinear.

2. seien $\{e_1, \dots, e_m\} \in X$ und $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\} \in Y$ Basen von X und Y , und $x := \sum_{i=1}^m x^i e_i \in X$ und $y := \sum_{j=1}^n y^j \hat{e}_j \in Y$, dann kann man L definieren als

$$L(a^{ij} e_i \otimes \hat{e}_j) := a^{ij} B(e_i, \hat{e}_j) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (L \circ \beta)(x, y) &= L(x \otimes y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L(x^i y^j e_i \otimes \hat{e}_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x^i y^j B(e_i, \hat{e}_j) = B(x, y).
 \end{aligned}$$

Und aus der Definition von L über der Basis $\{e_i \otimes \hat{e}_j \in X \otimes Y \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ folgt auch die Eindeutigkeit von L .

3. seien β , B und L die obigen Abbildungen, dann führen wir mit $L' : Z \rightarrow X \otimes Y$ eine weitere Abbildung ein, für diese gilt dann $\beta = L' \circ B = L' \circ L \circ \beta$ und damit $L' = L^{-1}$, also ist L ein linearer Isomorphismus. Dies beleuchtet die Bezeichnung, daß die Tensor-Algebra *universell* ist, d.h. isomorph zu jeder anderen K -Algebra. \square

Ein spezieller Typ von Unteralgebren kommt häufig vor, sog. Ideale I , oder invariante Unteralgebren.

Definition 28.2.6 Eine Teilmenge $B \subseteq A$ einer Algebra A heißt Unteralgebra, wenn mit $X, Y \in B$ und $a, b \in K$ auch $aX + bY \in B$ und $XY \in B$ liegen.

Eine Unteralgebra $I \subseteq A$ heißt Linksideal, bzw. Rechtsideal, bzw. zweiseitiges Ideal (oder kurz Ideal), wenn I eine invariante Unteralgebra ist, d.h. wenn mit $X \in I$ und $Y, Z \in A$ gilt: $YX \in I$, bzw. $XY \in I$, bzw. $YXZ \in I$.

Den Sinn der Konstruktion eines Ideals $I \subseteq A$ und des zugehörigen Quotientenraums A/I wird vielleicht folgendermaßen anschaulicher. Sei $B \subseteq A$ eine nichtleere Teilmenge

von A , dann ist das von B erzeugte Ideal I gerade jene Teilmenge von A deren Elemente alle 0 werden, wenn $B = \emptyset$ gesetzt wird, und A/I ist jene Teilmenge von A , aus der alle Elemente von I herausdividiert werden. Das Standard-Beispiel ist $A = \mathbb{Z}$: sei also etwa $B = \{n\}$, dann ist das von B erzeugte Ideal gerade $I = n\mathbb{Z}$ und

$$A/I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \{1, \dots, n-1\}. \quad (28.2.5)$$

Wenn $u, v \in A$ sind, dann ist die Bedingung $(u - v) \in I$ eine Äquivalenzrelation und man schreibt $u \sim v$. Diese Äquivalenzrelation führt in A zu disjunkten Äquivalenzklassen, also im Falle unseres Beispiels $A = \mathbb{Z}$, $B = \{n\}$ und $I = n\mathbb{Z}$ zu den Klassen $[1], [2], \dots, [n-1]$, wobei für die Klasse $[k] = \{k + n\mathbb{Z}\}$ gilt. Die Menge dieser Äquivalenzklassen ist isomorph zur Quotientenalgebra A/I . Die Abbildung von A nach A/I ist ein surjektiver Homomorphismus $\pi : A \rightarrow A/I$ und hat gerade den Kern $\ker(\pi) = I$. Mittels dieses Homomorphismus π hat A/I alle algebraischen Strukturelemente von A geerbt.

Ein anderes Standardbeispiel ist der reelle Polynomring $\mathbb{R}[x]$ mit der Nebenbedingung $x^2 = -1$. Dieses Beispiel stammt aus Zeidler (2011), S.174 ff., und geht ursprünglich auf einen Gedanken von Cauchy zurück.

Definition 28.2.7 *Der Polynomring $\mathbb{R}[x]$ ist die Menge aller Polynome mit dem Erzeuger x und mit endlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und mit den folgenden Operationen der Addition und Multiplikation. Seien also $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit*

$$u(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad v(x) := \sum_{i=0}^n b_i x^i. \quad (28.2.6)$$

$$(u + v)(x) := \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i, \quad (28.2.7)$$

$$uv(x) := \sum_{\substack{i,j \\ i+j=0}}^{i+j=2n} a_i b_j x^{i+j}. \quad (28.2.8)$$

Sei nun in einem solchen Polynomring $\mathbb{R}[x]$ die Menge $B = \{1 + x^2\}$, Dann erzeugt dieses B das folgende Ideal $I = \{(1 + x^2)v(x) \mid v(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Zwei Polynome $u, v \in \mathbb{R}[x]$ seien also äquivalent, d.h. $u \sim v$, wenn gilt $u(x) - v(x) \in I$. Damit ist $(1 + x^2) \sim 0$, d.h. $[(1 + x^2)] = [0]$, und damit folgt $[x^2] = [x]^2 = -1$, bzw. $[x] = i$. So hatte Cauchy, angeregt durch Arbeiten von Gauß, die komplexen Zahlen eingeführt.

Auf die gleiche Weise kann man eine allgemeine Clifford-Algebra im Raum einer allgemeinen Tensoralgebra $\otimes(V)$ über einem Vektorraum V definieren.

Definition 28.2.8 1. Eine Clifford-Algebra $Cl(V, Q)$ ist eine unitäre, assoziative K -Algebra über einem Vektorraum V mit einer quadratischen Form $Q : V \rightarrow K$ und einer Einbettung $i : V \rightarrow Cl(V, Q)$, so daß mit $v \in V$ für die Elemente von $Cl(V, Q)$ gilt:

$$i(v) \otimes i(v) - Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} = 0. \quad (28.2.9)$$

2. Wenn man mit einer Tensor-Algebra $\otimes(V)$ startet und mit einer Einbettung $i : V \rightarrow \otimes(V)$, die wegen der oben gezeigten Universalität ja isomorph mit einer allgemeinen unitären, assoziativen K -Algebra ist, und wenn B die Clifford-Bedingung ist

$$B := \{v \mid v \in V, i(v) \otimes i(v) - Q(v) \mathbb{1}_{\otimes(V)} = 0\}, \quad (28.2.10)$$

und I das von B erzeugte Ideal in $\otimes(V)$ ist, dann kann man die Clifford-Algebra als die folgende Quotientenmenge definieren:

$$Cl(V, Q) := \otimes(V) / I. \quad (28.2.11)$$

3. Statt der quadratischen Form $Q : V \rightarrow K$ kann man auch eine symmetrische Bilinearform $g : V \times V \rightarrow K$ mit $g(u, u) := Q(u)$ verwenden:

$$\begin{aligned} 2g(u, v) \mathbb{1}_{\otimes(V)} &= (Q(u+v) - Q(u) - Q(v)) \mathbb{1}_{\otimes(V)} \\ &= i(u+v)i(u+v) - i(u)i(u) - i(v)i(v). \\ &= i(u)i(v) + i(v)i(u) =: \{i(u)i(v)\}. \end{aligned} \quad (28.2.12)$$

4. Wenn jetzt $K = \mathbb{R}$ und V damit also ein reeller Vektorraum ist, und wenn es in V ein pseudo-euklidisches Skalarprodukt g gibt, das unter der Gruppe $O(p, q)$ invariant ist, dann kann man mit einer bzgl. g orthogonalen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V auch schreiben:

$$g_{ab} := g(e_a, e_b) = \begin{cases} +1 & \text{für } a = b \in \{1, \dots, p\}; \\ -1 & \text{für } a = b \in \{p+1, \dots, n\}; \\ 0 & \text{für } a \neq b. \end{cases} \quad (28.2.13)$$

Mit $q := n - p$ bezeichnet man dann die Clifford-Algebra als

$$Cl(p, q) := Cl(V, Q). \quad (28.2.14)$$

5. Da es etwas lästig ist bei jedem $i(v)$, bzw. $i(e_a)$, die Einbettung $i : V \rightarrow Cl(V, Q)$ explizit zu erwähnen, folgen wir hier der bei mathematischen Physikerinnen beliebten Schreibweise (siehe Choquet-Bruhat u. DeWitt-Morette (1989), S. 7):

$$\gamma_a := i(e_a), \quad (28.2.15)$$

womit die definierende Gleichung für die Clifford-Algebra jetzt diese Gestalt annimmt:

$$\gamma_a \gamma_a - g_{aa} \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} = 0, \quad \text{bzw.} \quad (28.2.16)$$

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} - 2g_{ab} \mathbb{1}_{Cl(V,Q)} = 0. \quad (28.2.17)$$

In Matrix-Darstellungen einer Clifford-Algebra verwenden wir in diesem Kapitel zur Bezeichnung der Gamma-Matrizen den Fettdruck, also $\boldsymbol{\gamma}_a$.

6. Gelegentlich macht es Sinn, einzelne Unterräume von $Cl(V, Q)$ zu betrachten, die durch die k -fachen Produkte $\gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_k}$ aufgespannt werden und als $Cl_k(V, Q)$ bezeichnet werden. Hierbei ist z.B.

$$Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V. \quad (28.2.18)$$

Anmerkung: Manchmal sieht man in der Literatur statt der definierenden Gleichung $i(v) \otimes i(v) - Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)} = 0$ auch die Formulierung $v^2 - Q(v) = 0$; hierbei ist dann nicht eindeutig klar, daß das Produkt in v^2 das Produkt von $Cl(V, Q)$ ist und $Q : V \rightarrow K$ in $Cl(V, Q)$ eingebettet werden muß, damit diese Gleichung Sinn ergibt.

Mit $g(e_a, e_b) \equiv 0$ folgt $\{\gamma_a, \gamma_b\} = \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 0$, und die hierdurch generierte Clifford-Algebra ist dann gerade die Graßmann-Algebra, siehe das vorangegangene Kapitel (27).

Wenn $\{e_1, \dots, e_n\} \in V$ eine Orthogonalbasis bzgl. g in V ist, dann kann man hieraus eine Basis von $Cl(V, Q)$ (als einem Vektorraum) konstruieren. Diese Basis von $Cl(V, Q)$ besteht aus allen geordneten Produkten der Form $\gamma_1 \cdots \gamma_k \cdots \gamma_n$ mit $1 \leq k \leq n$, wobei jedes γ_k im Produkt nullmal oder einmal vorkommt:

$$\begin{aligned} & \{ \gamma_1^{i_1} \cdots \gamma_n^{i_n} \mid \text{mit } i_k \in \{0, 1\} \text{ für } 1 \leq k \leq n \} \\ & = \{ \gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1 \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1} \gamma_n, \dots, \dots, \gamma_1 \cdots \gamma_n \}. \end{aligned} \quad (28.2.19)$$

Damit ergibt sich als Vektorraum-Dimension der Clifford-Algebra $\dim Cl(V, Q) = 2^n$.

28.3 Struktur und 8-Periodizität

Die reellen Clifford-Algebren $Cl(p, q)$ lassen sich rekursiv aufbauen. Dazu benötigt man die explizite Form der niedrigdimensionalen Clifford-Algebren. Um die obige Einbettung $i : V \rightarrow Cl(V, Q)$ von der imaginären Einheit i mit $i^2 = -1$ zu unterscheiden schreiben wir im folgenden die imaginäre Einheit als \mathbf{i} . Sei $K = \mathbb{R}$, dann gilt:

$$1. \quad Cl(0, 0) \approx \mathbb{R}, \quad (28.3.1)$$

denn sei V ein 0-dimensionaler Vektorraum, dann ist $Cl(0, 0) = \mathbb{R} \mathbb{1}_{Cl(0,0)} = \mathbb{R} \gamma_0$.

$$2. \quad Cl(1, 0) \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad (28.3.2)$$

denn sei $V = \mathbb{R}$ ein 1-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{e_1\}$ und der euklidischen Standardmetrik g mit $g(e_1, e_1) = 1$. Damit ist $Cl(1, 0) = \mathbb{R} \mathbb{1}_{Cl(1,0)} + \mathbb{R} \gamma_1 \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

$$3. \quad Cl(0, 1) \approx \mathbb{C}, \quad (28.3.3)$$

denn sei $V = \mathbb{R}$ ein 1-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{e_1\}$ und der euklidischen Standardmetrik g mit $g(e_1, e_1) = -1 = \mathbf{i}^2$ und also $e_1 = \mathbf{i}$. Damit ist $Cl(0, 1) = \mathbb{R} \mathbb{1}_{Cl(0,1)} + \mathbb{R}\gamma_1 \approx \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} = \mathbb{C}$.

4. $Cl(2, 0) \approx M_2(\mathbb{R})$, der Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen, (28.3.4)

denn sei $V = \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{e_1, e_2\}$, dann besteht die Basis von $Cl(2, 0)$ aus

$$\{\gamma_0 = \mathbb{1}_{Cl(2,0)}, \gamma_1 = i(e_1), \gamma_2 = i(e_2), \gamma_1\gamma_2 = i(e_1)i(e_2)\} \quad \text{mit } \gamma_1\gamma_1 = \gamma_2\gamma_2 = \mathbb{1}_{Cl(2,0)} .$$

Mittels der Pauli-Matrizen kann man eine Basis im Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ konstruieren:

$$\sigma_0 = \mathbb{1}_{M_2(\mathbb{R})}, \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Für den Antikommutator von σ_i und σ_j gilt $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}_{M_2(\mathbb{R})}$ und für die Quadrate folgt $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{1}_{M_2(\mathbb{R})}$. Dann liefert die Abbildung

$$\gamma_0 \mapsto \sigma_0, \gamma_1 \mapsto \sigma_1, \gamma_2 \mapsto \sigma_3, \gamma_1\gamma_2 \mapsto \sigma_1\sigma_3 = \mathbf{i}\sigma_2$$

einen reellen Isomorphismus von $Cl(2, 0)$ in den Raum der reellen 2×2 Matrizen $M_2(\mathbb{R})$.

5. $Cl(1, 1) \approx M_2(\mathbb{R})$, der Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen, (28.3.5)

denn sei $V = \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{e_1, e_2\}$, dann besteht die Basis von $Cl(1, 1)$ aus

$$\{\gamma_0 = \mathbb{1}_{Cl(1,1)}, \gamma_1 = i(e_1), \gamma_2 = i(e_2), \gamma_1\gamma_2 = i(e_1)i(e_2)\} \quad \text{mit } \gamma_1\gamma_1 = -\gamma_2\gamma_2 = \mathbb{1}_{Cl(1,1)} .$$

Mittels der Pauli-Matrizen kann man wie oben eine Basis im Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ konstruieren. Dann liefert die Abbildung

$$\gamma_0 \mapsto \sigma_0, \gamma_1 \mapsto \sigma_1, \gamma_2 \mapsto \mathbf{i}\sigma_2, \gamma_1\gamma_2 \mapsto \sigma_1\mathbf{i}\sigma_2 = -\sigma_3$$

einen reellen Isomorphismus von $Cl(1, 1)$ in den Raum der reellen 2×2 Matrizen $M_2(\mathbb{R})$.

6. $Cl(0, 2) \approx \mathbb{H}$, der Vektorraum der Quaternionen. (28.3.6)

Die von Hamilton im Jahr 1843 gefundenen Quaternionen verallgemeinern die komplexen Zahlen. Sie enthalten die drei 'komplexen' Einheiten $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mit

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad \text{und} \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} .$$

Sei $V = \mathbb{R}^2$ ein 2-dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\{e_1, e_2\}$, dann besteht die Basis von $Cl(0, 2)$ aus

$$\{\gamma_0 = \mathbb{1}_{Cl(0,2)}, \gamma_1 = i(e_1), \gamma_2 = i(e_2), \gamma_1\gamma_2 = i(e_1)i(e_2)\} \quad \text{mit } \gamma_1\gamma_1 = \gamma_2\gamma_2 = -\mathbb{1}_{Cl(0,2)} .$$

Die Abbildung

$$\gamma_0 \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{H}}, \gamma_1 \mapsto \mathbf{i}, \gamma_2 \mapsto \mathbf{j}, \gamma_1\gamma_2 \mapsto \mathbf{ij} = \mathbf{k}$$

liefert dann einen Isomorphismus von $Cl(0, 2)$ in die Algebra \mathbb{H} der Quaternionen. Man kann aber auch einen Isomorphismus von $Cl(0, 2)$ in eine Matrix-Darstellung der Algebra \mathbb{H} mittels der Pauli-Matrizen konstruieren. Dies liefert gerade die Abbildung

$$\gamma_0 \mapsto \sigma_0, \gamma_1 \mapsto \mathbf{i}\sigma_1, \gamma_2 \mapsto \mathbf{i}\sigma_2, \gamma_1\gamma_2 \mapsto \mathbf{i}\sigma_1\mathbf{i}\sigma_2 = -\mathbf{i}\sigma_3 .$$

Hiermit hat man also eine Darstellung von \mathbb{H} in $M_2(\mathbb{C})$ konstruiert, d.h. im Raum der komplexen 2×2 Matrizen.

Nun soll die 8-Periodizität der reellen Clifford-Algebren gezeigt werde. Diese hatte ja bereits Élie Cartan im Jahr 1908 gefunden und war schließlich von Bott zu Beginn der 1960'er Jahre neu entdeckt worden. Wir folgen Gallier (2014), S. 33 ff., jedoch wiederum in unseren Bezeichnungen.

Lemma 28.3.1

$$1. \quad Cl(0, n+2) \quad \approx Cl(n, 0) \otimes Cl(0, 2) , \quad (28.3.7)$$

$$2. \quad Cl(n+2, 0) \quad \approx Cl(0, n) \otimes Cl(2, 0) , \quad (28.3.8)$$

$$3. \quad Cl(p+1, q+1) \approx Cl(p, q) \otimes Cl(1, 1) . \quad (28.3.9)$$

Beweis: 1. Seien $v \in V = \mathbb{R}^{n+2}$ und $Q(v) = g(v, v) = -\|v\|^2$ die euklidische Standardnorm. Seien weiter $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}$ Generatoren von $Cl(n, 0)$ und $\{\gamma''_1, \gamma''_2\}$ Generatoren von $Cl(0, 2)$. Sei i_V eine Einbettung $i_V : V \rightarrow Cl(n, 0) \otimes Cl(0, 2)$ mit

$$i_V(e_i) := \begin{cases} \gamma'_i \otimes \gamma''_1\gamma''_2 & \text{für } 1 \leq i \leq n , \\ \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes \gamma''_{i-n} & \text{für } n+1 \leq i \leq n+2 . \end{cases}$$

Damit und mit $\gamma'_i\gamma'_j = -\gamma'_j\gamma'_i$ für $i \neq j$, $(\gamma'_i)^2 = \mathbb{1}_{Cl(n,0)}$, $\gamma''_1\gamma''_2 = -\gamma''_2\gamma''_1$, $(\gamma''_1)^2 = (\gamma''_2)^2 = -\mathbb{1}_{Cl(0,2)}$ folgt:

$$\begin{aligned} \text{für } 1 \leq i, j \leq n : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\ &= (\gamma'_i \otimes \gamma''_1\gamma''_2)(\gamma'_j \otimes \gamma''_1\gamma''_2) + (\gamma'_j \otimes \gamma''_1\gamma''_2)(\gamma'_i \otimes \gamma''_1\gamma''_2) \\ &= (\gamma'_i\gamma'_j + \gamma'_j\gamma'_i) \otimes (\gamma''_1\gamma''_2)^2 \\ &= -2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(0,2)} , \end{aligned}$$

$$\text{für } n+1 \leq i, j \leq n+2 : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes (\gamma''_{i-n} \gamma''_{j-n} + \gamma''_{j-n} \gamma''_{i-n}) \\
&= -2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(0,2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+2 : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i) i_V(e_j) + i_V(e_j) i_V(e_i) \\
&= \gamma'_i \otimes \gamma''_1 \gamma''_2 \gamma''_{j-n} + \gamma'_i \otimes \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 \\
&= \gamma'_i \otimes (-1) \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 + \gamma'_i \otimes \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 = 0.
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $v \in V$

$$(i_V(v))^2 = -\|v\|^2 \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(0,2)}.$$

Jetzt kann man mit $V = \mathbb{R}^{n+2}$ mit $Q(v) = g(v, v) = -\|v\|^2$ die Clifford-Algebra $Cl(0, n+2)$ erzeugen und deren Generatoren $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\}$ auf die Generatoren $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n, \gamma''_1, \gamma''_2\}$ abbilden. Diese Abbildung ist surjektiv und aus Dimensionsgründen auch injektiv, also ein Isomorphismus:

$$\begin{aligned}
\dim Cl(0, n+2) &= 2^{n+2} = 2^n \cdot 2 = \dim Cl(n, 0) \cdot \dim Cl(0, 2) \\
&= \dim(Cl(n, 0) \otimes Cl(0, 2)).
\end{aligned}$$

2. Der Beweis in diesem Fall läuft völlig analog zum Fall 1, jedoch mit positivem Vorzeichen von $Q(v)$. Seien $v \in V = \mathbb{R}^{n+2}$ und $Q(v) = g(v, v) = +\|v\|^2$ die euklidische Standardnorm. Seien weiter $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}$ Generatoren von $Cl(0, n)$ und $\{\gamma''_1, \gamma''_2\}$ Generatoren von $Cl(2, 0)$. Sei i_V eine Einbettung $i_V : V \rightarrow Cl(0, n) \otimes Cl(2, 0)$ mit

$$i_V(e_i) := \begin{cases} \gamma'_i \otimes \gamma''_1 \gamma''_2 & \text{für } 1 \leq i \leq n, \\ \mathbb{1}_{Cl(0,n)} \otimes \gamma''_{i-n} & \text{für } n+1 \leq i \leq n+2. \end{cases}$$

Damit und mit $\gamma'_i \gamma'_j = -\gamma'_j \gamma'_i$ für $i \neq j$, $(\gamma'_i)^2 = -\mathbb{1}_{Cl(0,n)}$, $\gamma''_1 \gamma''_2 = -\gamma''_2 \gamma''_1$, $(\gamma''_1)^2 = (\gamma''_2)^2 = +\mathbb{1}_{Cl(2,0)}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\text{für } 1 \leq i, j \leq n : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i) i_V(e_j) + i_V(e_j) i_V(e_i) \\
&= (\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \gamma''_2)(\gamma'_j \otimes \gamma''_1 \gamma''_2) + (\gamma'_j \otimes \gamma''_1 \gamma''_2)(\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \gamma''_2) \\
&= (\gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i) \otimes (\gamma''_1 \gamma''_2)^2 \\
&= +2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(0,n)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(2,0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } n+1 \leq i, j \leq n+2 : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i) i_V(e_j) + i_V(e_j) i_V(e_i) \\
&= \mathbb{1}_{Cl(0,n)} \otimes (\gamma''_{i-n} \gamma''_{j-n} + \gamma''_{j-n} \gamma''_{i-n})
\end{aligned}$$

$$= +2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(n,0)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(2,0)} ,$$

$$\begin{aligned} \text{für } 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+2 : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\ &= \gamma'_i \otimes \gamma''_1 \gamma''_2 \gamma''_{j-n} + \gamma'_i \otimes \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 \\ &= \gamma'_i \otimes (-1) \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 + \gamma'_i \otimes \gamma''_{j-n} \gamma''_1 \gamma''_2 = 0 . \end{aligned}$$

Also gilt für alle $v \in V$

$$(i_V(v))^2 = +\|v\|^2 \mathbb{1}_{Cl(0,n)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(2,0)} .$$

Jetzt kann man mit $V = \mathbb{R}^{n+2}$ mit $Q(v) = g(v, v) = +\|v\|^2$ die Clifford-Algebra $Cl(n+2, 0)$ erzeugen und deren Generatoren $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\}$ auf die Generatoren $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n, \gamma''_1, \gamma''_2\}$ abbilden. Diese Abbildung ist surjektiv und aus Dimensionsgründen auch injektiv, also ein Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \dim Cl(n+2, 0) &= 2^{n+2} = 2^n \cdot 2 = \dim Cl(0, n) \cdot \dim Cl(2, 0) \\ &= \dim(Cl(0, n) \otimes Cl(2, 0)) . \end{aligned}$$

3. Der Beweis in diesem Fall verläuft wiederum ähnlich wie die beiden vorherigen Beweise. Seien $v \in V = \mathbb{R}^{p+q+2}$ und $Q(v) = g(v, v) = v_1^2 + \dots + v_{p+1}^2 - v_{p+2}^2 - \dots - v_{p+q+2}^2$ die euklidische Standardnorm. Seien weiter $\{e_1, \dots, e_{p+1}, \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{q+1}\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_p, \hat{\gamma}'_1, \dots, \hat{\gamma}'_q\}$ Generatoren von $Cl(p, q)$ und $\{\gamma''_1, \hat{\gamma}''_1\}$ Generatoren von $Cl(1, 1)$. Sei i_V eine Einbettung $i_V : V \rightarrow Cl(p, q) \otimes Cl(1, 1)$ mit

$$\begin{aligned} i_V(e_i) &:= \begin{cases} \gamma'_i \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1 & \text{für } 1 \leq i \leq p , \\ \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \gamma''_1 & \text{für } i = p+1 , \end{cases} \\ i_V(\hat{e}_j) &:= \begin{cases} \hat{\gamma}'_j \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1 & \text{für } 1 \leq j \leq q , \\ \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \hat{\gamma}''_1 & \text{für } j = q+1 , \end{cases} \end{aligned}$$

Damit und mit $\gamma'_i \gamma'_j = -\gamma'_j \gamma'_i$ für $i \neq j$, $(\gamma'_i)^2 = \mathbb{1}_{Cl(p,q)}$ für $1 \leq i \leq p$, $(\gamma'_j)^2 = -\mathbb{1}_{Cl(p,q)}$ für $1 \leq j \leq q$, $\gamma''_1 \hat{\gamma}''_1 = -\hat{\gamma}''_1 \gamma''_1$, $(\gamma''_1)^2 = +\mathbb{1}_{Cl(1,1)}$, $(\hat{\gamma}''_1)^2 = -\mathbb{1}_{Cl(1,1)}$ folgt:

$$\begin{aligned} \text{für } 1 \leq i, j \leq p : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} &= i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\ &= (\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)(\gamma'_j \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1) + (\gamma'_j \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)(\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1) \\ &= (\gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i) \otimes (\gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)^2 \\ &= +2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(1,1)} , \end{aligned}$$

$$\text{für } 1 \leq i, j \leq q : \quad \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i)$$

$$\begin{aligned}
&= (\gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i) \otimes (\gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)^2 \\
&= -2\delta_{ij} \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(1,1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q &:= \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= (\gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i) \otimes (\gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } i = p+1, 1 \leq j \leq q &: \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= (\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \gamma''_1)(\hat{\gamma}'_j \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1) + \\
&\quad (\hat{\gamma}'_j \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \gamma''_1) \\
&= \hat{\gamma}'_j \otimes (\hat{\gamma}''_1 - \gamma''_1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } 1 \leq i \leq p, j = q+1 &: \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= (\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1)(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \hat{\gamma}''_1) + \\
&\quad (\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \hat{\gamma}''_1)(\gamma'_i \otimes \gamma''_1 \hat{\gamma}''_1) \\
&= \gamma'_i \otimes (-\gamma''_1 + \gamma''_1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } i = p+1, j = q+1 &: \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes (\gamma''_1 \hat{\gamma}''_1 + \hat{\gamma}''_1 \gamma''_1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } i = p+1, j = p+1 &: \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= 2(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \gamma''_1)(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \gamma''_1) \\
&= 2(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(1,1)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{für } i = q+1, j = q+1 &: \{i_V(e_i), i_V(e_j)\} = i_V(e_i)i_V(e_j) + i_V(e_j)i_V(e_i) \\
&= 2(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \hat{\gamma}''_1)(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \hat{\gamma}''_1) \\
&= -2(\mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(1,1)}).
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $v \in V$

$$(i_V(v))^2 = Q(v) \mathbb{1}_{Cl(p,q)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(1,1)}.$$

Jetzt kann man mit $V = \mathbb{R}^{n+2}$ mit $Q(v)$ die Clifford-Algebra $Cl(p+1, q+1)$ erzeugen und deren Generatoren $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}\}$ auf die Generatoren $\{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n, \gamma''_1, \hat{\gamma}''_1\}$ abbilden. Diese Abbildung ist surjektiv und aus Dimensionsgründen auch injektiv, also ein Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \dim Cl(p+1, q+1) &= 2^{n+2} = 2^n \cdot 2 = \dim Cl(p, q) \cdot \dim Cl(1, 1) \\ &= \dim(Cl(p, q) \otimes Cl(1, 1)) . \end{aligned} \quad \square$$

Wie man gerade eben beim Beweis des 3. Falles im obigen Lemma gesehen hat, können Isomorphismen zwischen Clifford-Algebren rasch recht unübersichtlich werden. Diese Situation ruft also nach einer Verallgemeinerung, und hier sind dann Mathematiker gefragt :-). Wir orientieren uns daher beim folgenden Satz an der mathematisch sorgfältig ausgearbeiteten Vorlesung von Fritzsche (2003), und hier speziell an S. 32 ff. Im Gegensatz zu Fritzsche schreiben wir aus didaktischen Gründen die Einbettungen der Vektorräume in die Clifford-Algebren explizit hin, auch wenn dadurch die Formeln etwas schwerfälliger wirken.

Satz 28.3.3 *Seien V, Q und V', Q' zwei n -dimensionale Vektorräume mit ihren jeweiligen quadratischen Formen, sei V_2, Q_2 ein 2-dimensionaler Vektorraum mit einer quadratischen Form und mit einer orthonormalen Basis $\{e_1, e_2\}$. Zwischen V' und V gebe es einen Isomorphismus*

$$\varphi : V' \rightarrow V \quad \text{mit} \quad Q' = -Q_2(e_1)Q_2(e_2)\varphi^*(Q) .$$

Seien $v' \in V'$ mit $j' : V' \rightarrow Cl(V', Q')$ und $v = \varphi(v') \in V$ mit $j : V \rightarrow Cl(V, Q)$ und $w \in V_2$ mit $j_2 : V_2 \rightarrow Cl(V_2, Q_2)$ und mit $\gamma_1 = j_2(e_1)$, $\gamma_2 = j_2(e_2)$.

Eine lineare Einbettung

$$i : V' \oplus V_2 \rightarrow Cl(V_2, Q_2) \otimes Cl(V, Q) , \quad (28.3.10)$$

$$i(v' + w) := (\gamma_1\gamma_2 \otimes j(\varphi(v'))) + (j_2(w) \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}) \quad (28.3.11)$$

induziert einen Algebra-Isomorphismus

$$\hat{i} : Cl(V' \oplus V_2, Q' + Q_2) \rightarrow Cl(V_2, Q_2) \otimes Cl(V, Q) . \quad (28.3.12)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} i(v' + w) \cdot i(v' + w) &= (\gamma_1\gamma_2 \otimes j(\varphi(v'))) + (j_2(w) \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}) \\ &\quad \cdot (\gamma_1\gamma_2 \otimes j(\varphi(v'))) + (j_2(w) \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}) \\ &= \gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_2 \otimes j(v)j(v) + j_2(w)j_2(w) \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \\ &\quad + \gamma_1\gamma_2j_2(w) \otimes j(v) + j_2(w)\gamma_1\gamma_2 \otimes j(v) . \end{aligned}$$

Mit $j_2(w) = j_2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2$ folgt

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 j_2(w) + j_2(w) \gamma_1 \gamma_2 &= \gamma_1 \gamma_2 (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) + (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) \gamma_1 \gamma_2 \\ &= -\alpha_1 \gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_2 + \alpha_1 \gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} i(v' + w)^2 &= -Q_2(e_1)Q_2(e_2) \mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes j(v)^2 + Q_2(w) \mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \\ &= (-Q_2(e_1)Q_2(e_2)Q(v) + Q_2(w)) \mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \\ &= (Q'(v') + Q_2(w)) \mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \\ &= (Q' + Q_2)(v' + w) \mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}. \end{aligned}$$

Wegen der Universalitätseigenschaft der Clifford-Algebren (28.2.4) gibt es einen Homomorphismus

$$\hat{i} : Cl(V' \oplus V_2, Q' + Q_2) \rightarrow Cl(V_2, Q_2) \otimes Cl(V, Q).$$

Im Bild von \hat{i} sind enthalten:

$$\begin{aligned} i(0_{V'} + e_i) &= \gamma_i \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}, \\ i(v' + 0_{V_2}) &= \gamma_1 \gamma_2 \otimes j(v), \\ i(v' + 0_{V_2})i(0_{V'} + e_1)i(0_{V'} + e_2) &= (\gamma_1 \gamma_2 \otimes j(v))(\gamma_1 \gamma_2 \otimes \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}) \\ &= -Q_2(e_1)Q_2(e_2)(\mathbb{1}_{Cl(V_2, Q_2)} \otimes j(v)). \end{aligned}$$

Diese Generatoren erzeugen $Cl(V_2, Q_2) \otimes Cl(V, Q)$ und damit ist \hat{i} surjektiv. Sowohl $Cl(V' \oplus V_2, Q' + Q_2)$ als auch $Cl(V_2, Q_2) \otimes Cl(V, Q)$ sind 2^{n+2} -dimensional und damit ist \hat{i} ein Isomorphismus. \square

Als Anwendung dieses Satzes soll das folgende Lemma gezeigt werden.

Lemma 28.3.5

$$Cl(q, p + 2) \approx Cl(0, 2) \otimes Cl(p, q). \quad (28.3.13)$$

Beweis: Seien $V' = \mathbb{R}^{q+p}$ mit $Q'(v') = Q'_{q,p}(v') = (v_1'^2 + \dots + v_q'^2 - v_{q+1}'^2 - \dots - v_{q+p}'^2)$ und $V = \mathbb{R}^{p+q}$ mit $Q(v) = Q_{p,q}(v) = (v_1^2 + \dots + v_p^2 - v_{p+1}^2 - \dots - v_{p+q}^2)$ und $V_2 = \mathbb{R}^2$ mit

$Q_2(w) = Q_{0,2}(w) = -w_1^2 - w_2^2$. Die Abbildung $\varphi : V' \rightarrow V$ sei durch die Vertauschung der p -Komponenten mit den q -Komponenten gegeben, d.h. durch

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ v_{p+q} \end{pmatrix} = \varphi(v') = \varphi \left(\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_q \\ v'_{q+1} \\ \vdots \\ v'_{q+p} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v'_{q+1} \\ \vdots \\ v'_{q+p} \\ v'_1 \\ \vdots \\ v'_q \end{pmatrix} .$$

Mit dieser Konstruktion gilt $\varphi^*Q = -Q'$ und

$$-Q_2(e_1)Q_2(e_2)\varphi^*Q = -(-1)(-1)(-Q') = Q' .$$

Damit sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt und es folgt

$$Cl(\mathbb{R}^{q+p+2}, Q'_{q,p+2}) \approx Cl(\mathbb{R}^2, Q_{0,2}) \otimes Cl(\mathbb{R}^{p+q}, Q_{p,q}) , \quad \text{bzw.}$$

$$Cl(q, p+2) \approx Cl(0, 2) \otimes Cl(p, q) . \quad \square$$

Eine Folgerung dieses Lemmas benötigt man zum Beweis der 8-Periodizität. Mit 28.3.9 und 28.3.13 ergibt sich:

$$\begin{aligned} Cl(p+1, q+1) \approx Cl(p, q) \otimes Cl(1, 1) &\Rightarrow Cl(2, 2) \approx Cl(1, 1) \otimes Cl(1, 1) \\ &\approx M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) , \\ Cl(q, p+2) \approx Cl(0, 2) \otimes Cl(p, q) &\Rightarrow Cl(2, 2) \approx Cl(0, 2) \otimes Cl(0, 2) \\ &\approx \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} . \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Formen für $Cl(2, 2)$ folgt:

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \approx M_2(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{R}) = M_4(\mathbb{R}) . \quad (28.3.14)$$

Mit all diesen Ergebnissen kann man jetzt den Satz von Élie Cartan und Bott über die 8-Periodizität der reellen Clifford-Algebren beweisen.

Satz 28.3.7 (Élie Cartan und Bott)

$$Cl(0, n+8) \approx Cl(0, n) \otimes Cl(0, 8) \approx Cl(0, n) \otimes M_{16}(\mathbb{R}) , \quad (28.3.15)$$

$$Cl(n+8, 0) \approx Cl(n, 0) \otimes Cl(8, 0) \approx Cl(n, 0) \otimes M_{16}(\mathbb{R}) . \quad (28.3.16)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
Cl(0, n+8) &\approx Cl(n+6, 0) \otimes Cl(0, 2) \approx Cl(0, n+4) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \\
&\approx Cl(n+2, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \\
&\approx Cl(0, n) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \\
&\approx Cl(0, n) \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \\
&\approx Cl(0, n) \otimes M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \approx Cl(0, n) \otimes M_{16}(\mathbb{R}) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cl(n+8, 0) &\approx Cl(0, n+6,) \otimes Cl(2, 0) \approx Cl(n+4, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \\
&\approx Cl(0, n+2) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \\
&\approx Cl(n, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes Cl(2, 0) \\
&\approx Cl(n, 0) \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes M_2(\mathbb{R}) \\
&\approx Cl(n, 0) \otimes M_4(\mathbb{R}) \otimes M_4(\mathbb{R}) \approx Cl(n, 0) \otimes M_{16}(\mathbb{R}) . \quad \square
\end{aligned}$$

Auch für die komplexifizierten Clifford-Algebren gibt es einen Periodizitätssatz.

Satz 28.3.9

$$Cl^{\mathbb{C}}(n+2) \approx Cl^{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} Cl^{\mathbb{C}}(2) \quad \text{mit } Cl^{\mathbb{C}}(2) = M_2(\mathbb{C}) . \quad (28.3.17)$$

Beweis: Zunächst einmal gilt

$$Cl^{\mathbb{C}}(n) = Cl(n, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = Cl(0, n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
Cl^{\mathbb{C}}(n+2) &= Cl(0, n+2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (Cl(n, 0) \otimes Cl(0, 2)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
&= (Cl(n, 0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (Cl(0, 2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\
&\approx Cl^{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \approx Cl^{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) . \quad \square
\end{aligned}$$

Damit folgt sofort:

$$Cl^{\mathbb{C}}(2n) \approx Cl^{\mathbb{C}}(2n-2) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \approx \dots \approx M_{2^n}(\mathbb{C}) , \quad (28.3.18)$$

$$\begin{aligned}
Cl^{\mathbb{C}}(2n+1) &\approx Cl^{\mathbb{C}}(1) \otimes_{\mathbb{C}} M_{2^n}(\mathbb{C}) = (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} M_{2^n}(\mathbb{C}) \\
&= M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) . \quad (28.3.19)
\end{aligned}$$

28.4 Clifford-, Pin- und Spin-Gruppen

Der nächste Schritt auf dem Weg hin zu den für Physiker so interessanten Spin-Gruppen ist die Einführung von zwei speziellen Abbildungen auf $Cl(V, Q)$:

Definition 28.4.1 Seien $v \in V$ und $x, y \in Cl(V, Q)$, dann definiert man

$$\alpha : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q) \quad \text{mit } \alpha(i(v)) := -i(v), \quad (28.4.1)$$

$$t : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q) \quad \text{mit } t(i(v)) := i(v) \text{ und } t(xy) := t(y)t(x). \quad (28.4.2)$$

α ist ein Automorphismus und t ein Anti-Automorphismus. Beide Abbildungen sind Involutionen, d.h.

$$\alpha \circ \alpha = \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \quad \text{und} \quad t \circ t = \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}. \quad (28.4.3)$$

Hiermit kann man dann die Clifford Konjugation $\alpha \circ t$ und die Spinor-Norm N definieren:

$$\alpha \circ t : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q) \quad \text{mit } \bar{x} := \alpha(t(x)), \quad (28.4.4)$$

$$N : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q) \quad \text{mit } N(x) := x\bar{x}. \quad (28.4.5)$$

α überführt die quadratische Form Q in sich selbst, und damit sind auch das von

$$B := \{v \mid v \in V, i(v) \otimes i(v) - Q(v) \mathbb{1}_{\otimes(V)} = 0\}$$

erzeugte Ideal I und die Clifford-Algebra

$$Cl(V, Q) := \otimes(V)/I$$

unter α invariant. Diese Abbildung α gibt nun Anlaß zu einer \mathbb{Z}_2 -Graduierung von $Cl(V, Q)$:

$$Cl(V, Q) = Cl^0(V, Q) \oplus Cl^1(V, Q) \quad \text{mit} \quad (28.4.6)$$

$$Cl^i(V, Q) := \{x \in Cl(V, Q) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}, \quad (28.4.7)$$

d.h. zu einer Graduierung in die geraden und ungeraden Anteile von $Cl(V, Q)$. Dabei bildet $Cl^0(V, Q)$ eine Unter algebra von $Cl(V, Q)$, im Gegensatz zu $Cl^1(V, Q)$.

Für die Clifford Konjugation gilt offensichtlich $\alpha \circ t = t \circ \alpha$.

Seien $\{e_a\}$ eine Basis von V , $v \in V$, $\{\gamma_a = i(e_a)\}$ die Generatoren von $Cl(V, Q)$ und $x = i(v)$ dann folgt:

$$\overline{\gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_k}} = \overline{i(e_{a_1}) \cdots i(e_{a_k})} = (-1)^k i(e_{a_k}) \cdots i(e_{a_1}) = (-1)^k \gamma_{a_k} \cdots \gamma_{a_1}, \quad (28.4.8)$$

$$N(\gamma_{a_1} \cdots \gamma_{a_k}) = (-1)^k \gamma_{a_1}^2 \cdots \gamma_{a_k}^2 = (-1)^k Q(e_{a_1}) \cdots Q(e_{a_k}) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}, \quad (28.4.9)$$

$$\begin{aligned} N(x) &= N(i(v)) = i(v)\overline{i(v)} = - \sum_{a,b=1}^n v^a i(e_a) v^b i(e_b) \\ &= - \sum_{a,b=1}^n v^a \gamma_a v^b \gamma_b = - \sum_{a=1}^n (v^a)^2 (\gamma_a)^2 = - \sum_{a=1}^n (v^a)^2 \mathbb{1}_{Cl(V,Q)} \\ &= - \sum_{a=1}^n (v^a e_a)^2 \mathbb{1}_{Cl(V,Q)} = -Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}. \end{aligned} \quad (28.4.10)$$

Man sieht hier also, daß $N : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q)$ eine Erweiterung der quadratischen Form $Q : V \rightarrow K$ darstellt.

Nun kann man die sog. Clifford-Gruppe definieren. Allerdings hat Lounesto (2001), S. 220, darauf hingewiesen, daß diese Gruppe nicht von Clifford stammt, sondern in den Jahren 1880/1886 von Lipschitz eingeführt wurde, weshalb Lounesto es vorzieht von der Lipschitz-Gruppe zu sprechen. Zunächst führt man die multiplikative Gruppe aller invertierbaren Elemente von $Cl(V, Q)$ ein, die man als $Cl^*(V, Q)$ bezeichnet. Diese Gruppe ist nicht leer, denn mit $v \in V$ und $Q(v) \neq 0$ folgt ja $i(v)i(v) = Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}$ und somit ist $i(v) \in Cl^*(V, Q)$. Nun kann man mittels $Cl^*(V, Q)$ eine adjungierte Darstellung Ad von $Cl(V, Q)$ definieren, die einen Automorphismus von $Cl(V, Q)$ darstellt:

$$Ad_x y := xy(x)^{-1} \quad \text{mit } x \in Cl^*(V, Q), y \in Cl(V, Q).$$

Atiyah u. a. (1964) wenden eine adjungierte Darstellung jetzt nicht auf ganz $Cl(V, Q)$ an, sondern nur auf $Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V$ und haben außerdem diese adjungierte Darstellung etwas modifiziert, um im folgenden Formalismus die Anzahl der auftretenden Minus-Zeichen zu reduzieren. Man spricht bei ihrer Darstellung von der getwisteten adjungierten Darstellung ρ , die manchmal auch als \widetilde{Ad} bezeichnet wird:

$$\rho : Cl^*(V, Q) \rightarrow GL(n), \quad \text{mit } n = \dim(V), \quad (28.4.11)$$

$$\rho_x y := \alpha(x)y(x)^{-1} \quad \text{mit } x \in Cl^*(V, Q), y \in Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V, \text{ bzw.}$$

$$\rho_x y := \alpha(x)i(v)(x)^{-1} \quad \text{mit } x \in Cl^*(V, Q), v \in V. \quad (28.4.12)$$

Häufig wird in der Literatur die Einbettung $i : V \rightarrow Cl(V, Q)$ weggelassen und implizit vorausgesetzt, da die Multiplikation ja nur in der Clifford-Algebra definiert ist. ρ_x ist linear und injektiv und wegen der endlichen Dimension von V also bijektiv und damit ein Automorphismus. Also ist $\rho : Cl^*(V, Q) \rightarrow GL(n)$.

Definition 28.4.2 Eine Clifford-Gruppe ist die folgende Untergruppe von $Cl^*(V, Q)$:

$$\Gamma(V, Q) := \{x \in Cl^*(V, Q) \mid \rho_x i(v) = \alpha(x)i(v)(x)^{-1} \in i(V) \text{ für } v \in V\}. \quad (28.4.13)$$

Wenn man in dieser Definition nur die geraden Anteile von $Cl^*(V, Q)$ berücksichtigt, dann spricht man von einer speziellen Clifford-Gruppe $\Gamma^+(V, Q)$. Man beachte, daß in $\Gamma^+(V, Q)$ jetzt $\alpha(x) = x$ ist.

$$\Gamma^+(V, Q) := \{x \in Cl^*(V, Q) \cap Cl^0(V, Q) \mid \rho_x i(v) = xi(v)(x)^{-1} \in i(V) \text{ für } v \in V\}. \quad (28.4.14)$$

Mit $x \in \Gamma(V, Q)$ sind auch $(x)^{-1} \in \Gamma(V, Q)$, $\alpha(x) \in \Gamma(V, Q)$, $t(x) \in \Gamma(V, Q)$ und $\bar{x} \in \Gamma(V, Q)$.

Beweis: Mit $x \in Cl^*(V, Q)$ ist auch $x^{-1} \in Cl^*(V, Q)$. Außerdem gibt es ein $w \in V$ mit $\alpha(x)i(v)(x)^{-1} = i(w)$. Damit folgt

$$i(v) = (\alpha(x))^{-1}i(w)(x^{-1})^{-1} = (\alpha(x^{-1}))i(w)(x^{-1})^{-1} \Rightarrow (x)^{-1} \in \Gamma(V, Q).$$

$$\begin{aligned} i(w) &= -\alpha(i(w)) = -\alpha(\alpha(x))\alpha(i(v))\alpha((x)^{-1}) \\ &= \alpha(\alpha(x))i(v)(\alpha(x))^{-1} \Rightarrow \alpha(x) \in \Gamma(V, Q). \end{aligned}$$

$$\alpha(x^{-1}) \in \Gamma(V, Q) \Rightarrow (x)^{-1}i(v)\alpha(x) = i(w) \Rightarrow$$

$$i(w) = t(i(w)) = \alpha(t(x))i(v)(t(x))^{-1} \Rightarrow t(x) \in \Gamma(V, Q). \quad \square$$

Die getwistete adjungierte Darstellung ρ_x mit $x := i(u) \in i(V)$ kann geometrisch als Spiegelung des Vektors $v \in V$ an einer Hyperfläche H senkrecht zu einem Vektor u verstanden werden, bzw. als eine Spiegelung von $y := i(v)$ an einer Hyperfläche senkrecht zu $x = i(u)$.

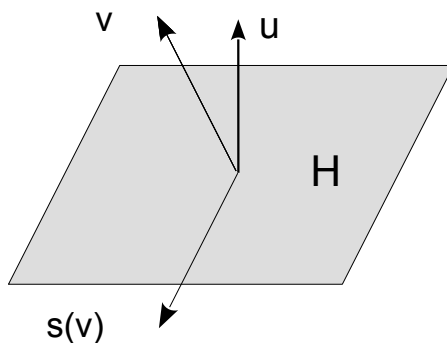


Abbildung 28.2: Spiegelung eines Vektors v an einer Hyperfläche H

Für den gespiegelten Vektor $s(v) \in V$, bzw. für $s(y) = s(i(v)) \in i(V) \subseteq Cl(V, Q)$ gilt nun:

$$s(v) = v - 2\frac{g(u, v)u}{Q(u)} \quad \text{bzw.} \quad s(y) = y - 2\frac{g(u, v)}{Q(u)}x,$$

mit

$$(x)^2 = Q(u) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}, \quad xy + yx = 2g(u, v) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} s(y) &= y - 2\frac{g(u, v)}{Q(u)}x = y - 2g(u, v)\frac{x}{Q(u)} \\ &= y - 2g(u, v)(x)^{-1} = y - (2g(u, v) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)})x^{-1} \\ &= y - (xy + yx)x^{-1} = -xyx^{-1} = \alpha(x)yx^{-1} = \rho_x y. \end{aligned} \quad (28.4.15)$$

Zunächst hatten wir die getwistete adjungierte Darstellung definiert als $\rho : Cl^*(V, Q) \rightarrow GL(n)$, welche auf $Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V$ mit $n = \dim(V)$ operiert. Da wir hier aber nur an der Clifford-Gruppe interessiert sind können wir den Definitionsbereich von ρ einschränken auf $\rho : \Gamma(V, Q) \rightarrow GL(n)$. Für den Kern dieser Abbildung gilt nun der folgende wichtige Satz.

Lemma 28.4.4 *Seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\rho : \Gamma(V, Q) \rightarrow GL(n)$, dann ist*

$$\ker(\rho) = K^* \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}. \quad (28.4.16)$$

Beweis: Seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{\gamma_1 = i(e_1), \dots, \gamma_n = i(e_n)\}$ die entsprechenden Erzeugenden von $Cl(V, Q)$. Seien weiter $v \in V$, $y = i(v)$ und $x \in \Gamma(V, Q)$ ein Element des $\ker(\rho)$, d.h. $\rho_x = \mathbb{1}_{GL(n)}$, womit folgt $\alpha(x)yx^{-1} = y$, bzw. $\alpha(x)y = yx$. Nun kann man x in seine gradierten Anteile zerlegen:

$$x = x^0 + x^1 \quad \text{mit } x^i \in Cl^i(V, Q) \quad \Rightarrow$$

$$x^0 y = y x^0 \quad \text{und} \quad -x^1 y = y x^1.$$

Wir können nun x^0 immer in der folgenden Form darstellen

$$x^0 = a^0 + \gamma_1 b^1 \quad \text{mit } a^0 \in Cl^0(V, Q), \quad b^1 \in Cl^1(V, Q),$$

so daß γ_1 weder in a^0 noch in b^1 vorkommt. Jetzt kann man $y = \gamma_1$ setzen und erhält:

$$x^0 y = y x^0 \quad \Rightarrow \quad (a^0 + \gamma_1 b^1) \gamma_1 = \gamma_1 (a^0 + \gamma_1 b^1) \quad \Rightarrow$$

$$a^0 \gamma_1 + \gamma_1 b^1 \gamma_1 = \gamma_1 a^0 + \gamma_1 \gamma_1 b^1 \quad \Rightarrow \quad a^0 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_1 b^1 = a^0 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_1 b^1 \quad \Rightarrow$$

$$\gamma_1 \gamma_1 b^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(e_1) \mathbb{1}_{Cl(V,Q)} b^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b^1 = 0.$$

Also enthält x^0 keinen Term mit γ_1 . Die gleiche Argumentation kann man auch anwenden, wenn man x^0 in der Form $x^0 = a^0 + \gamma_i b^i$ darstellt. Wiederum folgt, daß $b^i = 0$ ist, und x^0 also keinen Term mit γ_i enthält. Also hat x^0 die Form $x^0 = c \mathbb{1}_{Cl(V,Q)}$.

Völlig analog können wir nun x^1 immer in der folgenden Form darstellen

$$x^1 = a^1 + \gamma_1 b^0 \quad \text{mit} \quad a^1 \in Cl^1(V, Q), \quad b^0 \in Cl^0(V, Q),$$

so daß γ_1 weder in a^1 noch in b^0 vorkommt. Jetzt kann man $y = \gamma_1$ setzen und erhält:

$$\begin{aligned} -x^1 y = y x^1 &\Rightarrow -(a^1 + \gamma_1 b^0) \gamma_1 = \gamma_1 (a^1 + \gamma_1 b^0) \Rightarrow \\ -a^1 \gamma_1 - \gamma_1 b^0 \gamma_1 &= \gamma_1 a^1 + \gamma_1 \gamma_1 b^0 \Rightarrow -a^1 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_1 b^0 = -a^1 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_1 b^0 \Rightarrow \\ \gamma_1 \gamma_1 b^0 &= 0 \Rightarrow Q(e_1) \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} b^0 = 0 \Rightarrow b^0 = 0. \end{aligned}$$

Also enthält x^1 keinen Term mit γ_1 . Die gleiche Argumentation kann man auch anwenden, wenn man x^1 in der Form $x^1 = a^1 + \gamma_i b^0$ darstellt. Wiederum folgt, daß $b^0 = 0$ ist, und x^1 also keinen Term mit γ_i enthält. Da aber $x^1 \in Cl^1(V, Q)$ ein ungerades Element von $Cl(V, Q)$ ist muß x^1 identisch verschwinden. Also hat x die Form $x = x^0 = c \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}$. \square

Lemma 28.4.6 Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, dann induziert die Spinornorm $N(x) = x\bar{x}$ auf $\Gamma(V, Q)$ einen Homomorphismus

$$N : \Gamma(V, Q) \rightarrow K^* \mathbb{1}_{Cl(V, Q)},$$

$$N(xy) = N(x)N(y) \quad \text{für } x, y \in \Gamma(V, Q), \quad \text{und zusätzlich gilt}$$

$$N(\alpha(x)) = N(x), \quad N(t(x)) = N(\bar{x}). \quad (28.4.17)$$

Beweis: Für $x \in \Gamma(V, Q)$ gilt ja $\alpha(x)i(v)x^{-1} =: y \in i(V)$ und daher auch $y = t(y)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha(x)i(v)x^{-1} &= t(\alpha(x)i(v)x^{-1}) = (t(x))^{-1}i(v)\alpha(t(x)) \Rightarrow \\ i(v)\alpha(t(x))x &= (t(x))\alpha(x)i(v) = \alpha(\alpha(t(x))x)i(v). \end{aligned}$$

Mit $\alpha(t(x))x = \bar{x}x = N(\bar{x})$ folgt

$$i(v) = \alpha(\bar{x}x)i(v)(\bar{x}x)^{-1} \Rightarrow \bar{x}x = N(\bar{x}) \in \ker(\rho) = K^* \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}.$$

Nun ist mit $x \in \Gamma(V, Q)$ auch $\bar{x} \in \Gamma(V, Q)$ und damit folgt

$$\bar{\bar{x}}x = x\bar{x} = N(x) \in \ker(\rho) = K^* \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}.$$

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)\alpha(\bar{x}) = \alpha(x\bar{x}) = \alpha(N(x)) = N(x),$$

$$N(t(x)) = t(x)t(\bar{x}) = t(\bar{x}x) = t(N(\bar{x})) = N(\bar{x}).$$

Seien $x, y \in \Gamma(V, Q)$, dann ist $N(x)$ ein Homomorphismus wegen:

$$N(xy) = xy(\overline{xy}) = xy\bar{y}\bar{x} = xN(y)\bar{x} = N(x)N(y). \quad (28.4.18)$$

\square

Lemma 28.4.8

ρ auf $\Gamma(V, Q)$ läßt die Spinornorm invariant, d.h. $\rho(\Gamma(V, Q)) \subseteq O(V, Q)$, mit $n = \dim(V)$.

Beweis: Seien $v \neq 0 \in V$, $i(v) \in Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V$, dann gilt

$$\begin{aligned} N(\rho_x i(v)) &= N(\alpha(x)i(v)(x)^{-1}) = N(\alpha(x))N(i(v))N(x^{-1}) \\ &= N(\alpha(x))N(i(v))(N(x))^{-1} = N(i(v)) \\ &= -Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} \quad \Rightarrow \quad \rho_x \in O(V, Q) . \end{aligned} \quad (28.4.19)$$

□

Dieses Ergebnis kann auch als eine exakte Sequenz von Homomorphismen dargestellt werden. Zur Erinnerung: eine Sequenz von Homomorphismen

$$\dots \longrightarrow A_{r+1} \xrightarrow{\alpha_{r+1}} A_r \xrightarrow{\alpha_r} A_{r-1} \longrightarrow \dots \quad (28.4.20)$$

heißt *exakt*, wenn $\text{Im}(\alpha_{r+1}) = \ker(\alpha_r)$ ist. In unserem Zusammenhang ist die entsprechende Sequenz:

$$1 \longrightarrow K^* \mathbb{1}_V \xrightarrow{i} \Gamma(V, Q) \xrightarrow{\rho} O(V, Q) \longrightarrow \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} , \quad (28.4.21)$$

$$1 \longrightarrow K^* \mathbb{1}_V \xrightarrow{i} \Gamma^+(V, Q) \xrightarrow{\rho} SO(V, Q) \longrightarrow \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} . \quad (28.4.22)$$

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, daß $\text{Im}(i(K^* \mathbb{1}_V)) = K^* \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)} = \ker(\rho)$ ist. Da nun $\rho : \Gamma(V, Q) \rightarrow O(V, Q)$ ist, so bleibt noch zu beweisen, daß ρ tatsächlich surjektiv ist. Jedes Element der orthogonalen Gruppe $f \in O(V, Q)$ kann als Produkt von Spiegelungen dargestellt werden, also $f = s_1 \circ \dots \circ s_k$. Oben wurde gezeigt, daß ρ_{x_j} mit $x_j := i(u_j) \in i(V) \subseteq \Gamma(V, Q)$ als Spiegelung $s_j = \rho_{x_j}$ an einer Hyperfläche H senkrecht zum Vektor x_j verstanden werden kann. Das heißt, jedes Element von $f \in O(V, Q)$ ist ein Produkt $f = \rho_{x_1} \circ \dots \circ \rho_{x_k} = \rho_{x_1 \dots x_k}$ mit

$$N(f(i(v))) = N(\rho_{x_1 \dots x_k}(i(v))) = -Q(v) \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} ,$$

und damit ist ρ surjektiv.

Im Fall von $\Gamma^+(V, Q)$ argumentiert man folgendermaßen. Sei $f \in O(V, Q)$, dann setzt sich f für uneigentliche Isometrien aus einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen $f = s_1 \circ \dots \circ s_{2k+1}$ zusammen. Mit $x \in \Gamma^+(V, Q)$ folgt

$$\rho_{x_1 \dots x_{2k+1}} = \rho_x \quad \Rightarrow \quad x^{-1} x_1 \dots x_{2k+1} \in \ker(\rho) = c \mathbb{1}_{Cl(V, Q)} .$$

Nun ist aber $x_1 \dots x_{2k+1}$ ungerade und x und x^{-1} sind gerade und dies ist ein Widerspruch. Also kann ρ keine einzelne Spiegelung enthalten ist daher ein Element von $SO(n)$. □

Jetzt kann man die Gruppen $Pin(V, Q)$ und $Spin(V, Q)$ als Untergruppen der Clifford-Gruppen $\Gamma(V, Q)$ und $\Gamma^+(V, Q)$ definieren.

Definition 28.4.11 Eine Pin-Gruppe ist die folgende Untergruppe von $\Gamma(V, Q)$ mit $n = \dim(V)$:

$$\begin{aligned} Pin(V, Q) := \{x \in Cl^*(V, Q) \mid \\ \rho_x i(v) = \alpha(x) i(v) (x)^{-1} \in i(V) \quad \text{für } v \in V \quad \text{und } N(x) = \pm 1 \cdot \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)}\} . \end{aligned} \quad (28.4.23)$$

Wenn man in dieser Definition nur die geraden Anteile von $Cl^*(V, Q)$ berücksichtigt, dann spricht man von der Spin-Gruppe. Wiederum ist in $\Gamma^+(V, Q)$ jetzt $\alpha(x) = x$.

$$\begin{aligned} Spin(V, Q) := \{x \in Cl^*(V, Q) \cap Cl^0(V, Q) \mid \\ \rho_x i(v) = xi(v) (x)^{-1} \in i(V) \quad \text{für } v \in V \quad \text{und } N(x) = \pm 1 \cdot \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)}\} . \end{aligned} \quad (28.4.24)$$

Häufig wird auch nur der einfach zusammenhängende Teil von $Spin(V, Q)$ betrachtet:

$$\begin{aligned} Spin_+(V, Q) := \{x \in Cl^*(V, Q) \cap Cl^0(V, Q) \mid \\ \rho_x i(v) = xi(v) (x)^{-1} \in i(V) \quad \text{für } v \in V \quad \text{und } N(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)}\} . \end{aligned} \quad (28.4.25)$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ führt man auf der Grundlage von $Cl^*(p, q)$ für die obigen Gruppen die Bezeichnungen $\Gamma(p, q)$, $Pin(p, q)$, $Spin(p, q)$ und $Spin_+(p, q)$ und schreibt dann auch $Pin(n) := Pin(n, 0)$, etc.

Satz 28.4.12 Seien $F = \mathbb{Z}_2 \approx \{\pm 1\}$ im Fall von $K = \mathbb{R}$, und $F = \mathbb{Z}_4 \approx \{\pm 1, \pm i\}$ im Fall von $K = \mathbb{C}$, und $F_+ = \mathbb{Z}_2 \approx \{\pm 1\}$, dann gelten für $Pin(V, Q)$, $Spin(V, Q)$ und $Spin_+(V, Q)$ die folgenden exakten Sequenzen:

$$1 \longrightarrow F \mathbb{1}_V \xrightarrow{i} Pin(V, Q) \xrightarrow{\rho} O(V, Q) \longrightarrow \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)} , \quad (28.4.26)$$

$$1 \longrightarrow F \mathbb{1}_V \xrightarrow{i} Spin(V, Q) \xrightarrow{\rho} SO(V, Q) \longrightarrow \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)} , \quad (28.4.27)$$

$$1 \longrightarrow F_+ \mathbb{1}_V \xrightarrow{i} Spin_+(V, Q) \xrightarrow{\rho} SO_+(V, Q) \longrightarrow \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)} . \quad (28.4.28)$$

Beweis: Der hintere Teil dieser Sequenzen, d.h. die Surjektivität von ρ , wurde bereits oben gezeigt. Für den vorderen Teil gilt gleichermaßen für $Pin(V, Q)$ wie für $Spin(V, Q)$: sei $x = i(v) \in Spin(V, Q)$ und $x \in \ker(\rho) = K^* \mathbb{1}_{Cl(V, Q)}$, dann ist $\bar{x} = x$ und damit $N(x) := xx = \pm 1 \cdot \mathbb{1}_{\Gamma(V, Q)}$. Wenn $K = \mathbb{R}$, dann ist $v \in F = \{\pm 1\} \mathbb{1}_V$ und im Fall von $K = \mathbb{C}$ folgt $v \in F = \{\pm 1, \pm i\} \mathbb{1}_V$. \square

Hieraus sieht man sofort, daß im Fall $K = \mathbb{R}$ die Gruppe $Pin(n)$ eine zweifache Überlagerung von $O(n)$, die Gruppe $Spin(n)$ eine zweifache Überlagerung von $SO(n)$ und die Gruppe $Spin_+(n)$ eine zweifache Überlagerung von $SO(n)$ ist.

Satz 28.4.14 *Spin₊(n) ist für n ≥ 3 eine universelle Überlagerungsgruppe von SO(n). Da diese Aussage nicht von der konkreten Gestalt der Norm abhängt, gilt sie auch für verallgemeinerte Spären, d.h. für beliebige Spin₊(V, Q) und SO(V, Q).*

Beweis: Wir verweisen hier insb. auf das Kapitel 19 über Überlagerungsräume und das Lemma 19.2.6, in welchem gezeigt wurde, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 2$ ist. Nun ist $Spin_+(n) \approx S^{n-1}$ und diese Sphäre ist einfach zusammenhängend, d.h. $\pi_1(S^{n-1}) = 0$ für $n - 1 \geq 2$, d.h. für $n \geq 3$. Damit ist die Abbildung $\rho : Spin_+(n) \rightarrow SO(n)$ ein Projektor und $Spin_+(n)$ ist die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(n)$. \square

28.5 Spin-Lie-Algebren

Farmelo zitiert in seiner großen Biographie über das Leben von Paul Dirac (Farmelo (2009), S. 430) den folgenden Satz von Michael Atiyah:

„No one fully understands spinors. Their algebra is formally understood but their general significance is mysterious. In some sense they describe the "square root" of geometry and, just as understanding the square root of -1 took centuries, the same might be true of spinors.“

Die Clifford-Algebren bieten einen Rahmen für zahlreiche interessante Unterstrukturen. Die Clifford-, Pin-, Spin- und Spin₊-Gruppen haben wir schon kennengelernt. Aber auch die Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(Q, V)$ zur Gruppe $Spin_+$ ist in der Clifford-Algebra $Cl(Q, V)$ enthalten. Wir folgen Coquereaux (2009), und Jost (2009) S. 50 ff.

Lemma 28.5.1 *Sei V wiederum ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Feld $K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einer quadratischen Form $Q : V \rightarrow K$ und einer Orthonormalbasis $\{e_a \mid 1 \leq a \leq n\}$ von V. Die Unteralgebra $Cl_2(V, Q)$ der 2-fachen Produkte $\gamma_{a_1} \cdot \gamma_{a_2} = i(e_{a_1})i(e_{a_2})$ mit $1 \leq a_1, a_2 \leq n$ ist eine Lie-Algebra mit der Lie-Klammer*

$$[\gamma_{a_1} \gamma_{a_2}, \gamma_{b_1} \gamma_{b_2}] := \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} \gamma_{b_1} \gamma_{b_2} - \gamma_{b_1} \gamma_{b_2} \gamma_{a_1} \gamma_{a_2}. \quad (28.5.1)$$

Diese Lie-Algebra operiert auf den Elementen von $Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V$ mittels

$$\tau(\gamma_{a_1} \gamma_{a_2})i(v) := \gamma_{a_1} \gamma_{a_2} i(v) - i(v) \gamma_{a_1} \gamma_{a_2}. \quad (28.5.2)$$

Und diese Lie-Algebra ist gerade die Lie-Algebra der Gruppe $Spin_+(V, Q)$ und wird daher als $\mathfrak{spin}(V, Q)$ bezeichnet.

Beweis: Seien $u, v \in V$ und $x = i(u), y = i(v) \in i(V)$ und $xy \in Cl_2(V, Q)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \exp(xy) \in Spin_+(V, Q) &\Leftrightarrow \\ \exp(xy) \overline{\exp(xy)} &= \exp(xy) \exp(\overline{xy}) = \exp(xy + yx) \stackrel{!}{=} 1 \cdot \mathbb{1}_{Spin_+(V, Q)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$xy + yx = i(u)i(v) + i(v)i(u) \stackrel{!}{=} 0 \cdot \mathbb{1}_{Cl_2(V,Q)} \Leftrightarrow$$

$$2g(u, v) \mathbb{1}_{\otimes(V)} = 0 .$$

Wenn $xy \in Cl_2(V, Q)$, dann ist $\exp(xy)$ genau dann in $Spin_+(V, Q)$, wenn u und v orthogonal sind. Sei also $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine orthonormale Basis von V , dann sind die Produkte

$$\{\gamma_{a_1}\gamma_{a_2} = i(e_{a_1})i(e_{a_2}) \mid 1 \leq a_1 < a_2 \leq n\} , \quad \gamma_{a_1}\gamma_{a_2} = \frac{1}{2}[\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}]$$

eine Basis von $Cl_2(V, Q) = \mathfrak{spin}(V, Q)$, die wegen der Antisymmetrie der $\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}$ die Dimension $\frac{1}{2}(n(n-1))$ hat.

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ tatsächlich eine Abbildung nach $Cl_2(V, Q) = \mathfrak{spin}(V, Q)$ darstellt, d.h.:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{spin}(V, Q) \times \mathfrak{spin}(V, Q) \rightarrow \mathfrak{spin}(V, Q) .$$

Mittels 28.2.17 folgt:

$$\begin{aligned} [\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}, \gamma_{b_1}\gamma_{b_2}] &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} - \gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_1}\gamma_{a_2} \\ &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} + \gamma_{b_1}\gamma_{a_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} - 2g_{b_2a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2} \\ &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} - \gamma_{a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} \\ &\quad + 2g_{b_1a_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} - 2g_{b_2a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2} \\ &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} + \gamma_{a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_2} \\ &\quad - 2g_{b_2a_2}\gamma_{a_1}\gamma_{b_1} + 2g_{b_1a_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} - 2g_{b_2a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2} \\ &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} - \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_{b_1}\gamma_{b_2} \\ &\quad + 2g_{b_1a_2}\gamma_{a_1}\gamma_{b_2} - 2g_{b_2a_2}\gamma_{a_1}\gamma_{b_1} + 2g_{b_1a_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} - 2g_{b_2a_1}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2} \\ &= +2g_{a_1b_1}\gamma_{b_2}\gamma_{a_2} - 2g_{a_1b_2}\gamma_{b_1}\gamma_{a_2} + 2g_{a_2b_1}\gamma_{a_1}\gamma_{b_2} - 2g_{a_2b_2}\gamma_{a_1}\gamma_{b_1} \\ &\in \mathfrak{spin}(V, Q) . \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Wirkung von $\tau(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2})$ auf ein Element $x = x^b\gamma_b \in Cl_1(V, Q)$ mit $x^a \in K$:

$$\begin{aligned} \tau(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2})x &= \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}x^b\gamma_b - x^b\gamma_b\gamma_{a_1}\gamma_{a_2} = \\ &= x^b(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_b + \gamma_{a_1}\gamma_b\gamma_{a_2} - 2g_{b,a_1}\gamma_{a_2}) \\ &= x^b(\gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_b - \gamma_{a_1}\gamma_{a_2}\gamma_b + 2g_{b,a_2}\gamma_{a_1} - 2g_{b,a_1}\gamma_{a_2}) \\ &= 2x^b g_{b,a_2}\gamma_{a_1} - 2x^b g_{b,a_1}\gamma_{a_2} \in Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V . \quad \square \end{aligned}$$

28.6 Darstellungen von Clifford-Algebren

In physikalischen Theorien interessieren nun insbesondere die Darstellungen von Algebren und Gruppen.

Definition 28.6.1 Sei $Cl(V, Q)$ eine Clifford-Algebra über einem endlich-dimensionalen Vektorraum V mit einem Körper $K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und mit einer quadratischen Form $Q : V \rightarrow K$. Sei S ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $Hom^K(S, S)$ die Algebra der linearen Transformationen von S . Dann heißt die folgende Abbildung ρ eine K -Darstellung von $Cl(V, Q)$:

$$\rho : Cl(V, Q) \rightarrow Hom^K(S, S)$$

und der lineare Raum S wird ein $Cl(V, Q)$ -Modul genannt.

Ein wichtiger Begriff der Darstellungstheorie ist die *Irreduzibilität* von Darstellungen.

Definition 28.6.2 Eine Darstellung ρ einer Clifford-Algebra $Cl(V, Q)$ in eine Gruppe von Homomorphismen auf einem Vektorraum S über einem Körper $K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt *reduzibel*, wenn S auf nichttriviale Weise in der Form $S = S_1 \oplus S_2$ geschrieben werden kann.

Die Darstellung ρ heißt *irreduzibel*, wenn sie nicht reduzibel ist.

In der Gruppentheorie spricht man Reduzibilität, wenn es mindestens einen nichttrivialen, invarianten Unterraum in S gibt. Bei endlichen Gruppen sind diese beiden Definitionen offensichtlich identisch, denn sei $S = S_1 \oplus S_2$, dann kann man die Abbildung ρ zerlegen zu $\rho := \rho|_{S_1} + \rho|_{S_2}$ und die Matrix $M \in Hom^K(S, S)$ hat dann bzgl. S_1 und S_2 Blockdiagonalgestalt, womit S_1 und S_2 invariante Unterräume unter allen Matrizen $M \in Hom^K(S, S)$ sind.

So ist z.B. die obige Darstellung 28.3.18

$$Cl^{\mathbb{C}}(2n) \approx M_{2^n}(\mathbb{C}) \in Hom^{\mathbb{C}}(S_{2^n}, S_{2^n}) \quad (28.6.1)$$

irreduzibel, weil $Cl^{\mathbb{C}}(2n)$ und S_{2^n} als Vektorräume die Dimension 2^n haben und die Generatoren $\gamma_i \in Cl(V, Q)$ injektiv auf die Basis von S_{2^n} abgebildet werden. Eine solche Darstellung heißt auch *einfach*.

Dagegen ist die obige Darstellung 28.3.19

$$Cl^{\mathbb{C}}(2n + 1) \approx M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) \quad (28.6.2)$$

eine reduzible Darstellung.

Jede K -Darstellung einer Clifford-Algebra $Cl(V, Q)$ kann in eine endliche Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden, d.h.

$$Cl(V, Q) \approx M_1 \oplus \dots \oplus M_r,$$

denn sollte ein M_i in dieser Zerlegung reduzibel sein, so kann man es weiter zerlegen, bis man bei irreduziblen Bestandteilen angekommen ist. Da wir hier nur endlich-dimensionale Darstellungen betrachten, kommt dieser Prozeß nach endlich vielen Schritten an sein Ende.

Für die Physiker ist nun besonders die Lorentz-Transformation $O(3,1)_+^\uparrow = SO(3,1)_+$ von Bedeutung. Wir wissen aus dem Vorangegangenen, daß $Spin_+(3,1) = SL(2, \mathbb{C})$ ihre einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe ist und daß die zu $SO(3,1)_+$ und $Spin(3,1)$ gehörende Lie-Algebra gerade $\mathfrak{spin}(3,1)$ ist. Siehe auch 26.7. Die Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(3,1)$ besteht aus den 6 antisymmetrischen Produkten $\{\gamma_{a_1}\gamma_{a_2} \mid 1 \leq a_1 < a_2 \leq 4\}$. Üblicherweise betrachtet man die komplexifizierte Lie-Algebra $\mathfrak{spin}_+^{\mathbb{C}}(3,1)$ und deren Darstellungen in $M_4(\mathbb{C})$, im \mathbb{C} -Vektorraum der vierdimensionalen Matrizen.

In der üblichen 4-dim. Raumzeit kommen bei der von uns gewählten 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-, +, +, +)$ Darstellungen von $Cl(3,1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx Cl^{\mathbb{C}}(4)$ zur Anwendung, wobei die Physiker das Basiselement $\gamma_4 = i(e_4)$ zu γ_0 umbenennen. Aus 28.3.18 folgt:

$$Cl^{\mathbb{C}}(4) \approx M_4(\mathbb{C}) \quad (28.6.3)$$

Die bekanntesten Darstellungen von $Cl(3,1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sind verschiedene Darstellungen der Diracschen γ -Matrizen. Zur Unterscheidung der Basiselemente der Clifford-Algebra γ_a von den Gamma-Matrizen $\boldsymbol{\gamma}_a$ der Darstellung schreiben wir letztere im Fettdruck. Hier unsere Version der Weyl-Darstellung:

$$\boldsymbol{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ mit } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (28.6.4)$$

Hierbei sind $\mathbf{0}$ und $\mathbb{1}$ jeweils 2-dim. Matrizen. Damit folgt in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-, +, +, +)$ sofort

$$\{\boldsymbol{\gamma}^a, \boldsymbol{\gamma}^b\} := \boldsymbol{\gamma}^a \boldsymbol{\gamma}^b + \boldsymbol{\gamma}^b \boldsymbol{\gamma}^a = -2\eta^{ab} \mathbb{1}, \quad (28.6.5)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_* := \boldsymbol{\gamma}^5 := \boldsymbol{\gamma}_5 := (-\mathbf{i})^3 \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 \boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (28.6.6)$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß die Dirac-Gleichung und spinorielle Bilinearformen ihre bekannten Standard-Formen behalten, ein Nachteil ist das negative Vorzeichen in $\{\boldsymbol{\gamma}^a, \boldsymbol{\gamma}^b\}$.

Freedman u. Van Proeyen (2012) verwenden die folgende Weyl-Darstellung $Cl(3,1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$\boldsymbol{\gamma}_F^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}_F^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \text{ mit } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (28.6.7)$$

Wiederum folgt in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-, +, +, +)$ sofort

$$\{\boldsymbol{\gamma}_F^a, \boldsymbol{\gamma}_F^b\} := \boldsymbol{\gamma}_F^a \boldsymbol{\gamma}_F^b + \boldsymbol{\gamma}_F^b \boldsymbol{\gamma}_F^a = 2\eta^{ab} \mathbb{1} , \quad (28.6.8)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{F^*} := \boldsymbol{\gamma}_F^5 := \boldsymbol{\gamma}_{F5} := (-\mathbf{i})^3 \boldsymbol{\gamma}_{F0} \boldsymbol{\gamma}_{F1} \boldsymbol{\gamma}_{F2} \boldsymbol{\gamma}_{F3} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \quad (28.6.9)$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist das positive Vorzeichen in $\{\boldsymbol{\gamma}^a, \boldsymbol{\gamma}^b\}$, ein Nachteil ist das Auftauchen eines zusätzlichen Faktors \mathbf{i} in der Dirac-Gleichung und spinoriellen Bilinearformen.

In der Physik wird häufig der sog. Spintensor Σ_{ab} betrachtet, z.B. in der Dirac-Gleichung in gekrümmten Raumzeiten (29.7.4):

$$\Sigma_{ab} := -\frac{1}{4} [\boldsymbol{\gamma}_a, \boldsymbol{\gamma}_b] , \quad (28.6.10)$$

Dieser Tensor erfüllt die Kommutator-Relationen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$, siehe 26.7.10:

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = g_{bc} \Sigma_{ad} - g_{ac} \Sigma_{bd} - g_{bd} \Sigma_{ac} + g_{ad} \Sigma_{bc} . \quad (28.6.11)$$

Dies werden wir sogleich zeigen. Σ_{ab} stellt also eine Darstellung von $\mathfrak{so}(3, 1)$ im Raum $S_{2^2} = S_4$ der 4-dimensionalen Diracschen Bispinoren dar, die sich nach 26.7.13 unter einer Darstellung einer Lorentztransformation folgendermaßen transformieren:

$$\psi' = \exp\left(\frac{1}{2} \lambda^{ab} \Sigma_{ab}\right) \psi \quad \text{mit} \quad \psi', \psi \in S_4 .$$

Die Verallgemeinerung des Spintensors Σ_{ab} auf höhere Dimensionen, d.h. auf den Fall von $\mathfrak{spin}(n-1, 1) \approx \mathfrak{so}(n-1, 1)$ mittels der Generatoren $\boldsymbol{\gamma}_a$ geschieht analog.

Jetzt soll die obige Kommutator-Relation $[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}]$ bewiesen werden.

Beweis: Wir wählen wieder $\{\boldsymbol{\gamma}^a, \boldsymbol{\gamma}^b\} = -2\eta^{ab} \mathbb{1}$ in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-, +, +, +)$. Durch mehrfaches Anwenden dieser Antikommutator-Relation (Vertauschungen der $\boldsymbol{\gamma}$ -Generatoren in der 3. Zeile in die Reihenfolge der 2. Zeile) erhält man:

$$\begin{aligned} [\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] &= \frac{1}{16} \{(\boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b - \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a)(\boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c) - (\boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c)(\boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b - \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a)\} \\ &= \frac{1}{16} \{(\boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d - \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c - \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d + \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c) \\ &\quad - (\boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b - \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a - \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_b + \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_b \boldsymbol{\gamma}_a)\} \\ &= \frac{1}{8} \{(\underbrace{g_{da} \boldsymbol{\gamma}_c \boldsymbol{\gamma}_b}_{4a} - \underbrace{g_{ca} \boldsymbol{\gamma}_d \boldsymbol{\gamma}_b}_{2a} + \underbrace{g_{bd} \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_c}_{3a} - \underbrace{g_{cb} \boldsymbol{\gamma}_a \boldsymbol{\gamma}_d}_{1a})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\underbrace{g_{ba}\gamma_c\gamma_d}_{5a} - \underbrace{g_{da}\gamma_c\gamma_b}_{4b} + \underbrace{g_{ca}\gamma_d\gamma_b}_{2b} - \underbrace{g_{db}\gamma_a\gamma_c}_{3b} + \underbrace{g_{cb}\gamma_a\gamma_d}_{1b} \right) \\
 & - \left(\underbrace{g_{ab}\gamma_d\gamma_c}_{5b} - \underbrace{g_{cb}\gamma_d\gamma_a}_{1c} + \underbrace{g_{db}\gamma_c\gamma_a}_{3c} - \underbrace{g_{ca}\gamma_b\gamma_d}_{2c} + \underbrace{g_{da}\gamma_b\gamma_c}_{4c} \right) \\
 & + \left(\underbrace{g_{cb}\gamma_d\gamma_a}_{1d} - \underbrace{g_{db}\gamma_c\gamma_a}_{3d} + \underbrace{g_{ca}\gamma_b\gamma_d}_{2d} - \underbrace{g_{da}\gamma_b\gamma_c}_{4d} \right) \} \\
 & = -\frac{1}{4} \{ g_{cb}[\gamma_a, \gamma_d] - g_{ca}[\gamma_b, \gamma_d] - g_{bd}[\gamma_a, \gamma_c] + g_{da}[\gamma_b, \gamma_c] \} \\
 & = g_{bc}\Sigma_{ad} - g_{ac}\Sigma_{bd} - g_{bd}\Sigma_{ac} + g_{ad}\Sigma_{bc} . \quad \square
 \end{aligned}$$

Für Physiker, die auf dem Gebiet der *Supergravity* arbeiten stellt sich die Frage, wie man die obigen Darstellungen der Clifford-Algebra $Cl(3, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx Cl^{\mathbb{C}}(4)$ auf höhere Dimensionen verallgemeinern kann. Wir folgen Freedman u. Van Proeyen (2012), S. 39 ff., de Trautenberg (2005), Jost (2009), S. 50 ff., und Friedrich (1997), S. 13 ff.

Wir beginnen zunächst mit einer Darstellung euklidischer Clifford-Algebren beliebiger, endlicher Dimensionen $2n$ und $2n + 1$. Diese beiden Fälle sind getrennt zu behandeln, wie wir bereits oben gesehen haben. Die erste und einfachste Konstruktion, die wir hier vorstellen wollen ist eine einfache Produktdarstellung.

Während man sich in der Physik vornehmlich für Clifford-Algebren mit Minkowski-Metrik interessiert, spielen euklidische Clifford-Algebren und der euklidische Dirac-Operator beim Atiyah-Singer-Indextheorem eine große Rolle.

Definition 28.6.4 *Eine verallgemeinerte euklidische Dirac-Weyl-Darstellung einer reellen Clifford-Algebra kann folgendermaßen konstruiert werden:*

1. Sei V ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ und der zugehörigen reellen Clifford-Algebra $Cl(V_{2n}, Q_{2n}) = Cl(2n, 0)$ mit der euklidischen Metrik $\text{diag}(+, \dots, +)$ und den Generatoren $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}\}$. Dann kann man den folgenden Endomorphismus ρ konstruieren, von dem wir anschließend zeigen werden, daß es sich um eine Matrix-Darstellung von $Cl(2n, 0)$ handelt:

$$\rho : Cl(2n, 0) \rightarrow M_{2^n}(\mathbb{C}) \quad \text{mit } \gamma^a \mapsto \boldsymbol{\gamma}^a .$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\gamma}^1 & := \sigma_1 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(n-1) \text{ fach}} , & \boldsymbol{\gamma}^2 & := \sigma_2 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(n-1) \text{ fach}} , \\
 \boldsymbol{\gamma}^3 & := \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(n-2) \text{ fach}} , & \boldsymbol{\gamma}^4 & := \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{\mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}}_{(n-2) \text{ fach}} , \\
 \dots & := \dots
 \end{aligned}$$

$$\gamma^{2n-1} := \underbrace{\sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}_{(n-1) \text{ fach}} \otimes \sigma_1, \quad \gamma^{2n} := \underbrace{\sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}_{(n-1) \text{ fach}} \otimes \sigma_2. \quad (28.6.12)$$

2. Sei V ein $2n+1$ -dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\{e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\}$ und der zugehörigen reellen Clifford-Algebra $Cl(V_{2n+1}, Q_{2n+1}) = Cl(2n+1, 0)$ mit der euklidischen Metrik $\text{diag}(+, \dots, +)$ und den Generatoren $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}, \gamma_{2n+1}\}$. Dann kann man die folgenden Matrizen aus $M_{2n}(\mathbb{C})$ konstruieren, von denen wir anschließend zeigen werden, daß es sich um eine Matrix-Darstellung von $Cl(2n+1, 0)$ handelt:

$$\begin{aligned} \gamma^1 \dots \gamma^{2n} & \quad \text{wie oben,} \\ \gamma^{2n+1} & := \underbrace{\sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3}_{(n-1) \text{ fach}} \otimes \sigma_3. \end{aligned} \quad (28.6.13)$$

3. Der 2^n -dimensionale komplexe lineare Raum S , auf dem die oben definierten Darstellungen operieren, heißt Raum der komplexen Dirac-Spinoren:

$$S := (\mathbb{C}^2)^n := \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_n. \quad (28.6.14)$$

4. Der Chiralitäts-Operator Γ wird für die beiden Fälle der Vektorraum-Dimensionen $2n$ und $2n+1$ folgendermaßen definiert als:

$$\Gamma_{2n} := \gamma_* := (\mathbf{i})^n \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n}, \quad (28.6.15)$$

$$\Gamma_{2n+1} := \gamma_* := (\mathbf{i})^n \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n+1}. \quad (28.6.16)$$

Zunächst einmal bilden diese $\{\gamma^a\}$ eine Darstellung der Generatoren von $Cl(V_{2n}, Q_{2n})$, bzw. $Cl(V_{2n+1}, Q_{2n+1})$, denn

$$\{\gamma^a, \gamma^a\} = 2\gamma^a \gamma^a = 2\mathbb{1}_{2n}, \quad 1 \leq a \leq 2n+1,$$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = \mathbf{0}_{2n}, \quad \text{da } \{\sigma_a, \sigma_b\} = \mathbf{0}_2, \quad \text{für } 1 \leq a \neq b \leq 2n+1.$$

Jetzt kann man die beiden Chiralitäts-Operatoren Γ_{2n} und Γ_{2n+1} genauer untersuchen und erhält:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2n} &= (\mathbf{i})^n \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_1 \sigma_2}_n = \\ &= (\mathbf{i})^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_n = (-1)^n \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_n. \end{aligned} \quad (28.6.17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2n+1} &= (\mathbf{i})^n \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}_{n \text{ fach}} = \\ &= (\mathbf{i})^n (\mathbf{i})^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \mathbb{1}_{2^n} . \end{aligned} \quad (28.6.18)$$

Also gilt in beiden Fällen

$$(\Gamma)^2 = \mathbb{1}_{2^n} . \quad (28.6.19)$$

Von Bedeutung ist nun, daß Γ_{2n} nicht mit allen Produkten der Darstellungs-Basis $\{\gamma^1, \dots, \gamma^{2n}, \gamma^1 \gamma^2, \dots, \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^{2n}$ kommutiert, sondern nur mit den geradzahligem Produkten, denn diese enthalten einen Faktor

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{i} \sigma_3 .$$

Damit gibt es kein Produkt von γ^a -Matrizen, das mit der kompletten Darstellungs-Basis kommutiert, und also gibt es auch keine invarianten Ideale, d.h. keine invarianten Unterräume. Die Darstellung $\rho : Cl(2n, 0) \rightarrow M_{2^n}(\mathbb{C})$ ist also irreduzibel und da sie auch injektiv ist, ist sie wegen der gleichen Dimension auch *treu*, d.h. ein Isomorphismus.

Anders sehen die Verhältnisse bei $\rho : Cl(2n + 1, 0) \rightarrow M_{2^n}(\mathbb{C})$ aus. Hier liegt Γ_{2n+1} im Zentrum der Darstellung von $Cl(V_{2n+1}, Q_{2n+1})$, denn Γ_{2n+1} kommutiert ja als Vielfaches von $\mathbb{1}_{2^n}$ mit allen Elementen der Darstellungs-Basis. Da Γ_{2n+1} eine Involution darstellt können in dieser Matrix also nur die beiden Eigenwerte $\{\pm 1\}$ auftreten. Damit läßt sich die Darstellung in zwei Ideale zerlegen. Als Projektoren auf die beiden Unterräume wählt man:

$$P_{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbb{1}_{2^n} \pm \Gamma_{2n+1}) . \quad (28.6.20)$$

Mit Γ_{2n+1} kommutieren also auch P_{\pm} mit allen γ^a und damit folgt

$$\gamma^a P_{\pm} M_{2^n}(\mathbb{C}) = P_{\pm} \gamma^a M_{2^n}(\mathbb{C}) = P_{\pm} M_{2^n}(\mathbb{C}) . \quad (28.6.21)$$

Also stellen $P_+ M_{2^n}(\mathbb{C})$ und $P_- M_{2^n}(\mathbb{C})$ zwei Ideale dar mit $M_{2^n}(\mathbb{C}) = P_+ M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus P_- M_{2^n}(\mathbb{C})$.

Damit haben wir 28.3.19 erneut bestätigt:

$$Cl^{\mathbb{C}}(2n + 1) \approx M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) . \quad (28.6.22)$$

Definition 28.6.5 Darstellungen der komplexifizierten Clifford-Algebren mit Minkowski-Metrik, also $Cl(2n - 1, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx Cl^{\mathbb{C}}(2n)$ und $Cl(2n, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx Cl^{\mathbb{C}}(2n + 1)$, kann man dadurch erhalten, daß man γ^{2n} , bzw. γ^{2n+1} , mit dem Faktor \mathbf{i} multipliziert. Dadurch ändert sich aber auch die Definition des Chiralitäts-Operators

$$\Gamma_{2n} := \gamma_* := (\mathbf{i})^{n+1} \gamma_1 \dots \gamma_{2n} , \quad (28.6.23)$$

$$\Gamma_{2n+1} := \gamma_* := (\mathbf{i})^{n+1} \gamma_1 \dots \gamma_{2n+1} . \quad (28.6.24)$$

Die möglichen Darstellungen $Cl^{C0}(2n) \rightarrow Hom^K(S, S)$ sind reduzibel, da $Cl^{C0}(2n)$ ja nur geradzahlige Produkte von Generatoren von $Cl^C(V_{2n}, Q_{2n})$ enthält und Γ_{2n} also mit allen Basiselementen von $Cl^{C0}(2n)$ kommutiert. Da Γ_{2n} eine Involution darstellt können in dieser Matrix also nur die beiden Eigenwerte $\{\pm 1\}$ auftreten. Wie bereits oben in Fall von $Cl(2n+1)$ läßt sich also die Darstellung in zwei Ideale zerlegen. Als Projektoren auf die beiden Unterräume wählt man:

$$P_{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbb{1}_{2n} \pm \Gamma_{2n}) . \quad (28.6.25)$$

Also stellen $P_+M_{2n}(\mathbb{C})$ und $P_-M_{2n}(\mathbb{C})$ zwei Ideale dar mit $M_{2n}(\mathbb{C}) = P_+M_{2n}(\mathbb{C}) \oplus P_-M_{2n}(\mathbb{C})$.

Damit sind auch die beiden Spin-Gruppen $Spin^C(2n) \rightarrow Hom^K(S, S)$ und $Spin_+^C(2n) \rightarrow Hom^K(S, S)$ reduzibel, denn sie sind ja Teilmengen von $Cl^{C0}(2n)$ sind. Also gilt auch für Darstellungen dieser Spin-Gruppen eine Zerlegung

$$M_{2n}(\mathbb{C}) = P_+M_{2n}(\mathbb{C}) \oplus P_-M_{2n}(\mathbb{C}) . \quad (28.6.26)$$

Man spricht hier von der Weyl-Darstellung der Spin-Gruppen und die beiden Teilräume von $S = S_{2n} = S_+ \oplus S_-$ heißen die Teilräume der rechtshändigen (S_+) und der linkshändigen (S_-) Spinoren.

Wir hatten bereits bei der Definition der Clifford-Algebren gesehen, daß der Vektorraum V mittels der Abbildung i in $Cl(V, Q)$ eingebettet werden kann (28.2.18):

$$Cl_1(V, Q) = i(V) \approx V .$$

Damit können die Bilder von Vektoren aus V in $Cl_1(V, Q)$ mit allen anderen Elementen von $Cl(V, Q)$ mittels der Clifford-Multiplikation verknüpft werden. Seien also V ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum und $S = S_{2n}$ das entsprechende Clifford-Modul, d.h. der Raum der Dirac-Spinoren. Dann können wir in Bezug auf die Darstellung ρ aus $v \in V$ einen Homomorphismus $Hom^K(S, S)$ konstruieren:

$$\rho \circ i : V \rightarrow Hom^K(S, S) , \quad v = v^a e_a \mapsto v^a i(e_a) = v^a \gamma_a \mapsto v^a \gamma_a . \quad (28.6.27)$$

Seien $v = v^a e_a \in V_{2n}$, $\gamma_a \in M_{2n}(\mathbb{C})$, $s \in S$, dann wird die Abbildung μ

$$\mu(V, S) := \rho(i(V)) \times S : \rightarrow S \quad \text{mit} \quad v \cdot s := v^a \gamma_a \cdot s \quad (28.6.28)$$

häufig auch als Clifford-Multiplikation von Vektoren mit Spinoren bezeichnet. Diese Clifford-Multiplikation überführt rechtshändige (S_+) in linkshändige (S_-) Spinoren und umgekehrt, denn sei etwa $e_a \in V_{2n}$ und $\gamma_a \in M_{2n}(\mathbb{C})$, dann folgt

$$\begin{aligned} \gamma_a P_+ &= \frac{1}{2} \gamma_a (\mathbb{1}_{2n} + \Gamma_{2n}) = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{2n} - \Gamma_{2n}) \gamma_a \\ &= P_- \gamma_a . \end{aligned} \quad (28.6.29)$$

Wegen der Linearität gilt dies natürlich auch für einen beliebigen Vektor $v = v^a e_a \in V_{2n}$ und $v^a \gamma_a \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

Diese Abbildung kann man nun folgendermaßen von V auf die äußere Algebra (Grassmann-Algebra) der Differentialformen von $\Lambda^{2n}(V_{2n})$ ausdehnen. Sei $\omega \in \Lambda^r(V)$ mit $r \leq 2n$ eine r -Differentialform über V (11.1.9), also

$$\omega := \frac{1}{r!} \omega^{a_1, \dots, a_r} e_{a_1} \wedge e_{a_2} \wedge \dots \wedge e_{a_r},$$

und sei $\{\bar{e}_{a_1}, \dots, \bar{e}_{a_{2n}}\}$ eine Basis von $S = \mathbb{C}^{2^n}$, dann kann man die Ausdehnung von μ definieren als:

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda^r(V), S) &\rightarrow \Lambda^r(V) \otimes S \quad \text{mit} \\ \omega \cdot s &:= \frac{1}{r!} \omega^{a_1, \dots, a_r} \gamma_{a_1} \cdot \gamma_{a_2} \cdot \dots \cdot \gamma_{a_r} \cdot (\bar{e}_{a_1} \wedge \bar{e}_{a_2} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{a_r} s). \end{aligned} \quad (28.6.30)$$

Kurz gesagt, man ersetzt die \mathbb{C} -Komponenten von S durch Grassmann-Zahlen. Der Hintergrund für dieses Vorgehen ist letztlich die Isomorphie $Cl^{\mathbb{C}}(V_{2n}, Q_{2n}) \approx \Lambda^{2n}(V_{2n})$ als Vektorräume. Diese Konstruktion kann man auf die folgende Weise konkretisieren, die bei Physikern großen Anklang findet. Wir folgen Jost (2009), S. 54 und de Traubenberg (2005), S. 11, aber wiederum in unseren Bezeichnungen.

Lemma 28.6.6 *Seien V_{2n} ein $2n$ -dimensionaler komplexer Vektorraum, $\Lambda^{2n}(V_{2n})$ die entsprechende äußere Algebra (Grassmann-Algebra), $Cl^{\mathbb{C}}(V_{2n}, Q_{2n})$ eine komplexe Clifford-Algebra mit den Generatoren $\{\gamma_a \mid 1 \leq a \leq 2n\}$, $\{\gamma_a \mid 1 \leq a \leq 2n\}$ eine Darstellung der Clifford-Generatoren in $M_{2n}(\mathbb{C})$ und $S = \mathbb{C}^{2^n}$ das entsprechende Clifford-Modul, d.h. der Vektorraum der komplexen Dirac-Spinoren. Dann kann man aus den Generatoren γ_{a_i} der Clifford-Algebra Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren eines n -Fermionen-Systems konstruieren. Diese werden in der nichtrelativistischen Quantentheorie von Spin- $\frac{1}{2}$ Systemen als Stufenoperatoren bezeichnet.*

$$\hat{c}_{a_i} := \frac{1}{2}(\gamma_{2a_i-1} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i}), \quad \hat{c}_{a_i}^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma_{2a_i-1} + \mathbf{i}\gamma_{2a_i}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (28.6.31)$$

Für diese Operatoren gilt

$$\{\hat{c}_{a_i}, \hat{c}_{a_j}\} = 0, \quad \{\hat{c}_{a_i}^\dagger, \hat{c}_{a_j}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{c}_{a_i}, \hat{c}_{a_j}^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (28.6.32)$$

Hiermit definiert man den Fermion-Teilchenzahl-Operator \hat{F} , für welchen gilt

$$\hat{F} := \sum_{i=1}^n \hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}, \quad (28.6.33)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2n} &:= \gamma_* := \gamma^{2n+1} := (\mathbf{i})^n \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n} \\ &= e^{\mathbf{i}\pi \hat{F}} = (-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{i=1}^n \hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}}. \end{aligned} \quad (28.6.34)$$

Zu einer Darstellung der Algebra der Vertauschungsrelationen der \hat{c}_{a_i} und $\hat{c}_{a_j}^\dagger$ im Raume der Grassmann-Algebra $\Lambda^{2n}(V_{2n})$ kann man nun folgendermaßen gelangen. Sei $\{z^i, \bar{z}^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Basis von V_{2n} und $z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r} \in \Lambda^{2n}$, dann kann man die folgenden Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren in Λ^{2n} definieren, die wir im reellen Fall im Zusammenhang mit der Riemannsche Geometrie als Äußeres Produkt (11.1.8) und als Inneres Produkt (11.1.16) bereits eingeführt hatten:

$$\epsilon(z^k) z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r} := z^k \wedge z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r}, \quad (28.6.35)$$

$$\iota(z^k) z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r} := \begin{cases} 0 & \text{für } k \notin \{i_1, \dots, i_r\}, \\ (-1)^{i_q-1} z^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{z^{i_q}} \wedge \dots \wedge z^{i_r} & \text{für } k = i_q \text{ fehlt } \widehat{z^{i_q}}. \end{cases} \quad (28.6.36)$$

Für diese Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren ϵ und ι gelten die folgenden Antikommutator-Relationen:

$$\{\epsilon(z^i), \epsilon(z^j)\} = 0, \quad \{\iota(z^i), \iota(z^j)\} = 0, \quad \{\epsilon(z^i), \iota(z^j)\} = \delta^{ij}. \quad (28.6.37)$$

Die gewünschte Darstellung liefert also die folgende Abbildung:

$$Cl^{\mathbb{C}}(V_{2n}, Q_{2n}) \rightarrow \Lambda^{2n}(V_{2n}) : \begin{cases} \hat{c}_{a_i}^\dagger \mapsto \epsilon(z^i), \\ \hat{c}_{a_j} \mapsto \iota(z^j). \end{cases} \quad (28.6.38)$$

Die Matrizen $\gamma_a, \hat{c}_a^\dagger, \hat{c}_a$ sind komplexe $2^n \times 2^n$ Matrizen, die auf den Spinorraum $S = \mathbb{C}^{2^n}$ wirken. Entsprechend wirkt die durch ϵ und ι vermittelte komplexe Darstellung auf $\Lambda^*(V) \otimes S$.

Beweis: Hier nutzt man aus, daß $2a_i - 1$ ungerade und $2a_i$ gerade ist, woraus $\delta_{2a_i-1, 2a_j} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{a_i}, \hat{c}_{a_j}\} &= \frac{1}{4} \{(\gamma_{2a_i-1} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i}), (\gamma_{2a_j-1} - \mathbf{i}\gamma_{2a_j})\} \\ &= \frac{1}{4} \{\gamma_{2a_i-1}, \gamma_{2a_j-1}\} - \frac{\mathbf{i}}{4} \{\gamma_{2a_i-1}, \gamma_{2a_j}\} \\ &\quad - \frac{\mathbf{i}}{4} \{\gamma_{2a_i}, \gamma_{2a_j-1}\} - \frac{1}{4} \{\gamma_{2a_i}, \gamma_{2a_j}\} \\ &= \left(\frac{1}{4} 2\delta_{ij} + \frac{\mathbf{i}}{4} \delta_{2a_i-1, 2a_j} + \frac{\mathbf{i}}{4} \delta_{2a_i, 2a_j-1} - \frac{1}{4} 2\delta_{ij}\right) \mathbb{1}_{2^n} = 0, \\ \{\hat{c}_{a_i}^\dagger, \hat{c}_{a_j}^\dagger\} &= \frac{1}{4} \{(\gamma_{2a_i-1} + \mathbf{i}\gamma_{2a_i}), (\gamma_{2a_j-1} + \mathbf{i}\gamma_{2a_j})\} \\ &= \left(\frac{1}{4} 2\delta_{ij} + \frac{\mathbf{i}}{4} \delta_{2a_i-1, 2a_j} + \frac{\mathbf{i}}{4} \delta_{2a_i, 2a_j-1} - \frac{1}{4} 2\delta_{ij}\right) \mathbb{1}_{2^n} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{a_i}, \hat{c}_{a_j}^\dagger\} &= \frac{1}{4} \{(\gamma_{2a_i-1} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i}), (\gamma_{2a_j-1} + \mathbf{i}\gamma_{2a_j})\} \\ &= \left(\frac{1}{4}2\delta_{ij} + \frac{\mathbf{i}}{4}\delta_{2a_i-1, 2a_j} - \frac{\mathbf{i}}{4}\delta_{2a_i, 2a_j-1} + \frac{1}{4}2\delta_{ij}\right) \mathbb{1}_{2^n} = \delta_{ij} \mathbb{1}_{2^n}. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll der Fermion-Teilchenzahl-Operator \hat{F} genauer untersucht werden.

$$\begin{aligned} \hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i} &= \frac{1}{4} (\gamma_{2a_i-1} + \mathbf{i}\gamma_{2a_i})(\gamma_{2a_i-1} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i}) = \frac{1}{4} (\mathbb{1}_{2^n} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i-1}\gamma_{2a_i} + \mathbf{i}\gamma_{2a_i}\gamma_{2a_i-1} + \mathbb{1}_{2^n}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{2^n} - \mathbf{i}\gamma_{2a_i-1}\gamma_{2a_i}). \end{aligned}$$

Die Operatoren $\hat{c}_{a_i}^\dagger$ und \hat{c}_{a_i} für festes a_i sind in $M_{2^n}(\mathbb{C})$ diagonal, mit Ausnahme der 2×2 Matrix mit den Zeilen- und Spaltenindizes $2a_i - 1$ und $2a_i$. Wir nennen diesen Matrix-Unterraum M_{a_i} . In dem entsprechenden 2-dimensionalen Vektorunterraum von S , den wir als S_{a_i} bezeichnen, kann man jetzt aus den Eigenvektoren von σ_3 zu den Eigenwerten $\{-1, +1\}$ eine Basis konstruieren:

$$|s_+\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 |s_\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |s_\pm\rangle = (\pm 1) |s_\pm\rangle.$$

Für die Einschränkungen von \hat{c}_{a_i} und $\hat{c}_{a_i}^\dagger$ auf diesen Unterraum M_{a_i} gilt nun:

$$\hat{c}_{a_i} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \mathbf{i}\sigma_2) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{c}_{a_i} |s_+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |s_-\rangle,$$

$$\hat{c}_{a_i} |s_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\hat{c}_{a_i}^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \mathbf{i}\sigma_2) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{c}_{a_i}^\dagger |s_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |s_+\rangle,$$

$$\hat{c}_{a_i}^\dagger |s_+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Daher kann man die folgende Relation ausnutzen:

$$\begin{aligned} (-1)^{\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}} |s_-\rangle &= (-1)^0 = 1 = (1 - 2\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}) |s_-\rangle, \\ (-1)^{\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}} |s_+\rangle &= (-1)^1 = -1 = (1 - 2\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}) |s_+\rangle, \end{aligned}$$

$$(-1)^{\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}} = (1 - 2\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}) = (\mathbf{i})\gamma_{2a_i-1}\gamma_{2a_i},$$

$$(-1)^{\hat{F}} = (-1)^{\sum_{i=1}^n \hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}} = \prod_{\nu=1}^n (-1)^{\hat{c}_{a_i}^\dagger \hat{c}_{a_i}} = (\mathbf{i})^n \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{2n}.$$

Nun zu den Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren ϵ und ι in der Graßmann-Algebra $\Lambda^{2n}(V_{2n})$.

$$\{\epsilon(z^j), \epsilon(z^k)\}(z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r}) = (z^j \wedge z^k + z^k \wedge z^j)(z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_r}) = 0.$$

Jetzt seien o.B.d.A. $j < k$ und $z := (z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_p} \wedge \dots \wedge z^{i_q} \wedge \dots \wedge z^{i_r})$, dann folgt

$$\begin{aligned} &\{\iota(z^j), \iota(z^k)\}(z) \\ &= \begin{cases} 0 \\ ((-1)^{i_p-1}(-1)^{i_q-1} + (-1)^{i_q-2}(-1)^{i_p-1})(z^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{z^{i_p}} \wedge \dots \wedge \widehat{z^{i_q}} \wedge \dots \wedge z^{i_r}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } j \notin \{i_1, \dots, i_r\} \text{ oder } k \notin \{i_1, \dots, i_r\} \\ 0 & \text{für } j = i_p, k = i_q \end{cases} = 0. \end{aligned}$$

Jetzt sei $z := (z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_p} \wedge \dots \wedge z^{i_r})$ dann folgt

$$\begin{aligned} &\{\epsilon(z^j), \iota(z^k)\}(z) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \notin \{i_1, \dots, i_r\}, \\ ((-1)^{i_p-1} + (-1)^{i_p})((z^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{z^{i_p}} \wedge \dots \wedge z^{i_r})) = 0 & \text{für } j \neq k = i_p, \\ ((-1)^{i_p-1}(-1)^{i_p-1})(z^{i_1} \wedge \dots \wedge z^{i_p} \wedge \dots \wedge z^{i_r}) & \text{für } j = k = i_p, \end{cases} \\ &= \delta^{jk}. \quad \square \end{aligned}$$

Damit ist die Graßmann-Algebra $\Lambda^{2n}(V_{2n})$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\epsilon(z^{i_j})$ und $\iota(z^{i_k})$ mit der obigen Darstellung der Clifford-Algebra $Cl^{\mathbb{C}}(V_{2n}, Q_{2n})$ und deren Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $\hat{c}_{a_j}^\dagger$ und \hat{c}_{a_k} isomorph.

28.7 Majorana-Fermionen

Der italienische Physiker Ettore Majorana (1906 - 1938), ein Schüler von Enrico Fermi, veröffentlichte 1937 eine Darstellung der Dirac-Gleichung mit reellen γ -Matrizen. Diese Darstellung beschreibt Teilchen, die mit ihren Antiteilchen identisch sind und die heute Majorana-Fermionen genannt werden.

Eine mögliche Anwendung von Majorana-Fermionen könnten Neutrinos sein, wenn sie denn mit Antineutrinos identisch sind. Dies soll das Experiment zum neutrinolosen Doppel-Betazerfall klären, der nur für Majorana-Neutrinos möglich wäre. In supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells der Elementarteilchen-Physik und in der *Supergravity* wird für elektrisch neutrale Teilchen häufig die Anwendung von Majorana-Fermionen diskutiert, weil sich damit die Zahl der Freiheitsgrade im Vergleich zu Dirac-Fermionen halbiert. Da die *Supergravity* häufig in höherdimensionalen Räumen formuliert wird, z.B. in der Dimension 10 als 'klassischer' Grenzfall von Stringtheorien, stellt sich die Frage in welchen Dimensionen überhaupt Majorana-Fermionen existieren können?

Diese Frage läßt sich nun leicht mit den Ergebnissen zur Struktur von Clifford-Algebren aus dem Abschnitt 28.3 beantworten. Wir gehen von einer 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ aus und der entsprechenden Clifford-Algebra $Cl(n, 1)$. Mit Hilfe von 28.3.7, 28.3.8, 28.3.9 folgt:

$$\begin{aligned}
 Cl(n, 1) &= Cl(n-1, 0) \otimes Cl(1, 1) \approx Cl(n-1, 0) \otimes \mathbb{R}(2) \\
 &= Cl(0, n-3) \otimes Cl(2, 0) \otimes \mathbb{R}(2) \approx Cl(0, n-3) \otimes \mathbb{R}(4) \\
 &= Cl(n-5, 0) \otimes Cl(0, 2) \otimes \mathbb{R}(4) \approx Cl(n-5, 0) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) \\
 &= Cl(0, n-7) \otimes Cl(2, 0) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) \approx Cl(0, n-7) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(8) . \quad (28.7.1)
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 n = 1 : \quad & Cl(1, 1) \approx \mathbb{R}(2) , \\
 n = 2 : \quad & Cl(2, 1) \approx Cl(1, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}(2) , \\
 n = 3 : \quad & Cl(3, 1) \approx Cl(2, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{R}(4) , \\
 n = 4 : \quad & Cl(4, 1) \approx Cl(3, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = Cl(0, 1) \otimes Cl(2, 0) \otimes \mathbb{R}(2) \\
 &= \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(4) , \\
 n = 5 : \quad & Cl(5, 1) \approx Cl(4, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = Cl(0, 2) \otimes \mathbb{R}(4) = \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) , \\
 n = 6 : \quad & Cl(6, 1) \approx Cl(5, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = Cl(1, 0) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) \\
 &= (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n = 7 : \quad Cl(7, 1) &\approx Cl(6, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = Cl(2, 0) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) \\
 &= \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(4) = \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(8) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n = 8 : \quad Cl(8, 1) &\approx Cl(7, 0) \otimes \mathbb{R}(2) = Cl(0, 1) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(8) \otimes \mathbb{R}(2) \\
 &= \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(16).
 \end{aligned}$$

Diese Struktur wiederholt sich $\bmod 8$. Hieraus sieht man sofort, daß es nur in den Dimensionen $n \bmod 8 \in \{1, 2, 3\}$ reelle Darstellungen der Clifford-Algebra und damit Majorana-Fermionen geben kann. Insbesondere kann also eine 10-dimensionale *Supergravity* mit Majorana-Fermionen operieren - siehe hierzu insb. Freedman u. Van Proeyen (2012), S. 56 ff.

29 Die Dirac-Gleichung

Mit den Entwicklungen der modernen Quantenfeld-Theorien ist für die meisten theoretischen Physiker die Mathematik der Dirac-Gleichung etwas aus dem Blickfeld des Interesses verschwunden. Jedoch sind die ursprüngliche Dirac-Gleichung und die euklidische Dirac-Gleichung aus mathematischer Sicht immer noch Objekte der Forschung und eine Quelle schöner Ergebnisse (z.B. topologischer Indexsätze). Wir wollen in dieses Thema hier nicht wirklich tief einsteigen, aber dennoch nicht versäumen auf die schöne und inspirierende Monographie von Thaller (1992) hinzuweisen!

29.1 Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Paul Adrien Maurice Dirac wurde in Bristol geboren. Er hatte eine sehr schwere Kindheit, bedingt durch seinen autoriären Vater und wohl auch durch seinen milden Autismus in Form eines Asperger-Syndroms (siehe Farmello (2009), S. 419 ff.).

Im Jahr 1921 begann Dirac ein Studium der Elektrotechnik in Bristol und wechselte dann zur Mathematik. Dank eines Stipendiums konnte er sein Mathematik-Studium in Cambridge bei Fowler fortsetzen. In seiner Dissertation 1925 entwickelte er den Poisson-Klammer- Formalismus der klassischen Mechanik in Analogie zu den quantenmechanischen Matrizen-Kommutatoren von Heisenberg.

Von 1932 bis 1969 forschte und lehrte Dirac als Professor auf dem berühmten Lucasischen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge, auf dem schon Newton tätig gewesen war.

Im Jahr 1937 heirateten Paul Dirac und Margit Wigner. Sie war die Schwester des mathematischen Physikers Eugene Wigner. Sie hatten zusammen zwei Töchter. Auch wenn die



Abbildung 29.1: P. Dirac
Nobel Foundation (1933), PD.
[[http://de.wikipedia.org/wiki/
Paul_Dirac](http://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac)]

Beziehung zwischen dem so wortkargen und unemotionalen Dirac und seiner temperamentvollen Frau nicht einfach war, so sorgte Margrit, genannt Mancini, doch dafür, daß ihr Mann von allem Alltäglichen entlastet wurde und sich ganz seiner Arbeit widmen konnte. Im Jahr 1970 übersiedelten Dirac und seine Frau nach Florida in die Nähe ihrer ältesten Tochter und Dirac forschte noch 14 Jahre bis zu seinem Lebensende an der University of Miami in Coral Gables und der Florida State University in Tallahassee.

Im Jahr 1926 vereinigte Dirac auf der mathematischen Grundlage von linearen Operatoren in Hilbert-Räumen Heisenbergs Matrizenmechanik mit Schrödingers Wellenmechanik. Diese Arbeiten waren die Grundlage für Diracs bis heute berühmtes, im Jahr 1930 erstmalig publiziertes Buch *Principles of Quantum Mechanics* (Dirac (1970)). Dieses Werk begründete den heute überall in der Quantentheorie verwendeten Formalismus und wurde schnell zum Standard-Lehrbuch der Quantenmechanik. Nebenbei führte er hier auch das sog. *Wechselwirkungsbild*, die *Bra-Ket* Schreibweise und die *Delta-Funktion* ein.

Im Jahr 1928 fand er die später nach ihm benannte *Dirac-Gleichung* als eine relativistische, quantenmechanische Wellengleichung 1. Ordnung für Elektronen auf der Grundlage von Spinoren. Damit konnte er den Spin relativistischer Teilchen erklären und das Antiteilchen des Elektrons, das Positron vorhersagen. Darüber hinaus postulierte er mit seiner *Löchertheorie* und dem *Dirac-See* eine erste Version des später in der Quantenelektrodynamik und Quantenfeldtheorie so wichtigen Begriffes des *Vakuums*. In den 1950'er Jahren versuchte Dirac dieses Vakuum als eine Art universellen Äther zu interpretieren.

Anschließend arbeitete Dirac über Quantenstatistik, wobei er die *Fermi-Dirac-Statistik* begründete und den Begriff des *Bosons* einführte. Im Jahr 1931 versuchte er die Maxwell-Gleichungen zu symmetrisieren und zu quantisieren und postulierte dabei die Existenz eines *magnetischen Monopols*.

In einer kleinen Arbeit von 1933 schuf Dirac einen Vorläufer von Feynmans Pfadintegral. Diese Arbeit wurde aber von niemandem wahrgenommen und erst später von Feynman wiederentdeckt.

Obwohl Dirac einer der Väter der Quantenelektrodynamik war, empfand er die von der jüngeren Physiker-Generation entwickelte Renormierungstheorie mit der Definition einer *nackten* Elektronen-Ladung und -Masse bis zu seinem Lebensende einfach nur als häßlich. Deshalb ignorierte er leider vollkommen die modernen Methoden der Renormierungsgruppen und die großen Erfolge des Standardmodells. Stattdessen insistierte er immer wieder darauf, daß wir in Bezug auf die Divergenzen der Quantenfeldtheorien grundlegend tiefere Einsichten benötigen. Er selbst untersuchte ab 1962 in diesem Zusammenhang ausgedehnte Systeme in der Quantenfeldtheorie. Diese Arbeiten fanden später in den Strings und p-Branen der String-Theorie ihre Fortsetzung.

Im Jahr 1964 hielt Dirac eine Vorlesungsreihe an der Yeshiva University in New York mit dem Titel *Lectures on Quantum Mechanics* (Dirac (2003)), in welcher er mit der von ihm geliebten Hamilton'schen Methode mit Nebenbedingungen beginnt, und dann

die Quantisierung auf flachen und gekrümmten Flächen entwickelt. In diesem Buch schreibt er zu Beginn:

"A good deal of my research in physics has consisted in not setting out to solve some particular problem, but simply examining mathematical equations of a kind that physicists use and trying to fit them together in an interesting way, regardless of any application that the work may have. It is simply a search for pretty mathematics. It may turn out later to have an application. Then one has good luck."

Dirac hat sich auch intensiv mit der *Allgemeinen Relativitätstheorie* von Einstein beschäftigt, siehe sein Buch: *General theory of relativity* (Dirac (1975)). Er untersuchte auch ganz allgemein Hamiltonsche Systeme mit Zwangsbedingungen (constraints) auf gekrümmten Hyperflächen, um einen Zugang zur Quantisierung der Gravitation zu finden. Und auch wenn er an der Quantisierung der *Allgemeinen Relativitätstheorie* scheiterte, so waren diese Arbeiten Diracs doch später die Grundlage für die *BRST-Formulierung* in der Quantenfeldtheorie und dann im Jahr 1986 der Ausgangspunkt für die Entwicklung der *Schleifenquantengravitation* (*Loop-Quantum-Gravity, LQG*) durch Ashtekar.

Im Jahr 1982 schlug Dirac den jungen mathematischen Physiker Edward Witten für einen speziellen Preis der Päpstlichen Akademie in Rom mit den Worten vor: Witten betreibe eine außerordentlich brillante mathematische Physik (Farmelo (2009), S. 437). Die erste Publikation von Green und Schwarz zur String-Theorie im Jahr 1984 erlebte Dirac nicht mehr - aber er hätte sich sicherlich darüber gefreut.

Dirac erhielt zahlreiche Preise, insbesondere den Physik-Nobelpreis (1933), die Royal Medal (1939) und die Copley Medal (1952) der Royal Society, sowie die Max-Planck-Medaille (1952) der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Im Oktober 1956 wurde Dirac nach einem Vortrag an der Universität Moskau nach seiner 'persönlichen Philosophie der Physik' gefragt. Als Antwort schrieb er an die Wandtafel (Farmelo (2009), S. 359):

PHYSICAL LAWS SHOULD HAVE MATHEMATICAL BEAUTY.

[Quellen: en.wikipedia: Paul_Dirac, Farmelo (2009), Kragh (1990)].

29.2 Die Dirac-Gleichung in der Minkowski-Raumzeit

Wir hatten bislang unter den Lorentztransformationen $O(3,1)$ eigentlich nur die Untergruppe $O(3,1)_+^\uparrow$, die eigentlichen (+), orthochronen (\uparrow) Lorentztransformationen, betrachtet, die mit $SO(3,1)$ übereinstimmen, bzw. deren Universeller Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$.

Wenn man jetzt zu $O(3,1)_+^\uparrow$ die Raumspiegelung \mathcal{P} hinzunimmt, d.h. zu $O(3,1)^\uparrow$ übergeht, dann stellt man fest, daß unsere in $O(3,1)_+^\uparrow$ irreduziblen Darstellungen $\Pi_{(s,0)}$ und

$\Pi_{(0,s)}$ in $O(3,1)^\dagger$ zunächst einmal gar keine Darstellungen sind, da $\mathcal{P}\Pi_{(s,0)}\mathcal{P} = \Pi_{(0,s)}$ gilt.

Beweis: a. für den Generator einer kleinen Drehungen θ um die x^3 -Achse:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\theta J_3)\mathcal{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta J_3 . \end{aligned}$$

b. für den Generator eines kleinen Boost α in x^3 -Richtung:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\alpha K_3)\mathcal{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha K_3 . \end{aligned}$$

c. aus 26.12.2 und a. und b. folgt:

$$\mathcal{P}I_k\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{P}(J_k - iK_k)\mathcal{P} = \frac{1}{2}(J_k + iK_k) = I'_k ,$$

$$\mathcal{P}I'_k\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{P}(J_k + iK_k)\mathcal{P} = \frac{1}{2}(J_k - iK_k) = I_k , \quad \square$$

d.h. unter \mathcal{P} wird $\Pi_{(s,0)}$ auf $\Pi_{(0,s)}$ abgebildet und umgekehrt.

Eine einfache Möglichkeit um eine irreduzible Darstellung unter $O(3,1)^\dagger$ aus den beiden Bestandteilen $\Pi_{(s,0)}$ und $\Pi_{(0,s)}$ zu konstruieren ist es, die direkte Summe zu bilden:

$$\Pi_{(s,0)} \oplus \Pi_{(0,s)} := \begin{pmatrix} \Pi_{(s,0)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Pi_{(0,s)} \end{pmatrix} . \quad (29.2.1)$$

In dieser Darstellung ist der Paritätsoperator dann einfach

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(2s+1)} & \mathbb{1}_{(2s+1)} \\ \mathbb{1}_{(2s+1)} & \mathbf{0}_{(2s+1)} \end{pmatrix}. \quad (29.2.2)$$

Im Fall $s = \frac{1}{2}$ spricht man bei $\Pi_{(\frac{1}{2},0)} \oplus \Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ von der Dirac-Darstellung und den zugeordneten Diracschen Bispinoren

$$\psi := \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (29.2.3)$$

Man kann jetzt die Dirac-Gleichung aus dem Transformationsverhalten der Weyl-Spinoren unter Lorentztransformationen und der relativistischen Energie-Impulsrelation ableiten, was hier vorgeführt werden soll (wir folgen Ryder (2003), S. 41 ff.). Die Lorentztransformationen legen den kinematischen Teil der Theorie fest und die Energie-Impulsrelationen bestimmen die Dynamik.

Wir erinnern zunächst an die speziell-relativistische Mechanik. Der Klarheit halber führen wir im Folgenden die Lichtgeschwindigkeit c und die Planck-Konstante \hbar explizit auf. Seien wieder $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Das einfachste lorentzinvariante Differential, das man für ein freies, massives Teilchen bilden kann ist

$$\begin{aligned} ds &:= \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = c \sqrt{1 - \beta^2} dt. \end{aligned} \quad (29.2.4)$$

Damit kann man eine Wirkungsfunktion als Integral einer Lagrangefunktion definieren als

$$\mathcal{S}[x^\mu] := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) ds := -mc \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} ds = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt. \quad (29.2.5)$$

Für $v \ll c$ liefert die Lagrangefunktion gerade die nichtrelativistische Lagrangefunktion eines freien Teilchens:

$$\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx -mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad (29.2.6)$$

wobei die Konstante $(-mc^2)$ keinen Einfluß auf die Bewegungsgleichungen hat.

Der Impuls wird wie üblich definiert als

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (29.2.7)$$

Wegen unserer 'Plus'-Minkowski-Metrik ist $p_i = p^i$ und damit

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}. \quad (29.2.8)$$

Die Energie ist per Definition

$$\begin{aligned} E(\vec{v}) &:= \dot{x}^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \mathcal{L} = \vec{v} \vec{p} - \mathcal{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + mc^2 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \gamma mc^2, \end{aligned} \quad (29.2.9)$$

und damit die Nullkomponente die Vierer-Impulsvektors

$$p^0 := \frac{E(\vec{v})}{c} = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (29.2.10)$$

Aus den Gleichungen für $E(\vec{v})$ und \vec{p} folgt sofort

$$\vec{p}c = \gamma mc \vec{v} = \frac{E}{c} \vec{v}. \quad (29.2.11)$$

Für ein Teilchen mit der Ruhemasse $m \neq 0$ ist $\lim_{v \rightarrow c} |\vec{p}| = \lim_{v \rightarrow c} E(\vec{v}) = \infty$. Für ein teilchen mit der Ruhemasse 0 bleibt aber 29.2.11 erhalten und liefert mit $v = c$:

$$E = |\vec{p}|c. \quad (29.2.12)$$

Achtung Vorzeichen! Wir wollen einen Dirac-Spinor ψ mit einem Impuls \vec{p} beschreiben, d.h. mit einer Geschwindigkeit \vec{v} gegenüber einem ruhenden Beobachter. Hierzu gehen wir von dem Spinor ψ im Spinor-Ruhsystem aus und machen eine Lorentztransformation mit $-\vec{p}$, bzw. $-\vec{v}$, in das Beobachter-Ruhsystem.

Satz 29.2.2 *Aus der Darstellung $\Pi_{(\frac{1}{2},0)} \oplus \Pi_{(0,\frac{1}{2})}$ und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $p^0 = \frac{E(\vec{v})}{c} = \gamma mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $p := p_\mu := (p_0, \vec{p}) = (-p^0, \vec{p})$ folgt die 4-dimensionale Dirac-Gleichung eines klassischen, massiven, freien Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens in der Form:*

$$(c\gamma^\mu p_\mu + mc^2 \mathbb{1})\psi(p) = \vec{0}. \quad (29.2.13)$$

Dabei bezeichnen die γ^μ die sog. Diracschen Gamma-Matrizen in der folgenden Weyl-Darstellung:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (29.2.14)$$

Beweis: Für einen linkshändigen Weyl-Spinor ψ_L gilt mit $\alpha := |\alpha^k|$ und $n^k := \frac{\alpha^k}{\alpha}$ bei einem reinen Boost (26.12.8):

$$\Pi_{(\frac{1}{2}, 0)}(\exp(\alpha^k K_k))\psi_L = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha^k \sigma_k\right)\psi_L = \exp\left(\frac{1}{2}\alpha n^k \sigma_k\right)\psi_L .$$

Wir nehmen an, daß sich der Spinor ψ_L auf ein Teilchen im Spinor-Ruhesystem, d.h. mit einem Impuls $\vec{p} = 0$, beziehe und schreiben $\psi_L(\vec{0}) = \psi_L$.

Mit

$$(n^k \sigma_k)^2 = \sum_{i,k=1}^3 n^i n^k \sigma_i \sigma_k = \sum_{i=1,k}^3 n^i n^k \delta^{ik} \sigma_i \sigma_k = \sum_{i=1}^3 (n^i)^2 \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

folgt sofort

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\alpha}{2} n^k \sigma_k\right) &= \mathbb{1} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) n^k \sigma_k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 (n^k \sigma_k)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 (n^k \sigma_k)^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} + \left(\frac{\alpha}{2}\right) n^k \sigma_k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \mathbb{1} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 (n^k \sigma_k) + \dots \\ &= \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbb{1} + n^k \sigma_k \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) . \end{aligned}$$

Damit gilt für den Spinor $\psi_L(\vec{p})$:

$$\psi_L(\vec{p}) = \exp\left(\frac{\alpha}{2} n^k \sigma_k\right)\psi_L = \left[\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbb{1} + n^k \sigma_k \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\psi_L(\vec{0}) .$$

Jetzt kann man $\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ auf $\cosh(\alpha)$ zurückführen:

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^\alpha + 2 + e^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1\right) = \frac{1}{2}(\cosh(\alpha) + 1) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^\alpha - 2 + e^{-\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) - 1\right) = \frac{1}{2}(\cosh(\alpha) - 1) , \end{aligned}$$

$$\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}(\cosh(\alpha) + 1)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}(\cosh(\alpha) - 1)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Aus 26.7.2 kennen wir den Zusammenhang von $\cosh(\alpha)$ mit $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\cosh(\alpha) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Und damit folgt im Spinor-Ruhsystem (Boost mit $-\vec{p}$):

$$\begin{aligned}\psi_L(\vec{p}) &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} + n^k \sigma_k (\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}] \psi_L(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} + \frac{-\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} (\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}] \psi_L(\vec{0}) .\end{aligned}$$

Wir ersetzen γ durch $\frac{E}{mc^2}$, bzw. $\frac{p^0}{mc}$, d.h. an dieser Stelle führen wir die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie ein. Damit folgt für $\psi_L(\vec{p})$:

$$\begin{aligned}\psi_L(\vec{p}) &= [(\frac{E}{mc^2} + 1)^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} (\frac{E}{mc^2} - 1)^{\frac{1}{2}}] \psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2) \mathbb{1} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} ((E - mc^2)(E + mc^2))^{\frac{1}{2}}] \psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2) \mathbb{1} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} (E^2 - m^2c^4)^{\frac{1}{2}}] \psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2) \mathbb{1} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} c|\vec{p}|] \psi_L(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2) \mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \psi_L(\vec{0}) .\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für einen rechtshändigen Weyl-Spinor ψ_R mit $\alpha := |\alpha^k|$ und $n^k := \frac{\alpha^k}{\alpha}$ im Spinor-Ruhsystem bei einem Boost (mit $-\vec{p}$) (26.12.9):

$$\Pi_{(0, \frac{1}{2})}(\exp(-\alpha^k K_k)) \psi_R = \exp(-\frac{1}{2} \alpha^k \sigma_k) \psi_R = \exp(-\frac{1}{2} \alpha n^k \sigma_k) \psi_R .$$

$$\begin{aligned}\psi_R(\vec{p}) &= \exp(-\frac{\alpha}{2} n^k \sigma_k) \psi_L = [\cosh(\frac{\alpha}{2}) \mathbb{1} - n^k \sigma_k \sinh(\frac{\alpha}{2})] \psi_R(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} - n^k \sigma_k (\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}] \psi_R(\vec{0}) \\ &= [(\frac{\gamma+1}{2})^{\frac{1}{2}} \mathbb{1} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{|\vec{p}|} (\frac{\gamma-1}{2})^{\frac{1}{2}}] \psi_R(\vec{0}) \\ &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2) \mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \psi_R(\vec{0}) .\end{aligned}$$

Bei $\vec{p} = \vec{0}$ sind aber $\psi_L(\vec{p})$ und $\psi_R(\vec{p})$ nicht unterscheidbar, d.h. $\psi_L(\vec{0}) = \psi_R(\vec{0})$. Damit kann man aus den beiden Gleichungen für $\psi_L(\vec{p})$ und $\psi_R(\vec{p})$ den Spinor $\psi_L(\vec{0})$ eliminieren:

$$[(E + mc^2) \mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] [(E + mc^2) \mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]$$

$$\begin{aligned}
&= [(E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4) - c^2|\vec{p}|^2]\mathbb{1} = [(m^2c^4 + 2Emc^2 + m^2c^4)]\mathbb{1} \\
&= [2mc^2(E + mc^2)]\mathbb{1} ,
\end{aligned}$$

$$[(E + mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) = (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}}[2mc^2(E + mc^2)]\psi_R(\vec{0}) \quad \Rightarrow$$

$$\psi_R(\vec{0}) = \psi_L(\vec{0}) = \frac{(2mc^2(E + mc^2))^{\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) .$$

$$\psi_L(\vec{0}) = \psi_R(\vec{0}) = \frac{(2mc^2(E + mc^2))^{\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) .$$

$$\begin{aligned}
\psi_L(\vec{p}) &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{(2mc^2(E + mc^2))^{\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]^2 \psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E^2 + m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2 + 2Emc^2)\mathbb{1} \\
&\quad - 2Ec\vec{p} \cdot \vec{\sigma} - 2mc^3\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(2E^2 + 2Emc^2)\mathbb{1} - 2Ec\vec{p} \cdot \vec{\sigma} - 2mc^3\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [2E(E + mc^2)\mathbb{1} - 2(E + mc^2)c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_R(\vec{p}) \\
&= \frac{E\mathbb{1} - c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{mc^2} \psi_R(\vec{p}) = \frac{p^0\mathbb{1} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{mc} \psi_R(\vec{p}) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_R(\vec{p}) &= (2mc^2(E + mc^2))^{-\frac{1}{2}} [(E + mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{(2mc^2(E + mc^2))^{\frac{1}{2}}}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]\psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E + mc^2)\mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}]^2 \psi_L(\vec{p}) \\
&= \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(E^2 + m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2 + 2Emc^2)\mathbb{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2Ec\vec{p} \cdot \vec{\sigma} + 2mc^3\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \psi_L(\vec{p}) \\
& = \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [(2E^2 + 2Emc^2)\mathbb{1} + 2Ec\vec{p} \cdot \vec{\sigma} + 2mc^3\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \psi_L(\vec{p}) \\
& = \frac{1}{[2mc^2(E + mc^2)]} [2E(E + mc^2)\mathbb{1} + 2(E + mc^2)c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}] \psi_L(\vec{p}) \\
& = \frac{E\mathbb{1} + c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{mc^2} \psi_L(\vec{p}) = \frac{p^0\mathbb{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{mc} \psi_L(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Diese beiden gekoppelten 2-dimensionalen Gleichungen können wir jetzt schreiben als

$$\begin{pmatrix} -mc\mathbb{1} & p^0\mathbb{1} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ p^0\mathbb{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -mc\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(\vec{p}) \\ \psi_R(\vec{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \text{und mit } p^0 = -p_0 \Rightarrow$$

bzw. nach Einführung der Gamma-Matrizen γ^μ :

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) = \vec{0}. \quad \square$$

Dies ist die 4-dimensionale Dirac-Gleichung eines klassischen, freien, massiven Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen. Im Fall von masselosen Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen ($m = 0$) entkoppeln die Dirac-Gleichungen zu den beiden Weyl-Gleichungen:

$$(p_0\mathbb{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\psi_R(\vec{p}) = \vec{0},$$

$$(p_0\mathbb{1} - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})\psi_L(\vec{p}) = \vec{0}.$$

Wegen $p_0 = \frac{E}{c} = |\vec{p}|$ (29.2.11) für masselose Teilchen schreibt man die Weyl-Gleichungen häufig folgendermaßen:

$$(\mathbb{1} + \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma})\psi_R(\vec{p}) = \vec{0},$$

$$(\mathbb{1} - \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \cdot \vec{\sigma})\psi_L(\vec{p}) = \vec{0}. \quad (29.2.15)$$

Die Projektion des Spins $\vec{\sigma}$ auf die Bewegungsrichtung $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ heißt Helizität. Nach dieser Sprechweise hat also das Teilchen ψ_R mit rechtshändiger Chiralität eine positive Helizität und das Teilchen ψ_L mit linkshändiger Chiralität eine negative Helizität :-)

Mit der üblichen Quantisierung im Schrödingerbild in der Ortsdarstellung

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \Rightarrow p^0 = \frac{E}{c} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0}, \Rightarrow p_0 \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0} \quad \text{und} \quad p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (29.2.16)$$

wird daraus die 4-dimensionale Dirac-Gleichung für quantenmechanische, freie, massive Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen:

$$(\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu + mc^2 \mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0}. \quad (29.2.17)$$

Mit Feynmans Abkürzung $\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu$ schreibt sich die Dirac-Gleichung als

$$(\hbar c \not{\partial} + mc^2 \mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0}. \quad (29.2.18)$$

Anmerkung 1: Der Diracsche Bispinor $\psi(p, x)$ ist hier die Wellenfunktion des quantenmechanischen, freien, massiven Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens. Erst mit dem Übergang von $\psi^\dagger(p, x)$ und $\psi(p, x)$ zu Hilbert-Raum-Operatoren, oder durch Einsetzen von $\psi^\dagger(p, x)$ und $\psi(p, x)$ in die Wirkungsfunktion eines Feynmanschen Pfadintegrals wird aus der Dirac-Gleichung eine Quantenfeldtheorie (QFT).

Anmerkung 2: Wenn man die Gleichung 29.2.17 adjungiert, so erhält man mit $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$ und $\gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i$:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \psi^\dagger(p, x) (-i\hbar c (\gamma^\mu)^\dagger \overleftarrow{\partial}_\mu - mc^2 \mathbb{1}) \\ &= \psi^\dagger(p, x) (-i\hbar c (\gamma^0)^\dagger \overleftarrow{\partial}_0 - i\hbar c (\gamma^i)^\dagger \overleftarrow{\partial}_i - mc^2 \mathbb{1}) \\ &= \psi^\dagger(p, x) (-i\hbar c \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\hbar c \gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - mc^2 \mathbb{1}) \quad \Rightarrow \\ \vec{0} &= \psi^\dagger(p, x) (-i\hbar c \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 + i\hbar c \gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - mc^2 \mathbb{1}) \gamma^0 \\ &= \psi^\dagger(p, x) \gamma^0 (-i\hbar c \gamma^0 \overleftarrow{\partial}_0 - i\hbar c \gamma^i \overleftarrow{\partial}_i - mc^2 \mathbb{1}) \\ &= \psi^\dagger(p, x) \gamma^0 (-i\hbar c \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - mc^2 \mathbb{1}), \quad \text{bzw.} \\ \bar{\psi}(p, x) (i\hbar c \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + mc^2 \mathbb{1}) &= \vec{0}, \quad \text{mit } \bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0. \end{aligned} \quad (29.2.19)$$

Zum Aufstellen der Lagrangefunktion eines Dirac-Teilchens oder Dirac-Feldes benötigt man lorentzinvariante, bilineare Spinorkombinationen.

Satz 29.2.4 *Unter Lorentztransformationen ist $\bar{\psi}\psi$ ein Skalar und $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ ein Vierervektor.*

Beweis: Sei $\psi^T = (\psi_L, \psi_R)^T$, dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \psi = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R. \end{aligned}$$

Aus 26.12.8 und 26.12.9 folgt sofort, daß $\bar{\psi}\psi$ unter Lorentztransformationen invariant ist. Und da bei einer Paritätsoperation \mathcal{P} nach 29.2.2 gerade ψ_L und ψ_R miteinander vertauscht werden, bleibt $\bar{\psi}\psi$ auch unter \mathcal{P} invariant, ist also ein Lorentzskalar.

Als nächstes soll gezeigt werden, daß sich $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ wie ein Vierervektor transformiert. Wir unterscheiden die Fälle einer Drehung um einen infinitesimalen Winkel θ^3 um x^3 und eines Boost um einen infinitesimalen Betrag α^3 in Richtung x^3 .

a. eine Drehung um einen infinitesimalen Winkel θ^3 um x^3 wirkt auf einen Vierervektor folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} (x^0)' \\ (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \theta^3 J_3) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta^3 & 0 \\ 0 & \theta^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 - \theta^3 x^2 \\ \theta^3 x^1 + x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h. } (x^0)' = x^0 \quad \text{und} \quad (x^i)' = x^i - \theta^3 \epsilon_{ij3} x^j.$$

Mit 26.12.8, 26.12.9 und 26.6.9 folgt:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^0\psi)' &= (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi)' = (\psi^\dagger\psi)' = (\psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R)' \\ &= \psi_L^\dagger \exp\left(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3\right)\psi_L \\ &\quad + \psi_R^\dagger \exp\left(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3\right)\psi_R \\ &= \psi_L^\dagger\psi_L + \psi_R^\dagger\psi_R = \bar{\psi}\gamma^0\psi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^i\psi)' &= (\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\psi)' = ((\psi_L^\dagger)', (\psi_R^\dagger)') \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\psi_L)' \\ (\psi_R)' \end{pmatrix} \\ &= -(\psi_L^\dagger)' \sigma_i (\psi_L)' + (\psi_R^\dagger)' \sigma_i (\psi_R)' \\ &= -\psi_L^\dagger \exp\left(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \sigma_i \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \psi_L \\ &\quad + \psi_R^\dagger \exp\left(\frac{i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \sigma_i \exp\left(\frac{-i}{2}\theta^3\sigma_3^\dagger\right) \psi_R \\ &= -\psi_L^\dagger \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3\right) \sigma_i \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3\right) \psi_L \\ &\quad + \psi_R^\dagger \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3\right) \sigma_i \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}\theta^3\sigma_3\right) \psi_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L - \psi_L^\dagger \left(\frac{i}{2} \theta^3 \sigma_3\right) \sigma_i \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma_i \left(\frac{i}{2} \theta^3 \sigma_3\right) \psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R + \psi_R^\dagger \left(\frac{i}{2} \theta^3 \sigma_3\right) \sigma_i \psi_R - \psi_R^\dagger \sigma_i \left(\frac{i}{2} \theta^3 \sigma_3\right) \psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R - i^2 \theta^3 \psi_L^\dagger (\epsilon_{3ij} \sigma_j) \psi_L + i^2 \theta^3 \psi_R^\dagger (\epsilon_{3ij} \sigma_j) \psi_R \\
&= (\bar{\psi} \gamma^i \psi) + \theta^3 \epsilon_{ij3} (\psi_L^\dagger \sigma_j \psi_L - \psi_R^\dagger \sigma_j \psi_R) \\
&= (\bar{\psi} \gamma^i \psi) - \theta^3 \epsilon_{ij3} (\bar{\psi} \gamma^j \psi) .
\end{aligned}$$

b. ein Boost im Beobachter-Ruhsystem um einen infinitesimalen Betrag α^3 in Richtung x^3 wirkt auf einen Vierervektor folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} (x^0)' \\ (x^1)' \\ (x^2)' \\ (x^3)' \end{pmatrix} = (\mathbb{1} + \alpha^3 K_3) \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 + \alpha^3 x^3 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 + \alpha^3 x^0 \end{pmatrix} ,$$

$$\text{d.h. } (x^i)' = x^i + \alpha^3 (\delta_0^i x^3 + \delta_3^i x^0) .$$

Wieder folgt mit 26.12.8, 26.12.9 und 26.6.9, wobei wir erneut mit $\alpha_3 \rightarrow -\alpha_3$ das Beobachter-Ruhsystem vom Spinor-Ruhsystem aus betrachten:

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi} \gamma^0 \psi)' &= (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi)' = (\psi^\dagger \psi)' = (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R)' \\
&= \psi_L^\dagger \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3\right) \psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger \exp\left(\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger\right) \exp\left(\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3\right) \psi_R \\
&\approx \psi_L^\dagger (\mathbb{1} - \alpha^3 \sigma_3) \psi_L + \psi_R^\dagger (\mathbb{1} + \alpha^3 \sigma_3) \psi_R \\
&= (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R) + \alpha^3 (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \psi^\dagger \psi + \alpha^3 \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi + \alpha^3 \psi^\dagger \gamma^0 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi \\
&= \bar{\psi} \gamma^0 \psi + \alpha^3 \bar{\psi} \gamma^3 \psi .
\end{aligned}$$

Für $i = 1, 2$ gilt:

$$(\bar{\psi} \gamma^i \psi)' = (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi)' = (\psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi)'$$

$$\begin{aligned}
&= ((\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix})' = (-\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R)' \\
&= -\psi_L^\dagger \exp(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_i \exp(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_L + \psi_R^\dagger (\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_i (\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger (\mathbb{1} - \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \sigma_i (\mathbb{1} - \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_L \\
&\quad + \psi_R^\dagger (\mathbb{1} + \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \sigma_i (\mathbb{1} + \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R \\
&\quad + \psi_L^\dagger \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3 \sigma_i \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma_i \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3 \psi_L + \psi_R^\dagger \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3 \sigma_i \psi_R + \psi_R^\dagger \sigma_i \frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3 \psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi = \bar{\psi} \gamma^i \psi .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi} \gamma^3 \psi)' &= (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \psi)' = (\psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi)' \\
&= ((\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix})' = (-\psi_L^\dagger \sigma_3 \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R)' \\
&= -\psi_L^\dagger \exp(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_3 \exp(-\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_L + \psi_R^\dagger \exp(\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_3 \exp(\frac{1}{2} \alpha^3 \sigma_3) \psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger \exp(-\alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_3 \psi_L + \psi_R^\dagger \exp(\alpha^3 \sigma_3^\dagger) \sigma_3 \psi_R \\
&\approx -\psi_L^\dagger (\mathbb{1} - \alpha^3 \sigma_3) \sigma_3 \psi_L + \psi_R^\dagger (\mathbb{1} + \alpha^3 \sigma_3) \sigma_3 \psi_R \\
&= -\psi_L^\dagger \sigma_3 \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R + \alpha^3 \psi_L^\dagger \mathbb{1} \psi_L + \alpha^3 \psi_R^\dagger \mathbb{1} \psi_R \\
&= (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} -\sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} + \alpha^3 (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R) \\
&= \psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_3 \\ -\sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi + \alpha^3 \psi^\dagger \psi \\
&= \bar{\psi} \gamma^3 \psi + \alpha^3 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^3 \psi + \alpha^3 \bar{\psi} \gamma^0 \psi . \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 29.2.6 *Da für den Vierervektor $j^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ gilt $j^0 \geq 0$ und $\partial_\mu j^\mu = 0$ kann j^μ als Strom der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden.*

Beweis:

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_L|^2 + |\psi_R|^2 \geq 0, \quad (29.2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi(p, x) = \vec{0} \\ \bar{\psi}(p, x)(i\hbar c\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + mc^2\mathbb{1}) = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu)\psi + \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \\ &= \frac{1}{i\hbar c}(-mc^2\mathbb{1} + mc^2\mathbb{1}) = 0. \quad \square \end{aligned} \quad (29.2.21)$$

Da sich $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ unter Lorentztransformationen wie ein Vierervektor transformiert und $\bar{\psi}\psi$ wie ein Viererskalar, können wir das folgende Wirkungsfunktional aufstellen, deren Variation nach $\bar{\psi}$ beim Verschwinden von ψ auf dem Rand die Dirac-Gleichung liefert:

$$\mathcal{S}[\bar{\psi}, \partial_\mu \bar{\psi}, \psi, \partial_\mu \psi] := \int_{\mathbb{R}^4} \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi d^4x. \quad (29.2.22)$$

29.3 Die Diracschen Gamma-Matrizen

Wir haben oben die Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung eingeführt:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

Diese Darstellung kann man mittels zwei Sätzen von erweiterten Pauli-Matrizen formal noch etwas allgemeiner schreiben. Dazu führen wir σ_μ und $\bar{\sigma}_\mu$, bzw. σ^μ und $\bar{\sigma}^\mu$ ein:

$$\sigma_\mu := (-\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_\mu := (-\mathbb{1}, -\sigma_i) \quad \text{bzw.} \quad (29.3.1)$$

$$\sigma^\mu := (\mathbb{1}, \sigma_i) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}^\mu := (\mathbb{1}, -\sigma_i). \quad (29.3.2)$$

Daraus folgt sofort

$$2\sigma_0\bar{\sigma}_0 = 2\mathbb{1} = -2\eta_{00}\mathbb{1},$$

$$2\sigma_i\bar{\sigma}_i = -2(\sigma_i)^2 = -2\mathbb{1} = -2\eta_{ii}\mathbb{1},$$

$$\sigma_0 \bar{\sigma}_i + \sigma_i \bar{\sigma}_0 = \sigma_i - \sigma_i = \mathbf{0} = -2\eta_{0i} \mathbb{1} ,$$

$$\sigma_i \bar{\sigma}_j + \sigma_j \bar{\sigma}_i = -\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = \mathbf{0} = -2\eta_{ij} \mathbb{1} ,$$

also zusammengefaßt

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = -2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1} . \quad (29.3.3)$$

Damit können wir die Diracschen Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung schreiben als:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \quad (29.3.4)$$

Für die Gamma-Matrizen in der Weyl-Darstellung und in der 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ gilt:

Lemma 29.3.1

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} . \quad (29.3.5)$$

$$\gamma_* := \gamma^5 := \gamma_5 := (-i)^3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} . \quad (29.3.6)$$

Beweis: Unsere Metrik $\eta^{\mu\nu}$ ist die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ und damit folgt:

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\gamma^0 \gamma^0 = 2\mathbb{1} = -2\eta^{00} \mathbb{1} ,$$

$$\{\gamma^i, \gamma^i\} = 2\gamma^i \gamma^i = -2\mathbb{1} = -2\eta^{ii} \mathbb{1} ,$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = -2\eta^{0i} \mathbb{1} ,$$

und für $i \neq j$:

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \begin{pmatrix} -\sigma_i \sigma_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma_j \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_j \sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} \cdot \mathbb{1} = -2\eta^{ij} \mathbb{1} .$$

$$\gamma_5 := (-i)^3 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = i(-1) \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_2 \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$= -i \begin{pmatrix} +\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} .$$

□

Die *Weyl-Darstellung* heißt auch *chirale Darstellung* und in dieser Darstellung nehmen die Projektoren auf linkshändige, bzw. rechtshändige Spinoren eine besonders einfache Form an:

$$P_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5). \quad (29.3.7)$$

Dirac selbst hat bei der Einführung seiner Dirac-Gleichung im Jahr 1928 eine andere Darstellung verwendet, die man heute als *Dirac-Darstellung* oder *Standard-Darstellung* bezeichnet. Um zu dieser Darstellung zu gelangen multipliziert man die Dirac-Gleichung mit γ^0 und wendet dann noch eine unitäre Transformation U an:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi &= 0 \quad \Rightarrow \\ \gamma^0(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + mc\mathbb{1})\psi &= 0 \quad \Rightarrow \\ (\mathbb{1}p_0 + \gamma^0\gamma^i p_i + mc\gamma^0)\psi &= 0 \quad \Rightarrow \\ (\gamma^0\gamma^i p_i + mc\gamma^0)\psi &= -\mathbb{1}p_0\psi = \mathbb{1}\frac{E}{c}\psi. \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\alpha}^i := \gamma^0\gamma^i$ und $\tilde{\beta} := \gamma^0$ folgt die Dirac-Gleichung mit den Dirac-Matrizen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ in der *Weyl-Darstellung*:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^i := \gamma^0\gamma^i &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix}, \\ \tilde{\beta} := \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ (c\tilde{\alpha}^i p_i + \tilde{\beta}mc^2)\psi &= \mathbb{1}E\psi. \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir auf die Dirac-Gleichung die folgende unitäre Transformation an:

$$\begin{aligned} U &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \\ \alpha &:= U\tilde{\alpha}U^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \beta &:= U\tilde{\beta}U^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und erhalten die Dirac-Gleichung in der *Dirac-Darstellung* oder *Standard-Darstellung*:

$$(c\alpha^i p_i + \beta mc^2)\psi = \mathbb{1}E\psi, \text{ bzw.} \quad (29.3.8)$$

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \text{oder} \quad \hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad \text{mit} \quad \hat{H} := c\alpha^i p_i + \beta mc^2 = -i\hbar c\alpha^i \partial_i + \beta mc^2. \quad (29.3.9)$$

Manche Autoren, die wie wir die 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ verwenden, wünschen sich aber dennoch ein positives Vorzeichen in der Antikommutator-Relation der Gamma-Matrizen γ^μ . Wenn man die Dirac-Matrizen mittels einer unitärer Transformation abändert, dann bleibt die Dirac-Gleichung forminvariant, multipliziert man jedoch die Dirac-Matrizen mit einem Faktor, so ändert sich natürlich auch der Term $mc\mathbb{1}$ in der Dirac-Gleichung entsprechend.

Freedman u. Van Proeyen (2012) errichten das positive Vorzeichen in der Antikommutator-Relation der Gamma-Matrizen γ^μ durch den Übergang zu den Gammamatrizen γ_F^μ :

$$\gamma_F^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_F^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (29.3.10)$$

$$\{\gamma_F^\mu, \gamma_F^\nu\} := \gamma_F^\mu \gamma_F^\nu + \gamma_F^\nu \gamma_F^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (29.3.11)$$

$$\gamma_{F*} := \gamma_F^5 := \gamma_{F5} := (-i)^3 \gamma_{F0} \gamma_{F1} \gamma_{F2} \gamma_{F3} = \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (29.3.12)$$

Weinberg (1995b) wählt $\gamma_W^\mu := -i\gamma^\mu$:

$$\gamma_W^0 = -i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_W^i = -i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (29.3.13)$$

$$\{\gamma_W^\mu, \gamma_W^\nu\} := \gamma_W^\mu \gamma_W^\nu + \gamma_W^\nu \gamma_W^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (29.3.14)$$

$$\gamma_{W*} := \gamma_W^5 := \gamma_{W5} := (-i)^3 \gamma_{W0} \gamma_{W1} \gamma_{W2} \gamma_{W3} = \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (29.3.15)$$

Die Weinberg- und die Freedman & Van Proeyen-Darstellungen sind unitär äquivalent mit

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_F^\mu = U \gamma_W^\mu U^\dagger. \quad (29.3.16)$$

Allerdings ändert sich bei beiden Darstellungen dann auch die Form der Dirac-Gleichung gegenüber unserer Weyl-Darstellung:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) = \vec{\mathbf{0}} &\Rightarrow (i(-i)\gamma^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow \\ i\gamma_W^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) &\approx i\gamma_F^\mu p_\mu + mc\mathbb{1})\psi(p) = \vec{\mathbf{0}}. \end{aligned} \quad (29.3.17)$$

Aus den Gamma-Matrizen kann man jetzt auch eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$ konstruieren. Diese Darstellung $\Sigma^{\mu\nu}$ heißt Spintensor und findet Verwendung in der Transformation des Diracschen Bispinors ψ unter Lorentztransformationen und in der Dirac-Gleichung in gekrümmten Raumzeiten (s.u.).

Lemma 29.3.3

$$\Sigma^{\mu\nu} := -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (29.3.18)$$

erfüllt die Beziehung

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} \quad (29.3.19)$$

und ist deshalb eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$. Damit läßt sich eine Darstellung $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ einer Lorentztransformation auf einen Dirac-Spinor ψ schreiben als:

$$\psi' = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma}\right)\psi. \quad (29.3.20)$$

Anmerkung: das Minuszeichen in der Definition von $\Sigma^{\mu\nu}$ korrespondiert mit dem Minuszeichen im Antikommutator $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$ in der Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen γ^μ bei unserer 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$.

Beweis: Wir beginnen mit dem Kommutator von $[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho]$:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = -\frac{1}{4}(2\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}) = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \eta^{\mu\nu}\mathbb{1}),$$

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = \Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\rho\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \eta^{\mu\nu}\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\rho\eta^{\mu\nu})$$

$$= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu)$$

$$= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - 2\eta^{\rho\nu}\gamma^\mu + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^\nu)$$

$$= \eta^{\rho\nu}\gamma^\mu - \eta^{\rho\mu}\gamma^\nu = \gamma^\mu\eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu\eta^{\rho\mu}.$$

Jetzt zum Kommutator von $[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}]$:

$$\begin{aligned}
[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] &= -\frac{1}{4}([\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \\
&= -\frac{1}{4}(\Sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\rho \gamma^\sigma \Sigma^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\sigma \gamma^\rho + \gamma^\sigma \gamma^\rho \Sigma^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{1}{4}(\gamma^\rho \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\sigma + (\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\rho\mu}) \gamma^\sigma - \gamma^\rho \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\sigma + \gamma^\rho (\gamma^\mu \eta^{\nu\sigma} - \gamma^\nu \eta^{\sigma\mu}) \\
&\quad - \gamma^\sigma \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho - (\gamma^\mu \eta^{\nu\sigma} - \gamma^\nu \eta^{\sigma\mu}) \gamma^\rho + \gamma^\sigma \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho - \gamma^\sigma (\gamma^\mu \eta^{\nu\rho} - \gamma^\nu \eta^{\rho\mu})) \\
&= -\frac{1}{4}(\eta^{\rho\mu} (-\gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu) - \eta^{\nu\rho} (-\gamma^\mu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\mu) \\
&\quad + \eta^{\sigma\mu} (-\gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\rho) - \eta^{\nu\sigma} (-\gamma^\rho \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\rho)) \\
&= -(\eta^{\rho\mu} \Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma} + \eta^{\sigma\mu} \Sigma^{\rho\nu} - \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\rho\mu}) \\
&= \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \Sigma^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma} \Sigma^{\rho\nu} \\
&= \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} \Sigma^{\nu\rho} .
\end{aligned}$$

Damit erfüllen die $\Sigma^{\mu\nu}$ die Kommutator-Relationen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$, siehe 26.7.10, stellen also eine Darstellung von $\mathfrak{so}(3,1)$ im Raum der 4-dimensionalen Diracschen Bispinoren ψ dar, die sich nach 26.7.13 unter einer Darstellung einer Lorentztransformation also folgendermaßen transformieren:

$$\psi' = \tilde{\Lambda} \psi = \exp\left(\frac{1}{2} \lambda^{\rho\sigma} \Sigma_{\rho\sigma}\right) \psi . \quad \square$$

29.4 Dirac Gleichung mit elektromagnetischem Feld

Zunächst soll hier an die kovariante Darstellung der Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes erinnert werden. Auf die Beschreibung des Elektromagnetismus als einer $U(1)$ -Eichtheorie werden wir in Kapitel 31.2 eingehen.

Wir verwenden nach wie vor unsere 'Plus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ und für die EM-Felder die folgenden Bezeichnungen:

$$A^\mu := \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad j^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (29.4.1)$$

Die ersten beiden Maxwell-Gleichungen sind, wie wir später sehen werden, 'rein geometrischer' Natur:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 . \quad (\text{Gauß-Faradaysches Gesetz}) \quad (29.4.2)$$

Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktionals \mathcal{S} :

$$\mathcal{S}[A_\nu, \partial_\mu A_\nu] := \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) d^4x := \int_{\mathbb{R}^4} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\nu j^\nu \right) d^4x, \quad (29.4.3)$$

Natürlich soll die Lagrangefunktion \mathcal{L} ein Skalar sein, aber daß \mathcal{L} nun im Fall der Elektrodynamik genau diese Form hat ist nicht theoretischen Überlegungen zu verdanken, sondern die Forderung nach Übereinstimmung mit den Experimenten. Inzwischen ist allerdings klar, daß die Elektrodynamik der klassische Grenzfall der Quantenelektrodynamik ist, und wenn man versucht die Lagrangefunktion der QED aufzustellen, so erhält man zusätzliche Einschränkungen an die Lagrangefunktion:

dort würde etwa ein Term der Form $A_\nu A^\nu$ zu einer Masse der Photonen führen und Terme mit einer Kombination von A_ν und $\partial_\mu A_\nu$ in höherer als vierter Potenz würden die Theorie unrenormierbar machen.

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa 34.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0. \quad (29.4.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = j^\nu.$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} [(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha'}^\mu \delta_{\beta'}^\nu - \delta_{\beta'}^\mu \delta_{\alpha'}^\nu)] \\ &= -\frac{1}{4} [(\eta^{\mu\alpha'} \eta^{\nu\beta'} - \eta^{\nu\alpha'} \eta^{\mu\beta'}) F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta} (\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu})] \\ &= -\frac{1}{4} [(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) + (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})] = -F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} -j^\nu \quad \text{bzw.}$$

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} \stackrel{!}{=} j^\nu. \quad (\text{Gauß-Ampèresches Gesetz}) \quad (29.4.5)$$

Die Maxwell-Gleichungen sind hier partielle Differentialgleichungen des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$. Eine Transformation von A^μ , die $F^{\mu\nu}$ und damit die Maxwell-Gleichungen invariant läßt, heißt eine Eichtransformation. Zum Beispiel ist

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\mu) \quad (29.4.6)$$

eine solche Eichtransformation.

Wenn man nun die Elektrodynamik mit der Dirac-Gleichung koppeln möchte, so ist ein möglicher Weg die Ersetzung in der Wirkungsfunktion:

$$A_\mu j^\mu \rightarrow A_\mu q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi ,$$

d.h. man ersetzt den elektrodynamischen Viererstrom durch den Wahrscheinlichkeitsdichten-Viererstrom der Dirac-Gleichung mal der elektrischen Ladung q des Teilchens. Dadurch ergibt sich die folgende Wirkungsfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L} d^4x \quad \text{mit} \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \mathbb{1}) \psi + A_\mu q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu + A_\mu q \gamma^\mu - mc^2 \mathbb{1}) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu) - mc^2 \mathbb{1}) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &=: \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2 \mathbb{1}) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (29.4.7)$$

Der Ausdruck

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu) \quad (29.4.8)$$

heißt auch *kovariante Ableitung*, was aus der Darstellung des Elektromagnetismus als einer Eichtheorie (siehe Kapitel 31.2) verständlich werden wird.

Anmerkung: in $\nabla_\mu = (\partial_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu)$ steht q für die elektrische Ladung des Dirac-Teilchens, d.h. bei einem Elektron ist $q = -e$. In der 'Minus'-Minkowski-Metrik $\text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$ der meisten QM-Bücher wird natürlich aus unserem $+q$ ein $-q$.

Das obige Vorgehen der Kopplung des elektromagnetischen Feldes an ein Dirac-Teilchen heißt in der Physik *minimale Kopplung*, denn natürlich wären ja auch kompliziertere Formen der Kopplung denkbar.

Diese minimale Kopplung hat nun die Eigenschaft, daß sie das Wirkungsfunktional \mathcal{S} , bzw. die Lagrangefunktion \mathcal{L} , unter einer lokalen $U(1)$ -Eichtransformation invariant läßt:

$$\psi'(x^\mu) := e^{-i \frac{q}{\hbar c} \chi(x^\mu)} \psi(x_\mu) , \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(x^\mu) \quad \Rightarrow \quad (29.4.9)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - iA'_\mu \frac{q}{\hbar c}) - mc^2\mathbb{1})\psi' - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu \frac{q}{\hbar c}\chi(x^\mu) - i\frac{q}{\hbar c}(A_\mu - \partial_\mu\chi(x^\mu))) - mc^2\mathbb{1})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc^2\mathbb{1})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Dirac-Gleichung mit elektromagnetischem Vektorpotential:

$$(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi = (i\hbar c\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A_\mu) - mc^2\mathbb{1})\psi = \vec{0}. \quad (29.4.10)$$

29.5 Die CPT-Symmetrien

Wir hatten bereits oben in 29.2.3 gesehen, daß für den Paritäts-Operator \mathcal{P} , der eine Rauminversion beschreibt, $\mathcal{P}\psi_L = \psi_R$ gilt, und daß \mathcal{P} in der Weyl-Darstellung die folgende Form hat (29.2.2):

$$\mathcal{P} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (29.5.1)$$

Bei einer Rauminversion $x^i \rightarrow -x^i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ geht also die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{P}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\psi = \vec{0}.$$

Bei einer Zeitinversion $t \rightarrow -t$ geht die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\psi = \vec{0},$$

wobei sich \mathcal{T} in der Weyl-Darstellung ergibt als:

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_0\mathcal{K} := i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexkonjugation}. \quad (29.5.2)$$

Beweis: Einerseits führt $t' = -t$ zu

$$x'_0 = -x_0, \quad j'_i = -j_i, \quad A'_i = -A_i \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\},$$

$$\begin{aligned}
i\hbar c\gamma^\mu\nabla'_\mu &= i\hbar c\gamma^\mu[\partial'_\mu - i\frac{q}{\hbar c}A'_\mu] \\
&= i\hbar c[\gamma^0(\partial'_0 - i\frac{q}{\hbar c}A'_0) + \gamma^i(\partial'_i - i\frac{q}{\hbar c}A'_i)] \\
&= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^i(\partial_i + i\frac{q}{\hbar c}A_i)].
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mathcal{T}_0\mathcal{T}_0 = i\gamma^1\gamma^3 \cdot i\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^3 \cdot \gamma^1\gamma^3 = \mathbb{1} ,$$

$$\mathcal{T}(-\mathcal{T}) = \mathcal{T}_0\mathcal{K}(-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) = \mathcal{T}_0\mathcal{T}_0 = \mathbb{1} , \quad \text{also}$$

$$\mathcal{T}^{-1} = -\mathcal{T} = -i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} , \quad \mathcal{T}^\dagger = (i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K})^\dagger = i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} = \mathcal{T} ,$$

also ist \mathcal{T} ein antiunitärer Operator. Weiter ist in unserer Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen

$$(\gamma^2)^* = -\gamma^2 ,$$

$$\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^0 , \quad \gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3 = \gamma^1 ,$$

$$\gamma^1\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = -\gamma^2 , \quad \gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^3 = \gamma^3 .$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu)\mathcal{T}^{-1} &= i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu](-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^0\nabla_0 + i\hbar c\gamma^1\nabla_1 + i\hbar c\gamma^2\nabla_2 + i\hbar c\gamma^3\nabla_3](-i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^1\gamma^3[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* - i\hbar c(\gamma^2)^*\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](i\gamma^1\gamma^3) \\ &= i\hbar c[-\gamma^0\nabla_0^* + \gamma^1\nabla_1^* + \gamma^2\nabla_2^* + \gamma^3\nabla_3^*] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^1(\partial_1 + i\frac{q}{\hbar c}A_1) \\ &\quad + \gamma^2(\partial_2 + i\frac{q}{\hbar c}A_2) + \gamma^3(\partial_3 + i\frac{q}{\hbar c}A_3)] \\ &= i\hbar c[\gamma^0(-\partial_0 - i\frac{q}{\hbar c}A_0) + \gamma^i(\partial_i + i\frac{q}{\hbar c}A_i)] . \end{aligned}$$

Also ist

$$[(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi]' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{T}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}\psi = \vec{0} . \quad \square$$

Bei einer Ladungskonjugation $q \rightarrow -q$ geht die Dirac-Gleichung über in

$$\mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu\nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\psi = \vec{0} ,$$

wobei sich \mathcal{C} in der Weyl-Darstellung ergibt als:

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_0\mathcal{K} := i\gamma^2\mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexbijugation} . \quad (29.5.3)$$

Beweis: Einerseits führt $q' = -q$ zu

$$i\hbar c\gamma^\mu \nabla'_\mu = i\hbar c\gamma^\mu [\partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu].$$

Andererseits ist

$$\mathcal{C}_0\mathcal{C}_0 = i\gamma^2 \cdot i\gamma^2 = \mathbb{1},$$

$$\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}_0\mathcal{K}\mathcal{C}_0\mathcal{K} = i\gamma^2\mathcal{K}(i\gamma^2\mathcal{K}) = i\gamma^2(-i(\gamma^2)^*) = \mathcal{C}_0\mathcal{C}_0 = \mathbb{1}, \quad \text{also}$$

$$\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C} = i\gamma^2\mathcal{K}, \quad \mathcal{C}^\dagger = (i\gamma^2)^\dagger\mathcal{K} = i\gamma^2\mathcal{K} = \mathcal{C},$$

also ist \mathcal{C} ein unitärer Operator. Weiter ist in unserer Weyl-Darstellung der Gamma-Matrizen

$$(\gamma^2)^* = -\gamma^2,$$

$$\gamma^2\gamma^0\gamma^2 = \gamma^0, \quad \gamma^2\gamma^1\gamma^2 = \gamma^1,$$

$$\gamma^2\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^2, \quad \gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \gamma^3.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu \nabla_\mu)\mathcal{C}^{-1} &= i\gamma^2\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^\mu \nabla_\mu](i\gamma^2\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^2\mathcal{K}[i\hbar c\gamma^0\nabla_0 + i\hbar c\gamma^1\nabla_1 + i\hbar c\gamma^2\nabla_2 + i\hbar c\gamma^3\nabla_3](i\gamma^2\mathcal{K}) \\ &= i\gamma^2[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* - i\hbar c(\gamma^2)^*\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](-i(\gamma^2)^*) \\ &= i\gamma^2[-i\hbar c\gamma^0\nabla_0^* - i\hbar c\gamma^1\nabla_1^* + i\hbar c\gamma^2\nabla_2^* - i\hbar c\gamma^3\nabla_3^*](i\gamma^2) \\ &= i\hbar c[\gamma^0\nabla_0^* + \gamma^1\nabla_1^* + \gamma^2\nabla_2^* + \gamma^3\nabla_3^*] \\ &= i\hbar c[\gamma^\mu(\partial_0 + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu)]. \end{aligned}$$

Also ist

$$[(i\hbar c\gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\psi]' = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{C}(i\hbar c\gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2\mathbb{1})\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\psi = \vec{0}. \quad \square$$

Wir haben also gezeigt, daß die Dirac-Gleichung mit minimaler Kopplung an die klassische Elektrodynamik die Symmetrien der Ladungskonjugation \mathcal{C} , der Partität \mathcal{P} und der Zeitinversion \mathcal{T} einzeln erhält. Das Produkt dieser Symmetrien lautet in der Weyl-Darstellung:

$$\mathcal{CPT} = (i\gamma^2\mathcal{K})(\gamma^0)(i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K}) = (i\gamma^2)(\gamma^0)(-i\gamma^1\gamma^3)$$

$$= \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i\gamma^5. \quad (29.5.4)$$

Es zeigt sich, daß beim Übergang von dem hier beschriebenen Modell der Dirac-Gleichung eines Teilchens mit minimaler Kopplung an die klassische Elektrodynamik zu einem quantisierten minimal-gekoppelten Dirac- und Maxwell-Feld die Symmetrien \mathcal{C} , \mathcal{P} und \mathcal{T} einzeln erhalten bleiben.

Im Rahmen der Quantenfeldtheorie (QFT) tauchte die Aussage, daß das Produkt \mathcal{CPT} in einer lorentzinvarianten und lokalen QFT, welche den Zusammenhang von Spin & Statistik berücksichtigt (d.h. Teilchen mit halbzahligen Spin: Fermionen-Operatoren, die an raumartigen Punkten antikommutieren, Teilchen mit ganzzahligem Spin: Bosonen-Operatoren, die an raumartigen Punkten kommutieren) zum ersten Mal implizit in einer Arbeit von J. Schwinger 1951 auf.

G. Lüders (1954) und W. Pauli (1955) veröffentlichten dann ausführlichere Beweise, so daß das \mathcal{CPT} -Theorem heute auch unter dem Namen Lüders-Pauli-Theorem bekannt ist. Diese Beweise stützen sich auf:

Lorentz-Invarianz, Kausalität, Lokalität, Vakuum (d.h. Existenz eines nach unten beschränkten Hamilton-Operators), S-Matrix-Theorie (d.h. Existenz wechselwirkungsfreier In-Out-Zustände). Eine moderne Darstellung des Lüders-Pauli-Beweises findet sich in Weinberg (1995a), S. 244 ff.

Etwas später veröffentlichte R. Jost (1957) einen etwas allgemeineren Beweis im Rahmen der axiomatischen QFT. Dieser Weg ist ausführlich in dem inzwischen klassischen Buch Streater u. Wightman (1969), S. 188 ff. (amerikanische Originalausgabe 1964) beschrieben. Allerdings ist der heutige Stand der Dinge, daß man mit diesen analytischen Axiomensystemen von Wightman, Haag-Kastler et al. letztlich nur relativ triviale QFT's beschreiben kann, wie die Konstruktionen von Segal, Glimm, Jaffe in den 1970'er Jahren gezeigt haben. Das Auffinden einer exakten mathematischen Basis für die Yang-Mills-QFTs des Standardmodells ist immer noch eine große ungelöste Frage und ein Millennium-Preis-Problem.

Im Jahr 1956 schlugen die Theoretiker Lee und Yang nach einer Analyse zahlreicher Experimente die Verletzung der Parität \mathcal{P} beim β -Zerfall der Schwachen Wechselwirkung vor, was 1957 experimentell eindeutig verifiziert werden konnte. Im Jahr 1964 konnten Cronin und Fitch die Verletzung von \mathcal{CP} im Zerfall von neutralen Kaonen, ebenfalls ein Prozeß der Schwachen Wechselwirkung, nachweisen.

Einige String-Theorien und die *Loop-Quantum-Gravity* (LQG) postulieren eine Verletzung von \mathcal{CPT} auf raumzeitlich deutlich kleineren Skalen als sie heute experimentell zugänglich sind.

29.6 Majorana-Spinoren

Wir hatten soeben gesehen, daß die Ladungskonjugation \mathcal{C} den Übergang von einem geladenen Teilchen zu seinem Antiteilchen vermittelt, also etwa von einem Elektron zu

einem Positron. Wenn wir es mit ungeladenen Dirac-Teilchen zu tun haben, dann muß also für dessen Dirac-Spinor $\mathcal{C}\psi = \psi$ gelten.

In der Weyl-Darstellung hatten wir für \mathcal{C} erhalten

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_0 \mathcal{K} := i\gamma^2 \mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Komplexbijugation}, \quad (29.6.1)$$

$$\mathcal{C}_0 = i\gamma^2 = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & +\sigma_2 \\ -\sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.6.2)$$

Aus $\mathcal{C}\psi = \psi$ mit $\psi^T = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, \psi_{R,1}, \psi_{R,2})$ folgt

$$(\psi_{R,2}^*, -\psi_{R,1}^*, -\psi_{L,2}^*, \psi_{L,1}^*) = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, \psi_{R,1}, \psi_{R,2}),$$

also

$$\psi_{R,1} = -\psi_{L,2}^*, \quad \psi_{R,2} = \psi_{L,1}^*.$$

Damit kann man den Majorana-Spinor schreiben als

$$\psi^T = (\psi_{L,1}, \psi_{L,2}, -\psi_{L,2}^*, \psi_{L,1}^*). \quad (29.6.3)$$

Der Majorana-Spinor enthält also statt vier unabhängigen, komplexen Variablen nur noch zwei unabhängige, komplexe Variable, oder vier unabhängige reelle Variable. Wenn man für $\psi_{L,1} = \varphi_1 + i\varphi_2$ und $\psi_{L,2} = \varphi_3 + i\varphi_4$ mit reellen Variablen $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ schreibt, dann kann man den komplexen Majorana-Spinor ψ in einen reellen Majorana-Spinor φ umwandeln:

$$A\psi := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -i & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \\ -\varphi_3 + i\varphi_4 \\ \varphi_1 - i\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \varphi. \quad (29.6.4)$$

Wenn man zu dieser Darstellung übergeht, muß man natürlich auch die Diracschen Gamma-Matrizen γ^μ zu $A\gamma^\mu A^{-1}$ abändern, damit weiterhin die Dirac-Gleichung gültig ist.

29.7 Die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit

Im Jahr 1928 fand Dirac die später nach ihm benannte *Dirac-Gleichung* als eine relativistische, quantenmechanische Wellengleichung 1. Ordnung für Elektronen auf der

Grundlage von Spinoren. Bereits im Jahr 1929 veröffentlichten Fock (Fock (1929)) und Weyl (Weyl (1929)) unabhängig voneinander eine Erweiterung der Dirac-Gleichung auf gekümmerte differenzierbare Raumzeit-Mannigfaltigkeiten. Der Gedanke von Weyl und Fock liegt zunächst einmal nahe: wenn die Dirac-Spinoren Raumzeit-abhängige Felder sind, dann kann man lokal an jedem Raumzeit-Punkt mittels eines Vierbeins in ein lokales Koordinatensystem wechseln, wo dann eine gewöhnliche Dirac-Gleichung in einer Minkowski-Raumzeit vorliegt. Die Wirkung der Raumzeit-Krümmung auf die Spinoren zeigt sich dann in einem zusätzlichen *Zusammenhangs*-Term. Diese Konstruktion wollen wir zunächst hier nachvollziehen.

Die nachfolgenden Jahrzehnte haben dann aber gezeigt, daß es in diesem Zusammenhang weitere subtile Probleme gibt. Zunächst einmal stellt sich die Frage, ob man überhaupt auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit M Spinoren definieren kann, d.h. ob die Mannigfaltigkeit die Einführung einer *Spinstruktur* gestattet? Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, ob es die Mannigfaltigkeit erlaubt, die Kartenwechselfunktionen der lokalen $SO(3, 1)$ Lorentztransformationen auf deren Universelle Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C}) \simeq SPIN(3, 1)$, bzw. im euklidischen Fall $SO(4)$ auf $SPIN(4)$, zu liften.

Aus mathematischer Sicht kann man beweisen, daß bei einer orientierbaren Mannigfaltigkeit M im euklidischen Fall $SO(4)$ genau dann eine Spinstruktur existiert, wenn die zweite Stiefel-Whitney Kohomologie-Klasse $w_2(M)$ trivial ist (Nakahara (2003), S. 450 ff.). Speziell für die Sphäre S_m und den Torus Σ_g mit dem Genus g gilt:

$$w_2(S_m) = 1, \quad w_2(\Sigma_g) = 1,$$

d.h. beide erlauben eine euklidische Spinstruktur.

Aus physikalischer Sicht argumentieren Penrose u. Rindler (1984), S. 55, daß eine 'vernünftige' physikalische Forderung an eine orientierbare differenzierbare Raumzeit-Mannigfaltigkeit M mit den Kartenwechselfunktionen der $SO(3, 1)$ Lorentztransformationen die Nicht-Kompaktheit dieser Mannigfaltigkeit sein sollte, damit geschlossene zeitartige Trajektorien ausgeschlossen sind. Unter der Voraussetzung einer solchen Nicht-Kompaktheit von M hat nun Geroch im Jahr 1968 bewiesen, daß hinreichend und notwendig für die Existenz einer Spinstruktur auf M die globale Existenz eines Vierbein-Feldes ist.

Soweit so gut. Damit aber enden die Probleme der Dirac-Gleichung in einer gerümmten Raumzeit noch nicht. Bargmann (Bargmann (1932)), Pauli (Pauli (1936)) und später Kofink (Kofink (1949)) haben dann darauf hingewiesen, daß die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit noch zahlreiche weitere Freiheitsgrade enthalten kann, die auch das Energiespektrum der Dirac-Teilchen im Gravitationsfeld modifizieren können. Bis jetzt im Jahr 2023 reichten die experimentellen Möglichkeiten noch nicht aus, um solche Effekte zu messen, aber dies mag sich in naher Zukunft ändern und uns neue Einsichten über den Zusammenhang von Elementarteilchen-Physik und Gravitation vermitteln. Wir stellen am Ende dieses Unterkapitels kurz eine Einführung in diese Thematik anhand zweier Arbeiten von Arminjon und Reifler (Arminjon u. Reifler (2010), Arminjon u. Reifler (2013)) vor.

Zunächst aber der Gedankengang von Fock und Weyl.

Es seien an einem Punkt p der gekrümmten 4-dimensionalen Raumzeit M die Vektoren $\{\partial_\mu\}$ und $\{dx^\mu\}$ die Basen des Tangentialraums T_pM und des Kotangentialraums T_p^*M . Die Dirac-Matrizen seien nun Felder auf M , d.h. $\gamma^\mu = \gamma^\mu(p)$ mit $p \in M$. Lokal kann man mittels des Vierbeins e_a^μ , bzw. e^a_μ , (siehe 15.2.1 und 15.2.3) einen Minkowski-Raum mit den Orthonormalbasen $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ einführen:

$$e_a := e_a^\mu \partial_\mu, \quad \theta^a := e^a_\mu dx^\mu. \quad (29.7.1)$$

Damit geht man lokal am Punkt $p \in M$ von der Metrik $g_{\mu\nu}$ der gekrümmten Raumzeit zu einer Lorentz-Metrik η_{ab} über:

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}. \quad (29.7.2)$$

In Bezug auf diese Lorentz-Metrik definiert man jetzt die Diracschen Gamma-Matrizen:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} := \gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2\eta^{ab} \mathbb{1}. \quad (29.7.3)$$

Wir hatten in 29.3.20 für die Transformation eines Dirac-Spinors ψ gefunden:

$$\Sigma^{\mu\nu} := -\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

$$\psi' = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^{\rho\sigma}\Sigma_{\rho\sigma}\right)\psi.$$

Jetzt suchen wir eine kovariante Ableitung $\nabla_a\psi$, die sich sowohl als lokaler Lorentz-Vektor wie auch als Spinor transformieren soll, d.h. wir verlangen

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a{}^b\nabla_b\psi.$$

Daß dies möglich ist, zeigt der folgende Satz Wir folgen hier Nakahara (2003), S. 300 ff.

Satz 29.7.1 (Fock-Weyl) Die kovariante Ableitung $\nabla_a\psi$ mit dem Spin-Zusammenhang Ω_μ , bzw. dem Spintensor Σ_{ab} aus 29.3.18

$$\nabla_a\psi := e_a^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi := e_a^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu}{}^{a' b'}\Sigma_{a'b'})\psi \quad (29.7.4)$$

transformiert sich unter einer Lorentztransformation Λ sowohl als lokaler Lorentz-Vektor, wie auch als Spinor, d.h.

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a{}^b\nabla_b\psi. \quad (29.7.5)$$

Beweis: Sei Λ eine lokale Lorentztransformation der Form (siehe 26.7.13)

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^{ab}m_{[ab]}\right),$$

bzw. bei infinitesimalen λ^{ab} (siehe 26.7.14):

$$\Lambda^a_b = \delta^a_b + \lambda^a_b.$$

Die entsprechende Darstellung dieser Lorentztransformation im Raum der Dirac-Spinoren ist (29.3.20):

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}\right),$$

bzw. bei infinitesimalen λ^{ab} :

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}.$$

Wir machen den Ansatz

$$\nabla_a\psi := e_a^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi$$

und fragen zunächst nach dem Transformationsverhalten von $e_a^\mu\partial_\mu\psi$:

$$(e_a^\mu\partial_\mu\psi)' = \Lambda_a^b e_b^\mu\partial_\mu(\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi) = \Lambda_a^b e_b^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi).$$

Für $e_a^\mu\Omega_\mu\psi$ als Vierervektor und Spinor ergibt sich:

$$(e_a^\mu\Omega_\mu\psi)' = \Lambda_a^b e_b^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi.$$

Damit folgt für $(\nabla_a\psi)$:

$$(\nabla_a\psi)' = \Lambda_a^b e_b^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) + \Lambda_a^b e_b^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi$$

Mit der Forderung, daß sich $(\nabla_a\psi)$ folgendermaßen transformieren soll

$$(\nabla_a\psi)' \stackrel{!}{=} \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a^b\nabla_b\psi$$

folgt also

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a^b\nabla_b\psi = \Lambda_a^b e_b^\mu((\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi) + \Lambda_a^b e_b^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Lambda_a^b e_b^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi &= \Lambda_a^b e_b^\mu(\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\psi + \tilde{\Lambda}(\Lambda)\partial_\mu\psi \\ &\quad + \Lambda_a^b e_b^\mu\Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)\psi \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{\Lambda}(\Lambda)\Omega_\mu = (\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda) + \Omega'_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda)) \Rightarrow$$

$$\Omega'_\mu = \tilde{\Lambda}(\Lambda)\Omega_\mu\tilde{\Lambda}^{-1}(\Lambda) - (\partial_\mu\tilde{\Lambda}(\Lambda))\tilde{\Lambda}^{-1}(\Lambda).$$

Mit einer infinitesimalen Transformation $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ wird dies zu

$$\begin{aligned}\Omega'_\mu &= (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab})\Omega_\mu(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}) \\ &\quad - (\partial_\mu\frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab})(\mathbb{1} - \frac{1}{2}\lambda^{ab}\Sigma_{ab}) \\ &\simeq \Omega_\mu + \frac{1}{2}\lambda^{ab}[\Sigma_{ab}, \Omega_\mu] - \frac{1}{2}\partial_\mu\lambda^{ab}\Sigma_{ab}.\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß sich $\frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}$ unter einer infinitesimalen Transformation $\tilde{\Lambda}(\Lambda)$ genauso wie Ω_μ transformiert. Für die Cartansche Zusammenhangs-1-Form $\omega^a{}_b$ (15.9.1) hatten wir das folgende Transformationsverhalten gefunden (15.10.13):

$$\omega' = \Lambda\omega\Lambda^{-1} - d\Lambda \cdot \Lambda^{-1},$$

und mit einer infinitesimalen Transformation Λ (siehe 26.7.14)

$$\Lambda_b^a \simeq \delta_b^a + \lambda_b^a$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned}(\omega')^a{}_b &= (\delta_c^a + \lambda_c^a)\omega^c{}_d(\delta_b^d - \lambda_b^d) - d\lambda^a{}_d \cdot (\delta_b^d - \lambda_b^d) \\ &\simeq \omega^a{}_b + \lambda_c^a\omega^c{}_b - \omega^a{}_d\lambda_b^d - d\lambda_b^a.\end{aligned}$$

Von der Zusammenhangs-1-Form $\omega^a{}_b$ kann man zu den Zusammenhangs-Koeffizienten $\Gamma^a{}_{\mu b}$ übergehen

$$\omega^a{}_b =: \Gamma^a{}_{\mu b} dx^\mu.$$

Für diese Zusammenhangs-Koeffizienten Γ gilt dann folgendes Transformationsverhalten:

$$(\Gamma^a{}_{\mu b})' = \Gamma^a{}_{\mu b} + \lambda_c^a\Gamma^c{}_{\mu b} - \Gamma^a{}_{\mu c}\lambda_b^c - d\lambda_b^a.$$

Und damit folgt für $\frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}$:

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab})' &= \frac{1}{2}(\Gamma_\mu^a{}^b)'\Sigma_{ab} \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab} + \lambda_c^a\Gamma_\mu^c{}^b\Sigma_{ab} - \Gamma_\mu^a{}^c\lambda_b^c\Sigma_{ab} - (d\lambda^{ab})\Sigma_{ab}).\end{aligned}$$

Nun ist Σ_{ab} eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, 1)$, siehe 29.3.19, und erfüllt daher die Kommutatorrelation:

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} - \eta_{bd}\Sigma_{ac} + \eta_{ad}\Sigma_{bc} .$$

Daraus ergibt sich mit $\lambda^{ab} = -\lambda^{ba}$ und $\Sigma_{ab} = -\Sigma_{ba}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda^{ab}[\Sigma_{ab}, \frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{cd}] &= \frac{1}{4}\lambda^{ab}\Gamma_{\mu}^c d[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] \\ &= \frac{1}{4}\lambda^{ab}\Gamma_{\mu}^c d(\eta_{bc}\Sigma_{ad} - \eta_{ac}\Sigma_{bd} - \eta_{bd}\Sigma_{ac} + \eta_{ad}\Sigma_{bc}) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ad} - \lambda^{ab}\eta_{ac}\Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{bd} \\ &\quad - \lambda_d^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ac} + \lambda^{ab}\eta_{ad}\Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{bc}) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ad} + \lambda_c^b \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{bd} \\ &\quad - \lambda_d^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ac} - \lambda_d^b \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{bc}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ad} - \lambda_d^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ac}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ad} - \Gamma_{\mu}^a d\lambda_c^b \Sigma_{ba}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{ad} - \Gamma_{\mu}^a{}^c \lambda_c^b \Sigma_{ba}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_c^a \Gamma_{\mu}^c{}^b \Sigma_{ab} - \Gamma_{\mu}^a{}^c \lambda_c^b \Sigma_{ab}) . \end{aligned}$$

Damit können wir also $(\frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab})'$ schreiben als

$$(\frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab})' = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab} + \lambda^{ab}[\Sigma_{ab}, \frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^c d\Sigma_{cd}] - (d\lambda^{ab})\Sigma_{ab})$$

und damit transformiert sich

$$\frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab} \quad \text{ebenso wie} \quad \Omega_{\mu} . \quad \square$$

Anmerkung-1: die kovariante Ableitung eines Tangential-Vektors $(\nabla_{\mu} Y)^{\lambda}$ mit einem Raumzeit-Index λ beim Vorliegen eines metrisch-affinen Zusammenhangs lautet ja bekannterweise (15.5.10, 15.11.7):

$$\omega^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K^{\kappa}{}_{\mu\nu} \quad \text{Christoffelsymbol} + \text{Kontorsionstensor} , \quad (29.7.6)$$

$$(\nabla_\mu Y)^\lambda = \partial_\mu Y^\lambda + \omega^\lambda_{\mu\nu} Y^\nu . \quad (29.7.7)$$

Entsprechend ergibt sich die kovariante Ableitung eines Spinors $(\nabla_\mu \psi)^\lambda$ mit einem Spinorindex λ beim Vorliegen eines Spin-Zusammenhangs Ω_μ als:

$$(\nabla_\mu \psi)^\lambda = \partial_\mu \psi^\lambda + \Omega^\lambda_{\nu\mu} \psi^\nu . \quad (29.7.8)$$

Anmerkung-2: wir haben an die Zusammenhangs-Koeffizienten $\Gamma^a_\mu{}^b$ keine weiteren Forderungen gestellt, insbesondere können sie also neben der Krümmung auch eine Torsion der Raumzeit beschreiben. Da aber Σ_{ab} antisymmetrisch ist, spielt also im Spin-Zusammenhang Ω_μ nur der antisymmetrische Teil von $\Gamma^a_\mu{}^b$ eine Rolle, d.h.

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma^a_\mu{}^b \Sigma_{ab} = \frac{1}{4} \Gamma^{[a}_\mu{}^{b]} \Sigma_{ab} . \quad (29.7.9)$$

Mit Hilfe dieser kovarianten Ableitung können wir jetzt die Lagrangefunktion \mathcal{L}_{FW} (siehe 29.4.7, 29.4.8) und die Wirkungsfunktion \mathcal{S}_{FW} in einer gekrümmten Raumzeit formulieren:

$$\mathcal{L}_{FW} = \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu - mc^2) \psi \quad \text{mit} \quad (29.7.10)$$

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu) , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma^a_\mu{}^b \Sigma_{ab} , \quad (29.7.11)$$

bzw. mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{FW} = \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu - mc^2) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad (29.7.12)$$

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu) , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma^a_\mu{}^b \Sigma_{ab} . \quad (29.7.13)$$

$$\mathcal{S}_{FW} = \int_M \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x . \quad (29.7.14)$$

Der Differential-Operator in \mathcal{L}_{FW} heißt der Dirac-Operator in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit:

$$i\hbar c \not{\nabla} := i\hbar c \gamma^\mu \nabla_\mu = i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu , \quad (29.7.15)$$

und die Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit folgt jetzt aus der Funktionalableitung $\delta \mathcal{S}_{FW} / \delta \bar{\psi} \stackrel{!}{=} 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{FW}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{FW}}{\partial \bar{\psi}_\mu} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad (29.7.16)$$

$$(i\hbar c \gamma^\mu \nabla_\mu - mc^2) \psi = (i\hbar c \gamma^a e_a{}^\mu \nabla_\mu - mc^2) \psi \stackrel{!}{=} 0 . \quad (29.7.17)$$

Nun zur Frage der zusätzlichen Freiheitsgrade der Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit nach Bargmann (1932), Pauli (Pauli (1936)) und Kofink (Kofink (1949)). Dabei orientieren wir uns an den folgenden zwei Arbeiten von Arminjon und Reifler (Arminjon u. Reifler (2010), Arminjon u. Reifler (2013)).

Zunächst hatten wir mit Fock-Weyl gesehen, daß wir die Wirkung der Raumkrümmung auf die Dirac-Spinoren durch eine kovariante Ableitung ausdrücken können:

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu + \Omega_\mu) \psi \quad \text{mit } \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^{a' b'} \Sigma_{a' b'} , \quad \text{bzw.}$$

$$\nabla_a \psi := e_a^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu) \psi \quad \text{mit } e_a^\mu \Omega_\mu = e_a^\mu \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^{a' b'} \Sigma_{a' b'} .$$

Im Folgenden lassen wir der Einfachheit halber die Lokalisierung mittels des Vierbeins e_a^μ , bzw. e^μ_a , fort, d.h. wir tun so, als ob wir die ganze Mannigfaltigkeit M mit nur einer Karte lokaler Koordinaten beschreiben könnten. Die nachträgliche Einfügung lokaler Koordinaten mittels des Vierbeins e_a^μ geschieht bei Bedarf genau wie oben.

In der Diskussion der Dirac-Gleichung in der Minkowski-Raumzeit hatten wir gesehen, daß $\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi$ eine Lorentz-Skalar ist und $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$ ein Lorentz-Vierervektor (siehe: 29.2.4). Der Gedanke von Pauli war jetzt, daß man in diesen Ausdrücken die Hermitizität herstellende Matrix γ^0 durch eine beliebige hermitesche Matrix A gleicher Dimension mit der folgenden Definition ersetzen kann

$$A^\dagger := A \quad \text{und} \quad (A \gamma^\mu)^\dagger := A \gamma^\mu \quad \text{und} \quad \nabla_\mu A = \partial_\mu A \quad \text{und} \quad \overline{\nabla_\mu \psi} := (\nabla_\mu \psi)^\dagger A . \quad (29.7.18)$$

Offensichtlich erfüllt γ^0 all diese Forderungen an A . Auch A ist jetzt aber bezüglich der gekrümmten Raumzeit ein Feld, d.h. $A = A(p)$ mit $p \in M$. In der Minkowski-Raumzeit ist $A = \gamma^0$ ein Lorentz-Skalar.

Der erste Schritt der Verallgemeinerung für die gekrümmte Raumzeit ist jetzt die Definition einer kovarianten Ableitung ∇_μ unter Berücksichtigung der Spinorindizes, hier am Beispiel von $(\gamma^\nu)^\rho_\sigma$. Dabei sind μ, ν Raumzeitindizes, ρ, σ sind Spinorindizes und $\omega^\nu_{\lambda\mu}$ ist der Tensor des metrisch-affinen Riemannschen Zusammenhangs (inkl. einer evtl. Torsion, siehe 15.11.7):

$$\begin{aligned} (\nabla_\mu \gamma^\nu)^\rho_\sigma &= \partial_\mu (\gamma^\nu)^\rho_\sigma + \omega^\nu_{\lambda\mu} (\gamma^\lambda)^\rho_\sigma + \Omega^\rho_{\lambda\mu} (\gamma^\nu)^\lambda_\sigma - \Omega^\lambda_{\sigma\mu} (\gamma^\nu)^\rho_\lambda \\ &= \partial_\mu (\gamma^\nu)^\rho_\sigma + \omega^\nu_{\lambda\mu} (\gamma^\lambda)^\rho_\sigma + \Omega^\rho_{\lambda\mu} (\gamma^\nu)^\lambda_\sigma - (\gamma^\nu)^\rho_\lambda \Omega^\lambda_{\sigma\mu} \\ &= \{ \partial_\mu (\gamma^\nu) + \omega^\nu_{\lambda\mu} (\gamma^\lambda) + [\Omega_\mu, \gamma^\nu] \}^\rho_\sigma . \end{aligned} \quad (29.7.19)$$

Bereits für das Fock-Weyl Modell hat man ja gefordert, daß die Diracschen γ^ν -Matrizen kovariant konstant sein sollen!

$$\nabla_\mu \gamma^\nu \stackrel{!}{=} 0 . \quad (29.7.20)$$

Die Größe $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger A\psi$ soll ein Spinor-Skalar sein, d.h.

$$\nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) \stackrel{!}{=} \partial_\mu(\bar{\psi}\psi) \quad \Rightarrow \quad (29.7.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\bar{\psi}\psi) &= \nabla_\mu(\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}\nabla_\mu(\psi) \\ &= (\nabla_\mu(\psi))^\dagger A\psi + \bar{\psi}\nabla_\mu(\psi) \\ &= ((\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi)^\dagger A\psi + \bar{\psi}(\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi \\ &= \partial_\mu(\bar{\psi}\psi) + \psi^\dagger A A^{-1} \Omega_\mu^\dagger A\psi + \bar{\psi}\Omega_\mu\psi \\ &= \partial_\mu(\bar{\psi}\psi) + \bar{\psi} A^{-1} \Omega_\mu^\dagger A\psi + \bar{\psi}\Omega_\mu\psi \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Omega_\mu = -A^{-1} \Omega_\mu^\dagger A \quad \Rightarrow \quad (29.7.22)$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \nabla_\mu A &= \partial_\mu A = \partial_\mu A + A\Omega_\mu - A\Omega_\mu = \partial_\mu A + A(-A^{-1} \Omega_\mu^\dagger A) - A\Omega_\mu \\ &= \partial_\mu A - A\Omega_\mu - \Omega_\mu^\dagger A . \end{aligned} \quad (29.7.23)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \overline{\nabla_\mu(\psi)} &= (\nabla_\mu\psi)^\dagger A = ((\partial_\mu + \Omega_\mu)\psi)^\dagger A = ((\partial_\mu - A^{-1} \Omega_\mu^\dagger A)\psi)^\dagger A \\ &= (\partial_\mu\psi^\dagger)A - \psi^\dagger A\Omega_\mu A^{-1} A = (\partial_\mu\bar{\psi}) - \bar{\psi}\Omega_\mu . \end{aligned} \quad (29.7.24)$$

Den Ausdruck $j^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ für den Strom der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte verallgemeinert man zu:

$$j^\mu := \psi^\dagger A\gamma^\mu\psi = \psi^\dagger B^\mu\psi \quad \text{mit } B := A\gamma^\mu . \quad (29.7.25)$$

Dies ist jetzt ein *Spinor-Vierervektor*.

$$\begin{aligned} \nabla_\mu j^\mu &= \nabla_\mu(\psi^\dagger A\gamma^\mu\psi) = \nabla_\mu(\psi^\dagger B^\mu\psi) \\ &= (\nabla_\mu\psi^\dagger)B^\mu\psi + \psi^\dagger(\nabla_\mu B^\mu)\psi + \psi^\dagger B^\mu(\nabla_\mu\psi) . \end{aligned} \quad (29.7.26)$$

Für den mittleren Term auf der rechten Seite mit $\nabla_\mu B^\mu$ ergibt sich wie oben - dabei sind μ, ν Raumzeitindizes, ρ, σ sind Spinorindizes und $\omega^\nu{}_{\lambda\mu}$ ist der Tensor des metrisch-affinen Riemannschen Zusammenhangs (inkl. einer evtl. Torsion, siehe 15.11.7):

$$(\nabla_\mu B^\mu)_{\rho\sigma} = \partial_\mu(B^\mu)_{\rho\sigma} + \omega^\mu{}_{\lambda\mu}(B^\lambda)_{\rho\sigma} - \Omega^\lambda{}_{\rho\mu}(B^\mu)_{\lambda\sigma} - \Omega^\lambda{}_{\sigma\mu}(B^\mu)_{\rho\lambda} . \quad (29.7.27)$$

Interessant ist es jetzt, sich die kovariante Ableitung $\nabla_\mu j^\mu$ noch genauer anzuschauen. Da die Matrizen A und B hermitesch sind folgt für den ersten Term von $\nabla_\mu j^\mu$:

$$(\nabla_\mu \psi^\dagger) B^\mu \psi = (B^\mu \nabla_\mu \psi)^\dagger \psi = (A \gamma^\mu \nabla_\mu \psi)^\dagger \psi = (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi)^\dagger A \psi .$$

Falls jetzt die oben abgeleitete Dirac-Gleichung 29.7.17

$$(\gamma^\mu \nabla_\mu + \frac{imc}{\hbar}) \psi = 0$$

gültig ist, so folgt daraus für die Summe aus dem ersten und dritten Term von $\nabla_\mu j^\mu$:

$$(\gamma^\mu \nabla_\mu \psi)^\dagger A \psi + \psi^\dagger A (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi) = \frac{imc}{\hbar} \psi^\dagger A \psi + \psi^\dagger A (-\frac{imc}{\hbar} \psi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla_\mu j^\mu = \psi^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi . \quad (29.7.28)$$

Das heißt, genau dann, wenn die Dirac-Gleichung 29.7.17 gültig ist und zusätzlich $\nabla_\mu B^\mu = 0$ gilt, kommt es bei Fock-Weyl mit der Erweiterung der Matrizen A und B nach Bargmann-Pauli-Kofink (BPK) zu einer Erhaltung des Stroms der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte j^μ .

Nun kann man die oben hergeleitete Lagrange-Funktion \mathcal{L}_{FW} aus 29.7.10 unter Einbeziehung von A und B zu einer hermiteschen Lagrange-Funktion \mathcal{L}_{BPK} verallgemeinern.

Definition 29.7.3 (Kovariante Euler-Lagrange-Gleichung) *Die Dirac-Lagrange-Funktionen \mathcal{L}_{FW} und \mathcal{L}_{BPK} sind beide aufgrund der Konstruktion invariant unter Transformationen der Lorentzgruppe $SO(3,1)$, bzw. deren Universeller Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C}) \simeq SPIN(3,1)$. Sind zunächst nicht invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen. Wenn man nun die Dirac-Gleichung als eine Euler-Lagrange-Gleichung aus den Lagrange-Funktionen \mathcal{L}_{FW} und \mathcal{L}_{BPK} ableiten möchte bei gleichzeitiger Kovarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen, dann fordert man eine verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichung mit kovarianten Ableitungen anstelle der gewöhnlichen Ableitungen.*

$$\mathcal{L}(\phi, \nabla_\mu \phi) ,$$

$$\mathcal{S} = \int_M \sqrt{-g_{det}} \mathcal{L} d^4 x ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \stackrel{!}{=} 0 .$$

Für das folgende Beispiel benötigen wir zwei Beziehungen zwischen der Metrik g und deren Determinante g_{det} und den Christoffel-Symbolen eines metrisch-affinen Zusammenhangs, die wir in folgendem Lemma zusammenfassen. Siehe auch 15.11 und dort speziell 15.11.8:

Lemma 29.7.4

$$1. \partial_\rho g_{det} = g_{det} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} ,$$

$$2. \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \nu\mu \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} \partial_\mu \sqrt{-g_{det}} .$$

Beweis: 1. Für diese Behauptung nutzt man die Beziehung $\ln(g_{det}) = \ln(\det g_{\mu\nu}) = \text{tr}(\ln g_{\mu\nu})$ aus, die man für diagonale Matrizen $g_{\mu\nu}$ sofort verifizieren kann, und da $g_{\mu\nu}$ symmetrisch ist und nur innerhalb einer Determinante oder Spur vorkommt, darf man hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einem diagonalen $g_{\mu\nu}$ ausgehen. Auf der linken Seite von $\ln(g_{det}) = \text{tr}(\ln g_{\mu\nu})$ erhalten wir:

$$\partial_\rho(\ln g_{det}) = \frac{1}{g_{det}} \partial_\rho g_{det}$$

und auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \partial_\rho(\text{tr}(\ln g_{\mu\nu})) &= \text{tr}(\partial_\rho \ln g_{\mu\nu}) = \text{tr}\left(\sum_\kappa (g^{-1})_{\mu\kappa} \partial_\rho g_{\kappa\nu}\right) \\ &= \text{tr}(g^{\mu\kappa} \partial_\rho g_{\kappa\nu}) = g^{\nu\kappa} \partial_\rho g_{\kappa\nu} = g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{g_{det}} \partial_\rho g_{det} = g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \partial_\rho g_{det} = g_{det} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} .$$

2.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \nu\mu \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_\mu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \frac{1}{2} (g^{\nu\lambda} \partial_\nu g_{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda} \partial_\lambda g_{\nu\mu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \frac{1}{2} (g^{\nu\lambda} \partial_\nu g_{\mu\lambda} - g^{\lambda\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \frac{1}{2g_{det}} (g_{det} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2g_{det}} \partial_\mu g_{det} = \frac{1}{2(-g_{det})} \partial_\mu (-g_{det}) = \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} \partial_\mu \sqrt{-g_{det}} . \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: An dem folgenden Beispiel mit einem skalaren Feld ϕ kann man sehen, daß diese Definition sinnvoll ist. Wir zeigen hier nur den einfachsten Fall einer Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Eine ausführlichere Darstellung unter Einbeziehung der Zusatzterme lokaler Eichgruppen in die Lagrange-Funktion \mathcal{L} findet sich z.B. der Arbeit von

Lewis (2009).

$$\mathcal{S} = \int_M \sqrt{-g_{det}} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x .$$

Da in unserem Beispiel das Feld ϕ ein skalares Feld ist gilt $\partial_\mu \phi = \nabla_\mu \phi$. Die normale Euler-Langrange-Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sqrt{-g_{det}} \mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial(\sqrt{-g_{det}} \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-g_{det}} \partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\sqrt{-g_{det}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{-g} \partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \partial_\mu (\sqrt{-g_{det}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \sqrt{-g_{det}} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\ &= \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \frac{1}{\sqrt{-g_{det}}} \partial_\mu (\sqrt{-g_{det}}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \\ &= \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \left(\partial_\mu + \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \nu \mu \end{array} \right\} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \\ &= \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial(\mathcal{L})}{\partial \phi} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu \phi)} \stackrel{!}{=} 0 . \quad \square \end{aligned}$$

Satz 29.7.7 (Bargmann-Pauli-Kofink)

$$\mathcal{L}_{BPK} = \frac{i}{2} \hbar c [\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\overline{\nabla_\mu \psi}) \gamma^\mu \psi] - mc^2 \bar{\psi} \psi \quad (29.7.29)$$

$$= \frac{i}{2} \hbar c [\psi^\dagger A \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \psi^\dagger) A \gamma^\mu \psi] - mc^2 \psi^\dagger A \psi , \quad \text{mit} \quad (29.7.30)$$

$$\nabla_\mu := (\partial_\mu + \Omega_\mu) , \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab} , \quad (29.7.31)$$

$$\mathcal{S}_{BPK} = \int_M \sqrt{-g} \mathcal{L}_A d^4x . \quad (29.7.32)$$

Die Funktionalableitung $\delta \mathcal{S}_{BPK} / \delta \psi^\dagger \stackrel{!}{=} 0$ als kovariante Euler-Lagrange-Gleichung lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{BPK}}{\partial \psi^\dagger} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{BPK}}{\partial(\nabla_\mu \psi^\dagger)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (29.7.33)$$

und daraus folgt eine verallgemeinerte Dirac-Gleichung:

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{2} A^{-1} (\nabla_\mu B^\mu) \psi + i \frac{mc}{\hbar} \psi = 0, \quad \text{mit } B^\mu := A \gamma^\mu. \quad (29.7.34)$$

Wenn $\nabla_\mu B^\mu = \nabla_\mu (A \gamma^\mu) = 0$ ist ergibt sich wieder die gewöhnliche Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit:

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi + i \frac{mc}{\hbar} \psi = 0.$$

Beweis:

$$\mathcal{L}_{BPK} = \frac{i}{2} \hbar c [\psi^\dagger A \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - (\nabla_\mu \psi^\dagger) A \gamma^\mu \psi] - mc^2 \psi^\dagger A \psi.$$

Aus der Funktionalableitung $\delta S_{BPK} / \delta \psi^\dagger \stackrel{!}{=} 0$ folgt die verallgemeinerte Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{BPK}}{\partial \psi^\dagger} - \nabla_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{BPK}}{\partial (\nabla_\mu \psi^\dagger)} &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \\ 0 &= \frac{i}{2} \hbar c A \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - mc^2 A \psi + \frac{i}{2} \hbar c \nabla_\mu (A \gamma^\mu \psi) \quad \Rightarrow \\ 0 &= \frac{1}{2} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{2} A^{-1} \nabla_\mu (A \gamma^\mu) \psi + \frac{1}{2} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{imc}{\hbar} \psi \\ &= \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{2} A^{-1} \nabla_\mu (A \gamma^\mu) \psi + \frac{imc}{\hbar} \psi \\ &= \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{2} A^{-1} (\nabla_\mu B) \psi + \frac{imc}{\hbar} \psi. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 29.7.9 Jetzt kann man diese verallgemeinerte Dirac-Gleichung in einer gekrümmten Raumzeit physikalisch auch dadurch charakterisieren, daß sie die Übergangswahrscheinlichkeits-Stromdichte zwischen zwei Lösungen ψ_1 und ψ_2 von 29.7.34 erhält, d.h.

$$\nabla_\mu K^\mu(\psi_1, \psi_2) := \nabla_\mu (\psi_1^\dagger B^\mu \psi_2) = 0. \quad (29.7.35)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu K^\mu(\psi_1, \psi_2) &= \nabla_\mu (\psi_1^\dagger B^\mu \psi_2) \\ &= (\nabla_\mu \psi_1^\dagger) B^\mu \psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger B^\mu (\nabla_\mu \psi_2) \\ &= (\nabla_\mu \psi_1^\dagger) (B^\mu)^\dagger \psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A \gamma^\mu (\nabla_\mu \psi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\nabla_\mu \psi_1^\dagger)(A\gamma^\mu)^\dagger \psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A\gamma^\mu (\nabla_\mu \psi_2) \\
&= (\nabla_\mu \psi_1^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger A^\dagger \psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A\gamma^\mu (\nabla_\mu \psi_2) \\
&= (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi_1^\dagger) A \psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A (\gamma^\mu \nabla_\mu \psi_2) .
\end{aligned}$$

Da ψ_1 und ψ_2 Lösungen der verallgemeinerten Dirac-Gleichung 29.7.34 sind folgt mit der Abkürzung $C := -\frac{1}{2}A^{-1}(\nabla_\mu B)$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu K^\mu(\psi_1, \psi_2) &= (C\psi_1 - \frac{imc}{\hbar}\psi_1)^\dagger A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A(C\psi_2 - \frac{imc}{\hbar}\psi_2) \\
&= (C\psi_1)^\dagger A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A(C\psi_2) \\
&= \psi_1^\dagger C^\dagger A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger AC\psi_2 \\
&= \psi_1^\dagger (-\frac{1}{2}A^{-1}(\nabla_\mu B))^\dagger A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 + \psi_1^\dagger A(-\frac{1}{2}A^{-1}(\nabla_\mu B))\psi_2 \\
&= -\frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\dagger)(A^{-1})^\dagger A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B)\psi_2 \\
&= -\frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\dagger)A^{-1}A\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B)\psi_2 \\
&= -\frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\dagger)\psi_2 + \psi_1^\dagger (\nabla_\mu B^\mu) \psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1^\dagger (\nabla_\mu B)\psi_2 \\
&= 0 . \quad \square
\end{aligned}$$

Dies bedeutet nun, daß für die verallgemeinerte Dirac-Gleichung 29.7.34 auch die Erhaltung des Stroms der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte j^μ gilt, denn mit 29.7.25 folgt:

$$\nabla_\mu j^\mu = \nabla_\mu (\psi^\dagger B^\mu \psi) = \nabla_\mu K^\mu(\psi, \psi) = 0 .$$

Insofern ist die Erweiterung auf die verallgemeinerte Dirac-Gleichung 29.7.34 konsistent.

In der Festkörper-Physik verwendet man zur Beschreibung der Periodizität eines Kristallgitters *periodische Randbedingungen* (Born-von-Kármán-Modell), und damit wird die zugrunde liegende $2l$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M zu einem Torus $T^{2l} = S^1 \times \dots \times S^1$. Interessant ist nun, daß in zeitunabhängigen 2-dimensionalen Systemen in der Lagrange-Funktion \mathcal{L}_{BPK} der Raumkrümmungsterm $\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab}$ mit dem Spintensor Σ_{ab} wegfällt!

Nebenbei: diese Tatsache ist dem Autor erst aufgefallen, als er sich mit der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung bei 2-dimensionalem Graphen in der Nähe der 'Dirac-Punkte' beschäftigt und dort den einem Torus entsprechenden Raumkrümmungsterm Ω_μ mit dem Spintensor Σ_{ab} in allen theoretischen Arbeiten ohne jeglichen Kommentar vermißt hat :-)

Lemma 29.7.11 Die Lagrangefunktion \mathcal{L}_{BPK} sei in der folgenden Form gegeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BPK} &= \frac{i}{2}\hbar c[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\overline{\nabla_\mu\psi})\gamma^\mu\psi] - mc^2\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\hbar c[\psi^\dagger A\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\nabla_\mu\psi^\dagger)A\gamma^\mu\psi] - mc^2\psi^\dagger A\psi, \\ \text{mit } \nabla_\mu &:= (\partial_\mu + \Omega_\mu), \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}.\end{aligned}$$

Bei stationären Lösungen in 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten fällt der Raumkrümmungsterm $\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}$ mit dem Spintensor Σ_{ab} weg.

Beweis: Bei stationären Lösungen der verallgemeinerten Dirac-Gleichung 29.7.34 in 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist wegen der Schiefsymmetrie von Σ_{ab} die einzige von Null verschiedene Komponente Σ_{12} .

$$\Omega_\mu = \frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}, \quad \Sigma_{ab} := -\frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b].$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BPK} &= \frac{i}{2}\hbar c[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\overline{\nabla_\mu\psi})\gamma^\mu\psi] - mc^2\bar{\psi}\psi \\ &= \frac{i}{2}\hbar c[\psi^\dagger A\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\nabla_\mu\psi^\dagger)A\gamma^\mu\psi] - mc^2\psi^\dagger A\psi \\ &= \frac{i}{2}\hbar c[\psi^\dagger A\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + \Omega_\mu\psi) - (\partial_\mu\psi^\dagger - \psi^\dagger A\Omega_\mu A^{-1})A\gamma^\mu\psi] - mc^2\psi^\dagger A\psi \\ &= \frac{i}{2}\hbar c[\psi^\dagger A\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\psi^\dagger)A\gamma^\mu\psi \\ &\quad + \psi^\dagger A\gamma^\mu\Omega_\mu\psi + \psi^\dagger A\Omega_\mu\gamma^\mu\psi] - mc^2\psi^\dagger A\psi \\ &= \frac{i}{2}\hbar c[\psi^\dagger A\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\psi^\dagger)A\gamma^\mu\psi + \psi^\dagger A\{\gamma^\mu, \Omega_\mu\}\psi] - mc^2\psi^\dagger A\psi.\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir den Term $\{\gamma^\mu, \Omega_\mu\}$ genauer:

$$\{\gamma^\mu, \Omega_\mu\} = \{\gamma^\mu, \frac{1}{2}\Gamma_\mu^a{}^b\Sigma_{ab}\} = -\frac{1}{8}\Gamma_\mu^a{}^b\{\gamma^\mu, [\gamma_a, \gamma_b]\}.$$

Nun ist in 2 Dimensionen $\mu \in \{1, 2\}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\{\gamma^1, [\gamma_1, \gamma_2]\} &= \{\gamma^1, (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1)\} \\ &= \gamma^1\gamma_1\gamma_2 - \gamma^1\gamma_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\gamma^1 - \gamma_2\gamma_1\gamma^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma^2, [\gamma_1, \gamma_2]\} &= \{\gamma^2, (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1)\} \\
&= \gamma^2\gamma_1\gamma_2 - \gamma^2\gamma_2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2\gamma^2 - \gamma_2\gamma_1\gamma^2 \\
&= 0 .
\end{aligned}
\quad \square$$

Und damit ist in der Langrangefunktion \mathcal{L}_{BPK} der Raumkrümmungsterm $\psi^\dagger A\{\gamma^\mu, \Omega_\mu\}\psi = 0$.

29.8 Elliptische lineare partielle Differential-Operatoren

Aufgrund der Minkowski-Metrik ist $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ ein hyperbolischer linearer Differentialoperator. Da man über elliptische lineare Differentialoperatoren aber wesentlich mehr weiß, als über hyperbolische, haben sich viele Physiker für das *Euklidische Programm* entschieden: durch analytische Fortsetzung der Zeit x^0 ins Komplexe zu $x_E^0 := ix^0$, eine sog. Wick-Rotation, ergibt sich:

$$ds^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \Rightarrow \quad ds_E^2 = +(x_E^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 .$$

Statt in der Minkowski-Raumzeit rechnet man also im 4-dimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{E}^4 , statt der nichtkompakten Lorentz-Gruppe $O(3, 1)$ benutzt man die kompakte Gruppe $O(4)$, und statt des hyperbolischen d'Alembert-Operators $\square f = \partial^\mu \partial_\mu f = 0$, der eine Wellengleichung beschreibt, den 4-dimensionalen elliptischen Laplace-Operator $\square_E f = \partial_E^\mu \partial_{E\mu} f = 0$, der eine Potentialgleichung beschreibt. Auch wenn dieses *Euklidische Programm* in der Störungstheorie des Standardmodells funktioniert sind aus mathematischer wie physikalischer Sicht ernsthafte Zweifel an diesem Vorgehen angebracht, insbesondere bei der Quantisierung der Gravitation (siehe etwa Penrose (2004), und insb. die Arbeiten von Renate Loll et al., z.B. in Guilini u. a. (2003)).

Da wir aber in diesem Manuskript den Zusammenhang zwischen Geometrie, Topologie und Festkörper-Physik beleuchten und dabei auch von den berühmten Atiyah-Singer-Indexsätzen als einer umfassenden Verallgemeinerung des Satzes von Gauß-Bonnet Gebrauch machen wollen, und da all diese tiefen Sätze eben nur für elliptische lineare Differential- und Pseudodifferential-Operatoren gelten, führen wir den elliptischen Dirac-Operator ein, sobald wir wissen, was denn ein elliptischer linearer partieller Differentialoperator (LPDO) genau ist. Wir fassen uns hier kurz, lassen die Pseudodifferential-Operatoren völlig beiseite und verweisen für eine ausführlichere Diskussion auf den Anhang *Pseudodifferential-Operatoren* in unserem Buch Schiekel (2019), aus dem wir hier auch einige einleitende Definitionen und Betrachtungen zitieren.

Eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M entspricht auf einer lokalen Karte einem n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n . Auf einer solchen lokalen Karte der Mannigfaltigkeit führt man für LPDOs der Ordnung d die übliche Multiindex-Schreibweise ein:

$$x := (x^1, \dots, x^n) ,$$

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!,$$

$$\beta \leq \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \beta_j \leq \alpha_j, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

$$D_{x^j} := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

$$D_x^\alpha := \prod_{j=1}^n D_{x^j}^{\alpha_j},$$

$$P(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^d a_\alpha(x) D_x^\alpha. \quad (29.8.1)$$

Für einen LPDO 2. Ordnung sieht das ausführlich aufgeschrieben so aus:

$$P(x, D) = a_0(x) + \sum_{j=1}^n a_1^j(x) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j,k=1}^n a_2^{jk}(x) (-1) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (29.8.2)$$

Hierbei wurde die Multiindex-Schreibweise vereinfacht zu:

$$a_0 := a_{|\alpha|=0} := a_{(0,\dots,0)},$$

$$a_1^j := a_{|\alpha|=1}^j := a_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)},$$

$$a_2^{jk} := a_{|\alpha|=2}^{jk} := \begin{cases} a_{(0,\dots,0,2,0,\dots,0)} & \text{für } j = k, \\ a_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0,1,0,\dots,0)} & \text{für } j \neq k. \end{cases}$$

Von diesem Typ ist z.B. der in der Physik häufig auftauchende Laplace-Operator

$$L_x = - \sum_{j,k=1}^n g^{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} - \sum_{j=1}^n p^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} - q(x). \quad (29.8.3)$$

Für das Differenzieren von Produkten von Funktionen in \mathbb{R}^n gilt eine verallgemeinerte Leibniz-Formel, die wie im gewöhnlichen Fall mittels vollständiger Induktion bewiesen wird. Seien α, β Multiindizes, dann ist:

$$D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_x^\beta f(x)) (D_x^{\alpha-\beta} g(x)). \quad (29.8.4)$$

Eine Standard-Methode der Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen (LPDGL) ist die Fouriertransformation, da sich hierdurch Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umwandeln lassen. Die üblichste Fouriertransformation ist eine Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist L^1 der Raum der Lebesgue-meßbaren komplex-wertigen Funktionen mit der 1-Norm, d.h. $\|f\|_1 = \int dt |f(t)|$, und C der Raum

der komplexwertigen stetigen Funktionen. Aus funktionalanalytischer Sicht ist es jedoch günstiger die Fouriertransformation als eine symmetrische Abbildung zwischen zwei gleichen Räumen zu definieren. Optimal ist dabei eine Einschränkung auf eine Teilmenge aus L^1 , den sog. Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nämlich den Teilraum der komplexwertigen glatten Funktionen, d.h. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Funktionen, die für $|x| \rightarrow \infty$ schneller als jedes Polynom in x abfallen:

Definition 29.8.1 Der Raum der schnellfallenden Funktionen (für $|x| \rightarrow \infty$) heißt Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid D_x^\alpha f(x) \leq C_{m,\alpha}(1 + |x|)^{-m}, \text{ für alle } m, \alpha\}. \quad (29.8.5)$$

Sei $P(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ ein LPDO der Ordnung d auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann kann man mittels der Fouriertransformation zur folgenden Darstellung von $P(x, D)$ gelangen:

$$\begin{aligned} (P(x, D)f)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \xi^\alpha \tilde{f}(\xi) d^n \xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) \tilde{f}(\xi) d^n \xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \tilde{f}(\xi) d^n \xi, \end{aligned} \quad (29.8.6)$$

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (29.8.7)$$

Der Einfachheit halber setzen wir $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ mit einer kompakten Menge K voraus. Wenn man nichtkompakte Mengen für x zulassen möchte, dann braucht man zusätzlich entsprechende Regularitätsbedingungen im Unendlichen.

Man nennt $\sigma(x, \xi)$ das *Symbol* des Operators $P(x, D)$. Dieses Symbol eines LPDO ist ein Polynom des Grades d in ξ . Der in ξ^d homogene Teil des Symbols, also $\sigma_H(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, heißt *Hauptteil* des Symbols.

Es zeigt sich, daß wesentliche Aussagen über eine LPDGL nur vom Hauptteil des Symbols abhängen! Wir stellen jetzt nur die einfache Definition der Elliptizität für LPDOs vor. Für die deutlich aufwändigere und mächtigere Definition der Elliptizität von Pseudo-DO verweisen wir wieder auf den Anhang *Pseudodifferential-Operatoren* in Schiekel (2019).

Definition 29.8.2 Das Symbol $\sigma(x, \xi)$ eines LPDO heißt *elliptisch*, wenn sein Hauptteil keine Nullstelle hat, d.h. wenn $|\sigma_H(x, \xi)| \geq 0$ für alle $x \in K$ und alle $|\xi| \neq 0$. Ein LPDO $P(x, D)$ heißt *elliptisch*, wenn sein Symbol $\sigma(x, \xi)$ elliptisch ist.

Diese Elliptizitätsbedingung läßt sich in Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 2$ noch verschärfen.

Lemma 29.8.3 *Sei das Symbol $\sigma(x, \xi)$ eines LPDO elliptisch, dann gilt auch*

$$|\sigma_H(x, \xi)| \geq C_1 |\xi|^d \quad \text{für } |\xi| \neq 0, \quad (29.8.8)$$

$$|\sigma_H(x, \xi)| \geq C_2 (1 + |\xi|)^d \quad \text{für } |\xi| \neq 0. \quad (29.8.9)$$

Beweis: Für $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ und $\xi \in U := \{|\xi| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $K \times U \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine kompakte Menge. Der Hauptteil des Symbols $\sigma_H(x, \xi)$ ist eine stetige und positive Funktion auf der kompakten Menge $K \times U$ und nimmt dort also ein positives Minimum $C_1 > 0$ an. Damit folgt

$$\frac{1}{|\xi|^d} |\sigma_H(x, \xi)| = |\sigma_H(x, \frac{\xi}{|\xi|})| \geq C_1 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_H(x, \xi)| \geq C_1 |\xi|^d.$$

Auch der Hauptteil des Symbols $\sigma_H(x, \frac{\xi}{1+|\xi|})$ ist eine stetige und positive Funktion auf der kompakten Menge $K \times U$ und nimmt dort also ein positives Minimum $C_2 > 0$ an. Damit folgt

$$\frac{1}{(1+|\xi|)^d} |\sigma_H(x, \xi)| = |\sigma_H(x, \frac{\xi}{1+|\xi|})| \geq C_2 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_H(x, \xi)| \geq C_2 (1+|\xi|)^d. \quad \square$$

29.9 Der euklidische Dirac-Operator

Wir führen jetzt die Gamma-Matrizen für einen euklidischen Dirac-Operator ein:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & i\mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (29.9.1)$$

und daraus folgt in der euklidischen Metrik $\text{diag}(+1, +1, +1, +1)$:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{1}. \quad (29.9.2)$$

Beweis: Mit der euklidischen Metrik δ^{ab} folgt:

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2\gamma^0\gamma^0 = 2\mathbb{1} = 2\delta^{00}\mathbb{1},$$

$$\{\gamma^i, \gamma^i\} = 2\gamma^i\gamma^i = 2\mathbb{1} = 2\delta^{ii}\mathbb{1},$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 2\delta^{0i}\mathbb{1},$$

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_j \sigma_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_j \sigma_i \end{pmatrix} = \mathbf{0} = 2\delta^{ij} \mathbb{1}, \text{ für } i \neq j.$$

$$\begin{aligned} \gamma_5 &:= -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = (-i) \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2 \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= (-i) \begin{pmatrix} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} i\mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \square$$

In 29.7.10 und 29.7.11 hatten wir für den Dirac-Operator in einer gekrümmten Raumzeit erhalten

$$P(x, D) := i\hbar c \not{\nabla} = (i\hbar c \gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu) \quad \text{mit} \quad (29.9.3)$$

$$\nabla_\mu := \left(\partial_\mu + \Omega_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \right), \quad \Omega_\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab}. \quad (29.9.4)$$

Der Hauptteil des Symbols ist also

$$\sigma_H(x, \xi) = i\hbar c \gamma^a e_a^\mu \xi_\mu = i\hbar c \gamma^a \xi_a. \quad (29.9.5)$$

Nun ist

$$(\gamma^a \xi_a)(\gamma^b \xi_b) = \xi_a \xi_b \gamma^a \gamma^b = \xi_a \xi_b \delta^{ab} = \xi^b \xi_b = |\xi|^2.$$

Damit ist

$$\sigma_H(x, \xi) > 0 \quad \text{für } \xi \neq 0, \quad (29.9.6)$$

und damit ist der Dirac-Operator $P(x, D)$ mit den Gamma-Matrizen der euklidischen Metrik tatsächlich ein elliptischer LPDO.

30 Faserbündel und Krümmung

30.1 Charles Ehresmann (1905-1979)

Ehresmann wurde in Straßburg im Elsass geboren und besuchte dort die Schule. Ab 1924 studierte er an der berühmten *École normale supérieure* (ENS) in Paris. Nach Militärdienst und einer kurzen Zeit als Gymnasiallehrer setzte er seine mathematischen Studien 1930-1931 in Göttingen und 1932-1934 in Princeton fort. 1934 wurde er in Paris bei Élie Cartan promoviert und forschte dann am *Centre national de la recherche scientifique* (CNRS). Danach arbeitete er als Dozent in Straßburg, in Clermont-Ferrand (wohin die Universität Straßburg kriegsbedingt ausgelagert worden war), und schließlich als Professor für Topologie in Paris. Daneben nahm er Einladungen zu Gastprofessuren weltweit an.

Für einige Jahre arbeitete Ehresmann in der von Jean Dieudonné, Henri Cartan, u.a. gegründeten berühmten Gruppe *Nicolas Bourbaki* mit, die sich um einen streng axiomatischen Aufbau der Mathematik auf den Spuren Hilberts bemühte. Ehresmann arbeitete zunächst wie sein Doktorvater Élie Cartan über Lie-Gruppen, dann wandte er sich Untersuchungen der Homologie verschiedener Mannigfaltigkeiten, der Grundlegung der Theorie der Faserbündel und Differentialtopologie und schließlich der Kategorientheorie zu. 1957 gründete er die mathematische Zeitschrift *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*. 1965 veröffentlichte er das Lehrbuch *Catégories et structures* und 1969 das Lehrbuch *Algèbre*. Nach seinem Tod erschienen von 1980-1983 seine gesammelten Werke in sieben Bänden.

Jean Dieudonné beschrieb Ehresmann einmal so:

„... er zeichnete sich aus durch seine Ehrlichkeit, seine Einfachheit und die völlige Abwesenheit von jedem Dünkel und Karrierestreben. Er war ein herausragender Lehrer, und zwar nicht so sehr wegen der Brillanz seiner Vorlesungen, sondern vor allem wegen der Inspiration und unermüdlichen Un-



Abbildung 30.1: C. Ehresmann, unbekannt (1949), CC-BY-SA-2.0 de. Bildausschnitt des Originals. (Math. Inst. Oberwolfach) [http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Ehresmann]

terstützung, die er seinen fortgeschrittenen Studenten großzügig schenkte.
 ...”

[Quelle: en.wikipedia: Charles_Ehresmann].

30.2 Faserbündel

In der theoretischen Physik haben wir es immer wieder mit Vektorfeldern, Tensorfeldern, Spinorfeldern und Symmetriefeldern über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit zu tun. Wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $TM := \cup_{p \in M} T_p M$ der zugehörige Tangentialraum, dann kann man die Dynamik des Systems im einfachsten Fall in dem Produktraum $M \otimes TM$ beschreiben. Wenn nun aber im betrachteten System nichttriviale Randbedingungen vorliegen, dann kann es sein, daß das System nur noch lokal als Produktraum beschrieben werden kann, daß aber *global* eine *Verdrehung* vorliegt. Als einfaches Beispiel einer solchen globalen Verdrehung sei hier das Möbiusband angeführt: die Mannigfaltigkeit M ist hier S^1 , eine Kreislinie, und darüber befindet sich als *Faser* das Intervall $[-1, 1]$. Ohne Verdrehung erhalten wir den Zylinder als Produktraum $S^1 \times [-1, 1]$, mit einer Verdrehung jedoch das Möbiusband, das nur noch lokal als Produktraum darstellbar ist. Die geeignete mathematische Struktur zur Beschreibung solcher topologischer Räume ist das *Faserbündel*. Grundlegende Untersuchungen zur Theorie der Faserbündel wurden von Charles Ehresmann und Norman Steenrod durchgeführt. Steenrod schrieb auch eines der ersten Lehrbücher zu diesem Thema (Steenrod (1951)). Wir folgen in dieser kurzen Einführung häufig Nakahara (2003), S. 348 ff., allerdings mit gelegentlich abweichenden Bezeichnungen und Beweisen (und immer wieder gilt: „Notation is a nightmare“ (Evans, 1998)).

Definition 30.2.1 *Ein differenzierbares Faserbündel wird bezeichnet als (E, M, π, F, G) , bzw. abgekürzt als $E \xrightarrow{\pi} M$ und besteht aus folgenden Strukturen:*

1. der differenzierbaren Mannigfaltigkeit E als dem Totalraum,
2. der differenzierbaren Mannigfaltigkeit M als der Basis,
3. der differenzierbaren Mannigfaltigkeit F als der Faser,
4. der Projektion π , einer surjektiven Abbildung $\pi : E \rightarrow M$, welche die lokale Produkttopologie definiert:
 $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = E_p \cong F$, d.h. das Urbild von p , die sog. Faser über p , sei also homöomorph zu F . Lokal ist also $E_p \cong p \times F$, und dies soll auch für eine offene Umgebung U von $p \in M$ gelten, d.h. $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$,
5. einer offenen Überdeckung von M mit sog. Karten U_i , $M = \bigcup_i U_i$, mit Diffeomorphismen $\phi_i : E_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, die lokale Trivialisierungen genannt werden,
6. einer Menge von Diffeomorphismen, genannt Kartenwechsel,
 $t_{ij} := \phi_i \phi_j^{-1} : U_j \times F \rightarrow U_i \times F$, welche den Übergang zwischen zwei überlappenden Trivialisierungen $U_i \times F$ und $U_j \times F$ beschreiben. Dabei sollen die Kartenwechsel

Elemente einer topologischen Gruppe G sein, genannt *Strukturgruppe*, die von links auf die Faser wirkt, d.h. $\tilde{\phi}_j^{-1}(p, f_j) = \phi_i^{-1}(p, t_{ij}f_j)$.
 Mit $t_{ij} \in G$ folgt: $t_{ii}(p) = e$ (Identität), $t_{ij}(p) = t_{ji}^{-1}(p)$ und $t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$.

Die Definition eines Faserbündels wird mit der folgenden Zeichnung klarer:

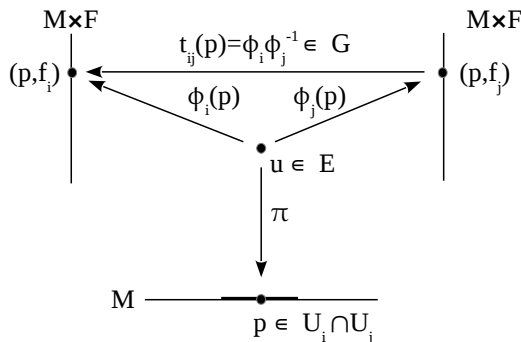


Abbildung 30.2: Faserbündel (E, M, π, F, G) , bzw. $E \xrightarrow{\pi} M$

Die Kartenwechsel $t_{ij}(p)$, welche die Karten U_i und U_j miteinander verknüpfen, heißen in der Physik *Eichtransformationen*. Sie sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, denn seien etwa t_{ij} und \tilde{t}_{ij} zwei verschiedene Kartenwechsel, dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{ij}(p) &= \tilde{\phi}_i(p, f_i) \tilde{\phi}_j^{-1}(p, f_j) \\ &= \tilde{\phi}_i(p, f_i) \phi_i^{-1}(p, f_i) \phi_i(p, f_i) \phi_j^{-1}(p, f_j) \phi_j(p, f_j) \tilde{\phi}_j^{-1}(p, f_j), \end{aligned}$$

und mit $g_i(p) := \phi_i(p, f_i) \tilde{\phi}_i^{-1}(p, f_i) \in G$ über U_i folgt

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i^{-1}(p) t_{ij}(p) g_j(p). \tag{30.2.1}$$

Diese $g_i(p)$ heißen in der Physik die *Eichungs-Freiheitsgrade* in der Karte U_i .

Eine wichtige Struktur eines Faserbündels ist ein sog. *Schnitt*, eine Abbildung der Basis in den Totalraum. Ein *lokaler Schnitt* ist eine Abbildung $\sigma : U_i \subset M \rightarrow E$, so daß $\pi \circ \sigma = Id_{U_i}$, ein *globaler Schnitt* eine Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma = Id_M$. Die Frage, unter welchen Bedingungen es globale Schnitte in einem Faserbündel gibt und wann ein Faserbündel isomorph zu einem trivialen Bündel ist, läßt sich im Allgemeinen nicht trivial beantworten und wird u.a. in der Theorie der *Charakteristischen Klassen* der algebraischen Topologie behandelt (siehe Kapitel 32).

Ein sehr häufig auftauchendes Faserbündel ist das *Vektorbündel* $(E, M, \pi, V, GL(k, R))$, mit $R = \mathbb{R}$ oder $R = \mathbb{C}$, bei welchem die Faser F ein k -dimensionaler Vektorraum über der m -dimensionalen Basis M ist. Das Standardbeispiel für ein Vektorbündel ist das Tangentialbündel $(TM, M, \pi, \mathbb{R}^m, GL(m, \mathbb{R}))$. Wenn für $p \in U_i \cap U_j$ zwei verschiedene Trivialisierungen $\phi_i(u) = (p, V_i)$ und $\phi_j(u) = (p, V_j)$ gegeben seien, dann ist der Kartenwechsel $t_{ij}(p)$ eine lineare Abbildung, d.h. $V_i = t_{ij}(p)V_j$ mit $t_{ij}(p) \in GL(m, \mathbb{R})$. Ein

Vektorfeld ist in der Sprache der Faserbündel also einfach ein Schnitt im Vektorbündel TM . Jedes Vektorbündel hat zumindest einen globalen Schnitt, den Nullschnitt, denn der Vektor 0 bleibt unter jedem Kartenwechsel invariant. Entsprechendes gilt für das Kotangentenbündel und beliebige Tensorbündel.

Im Zusammenhang mit den erwähnten *Charakteristischen Klassen*, insb. den *Chern-Klassen* (siehe Kapitel 32.5), spielen die komplexen Linienbündel eine Rolle. Bei einem Linienbündel $(L, M, \pi, \mathbb{C}, \mathbb{C})$, bzw. abgekürzt als $L \xrightarrow{\pi} M$, ist die Faser einfach eine komplexe Linie $F = \mathbb{C}$ und auch die Strukturgruppe ist $G = GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Lemma 30.2.2 *Wenn es in einem komplexen Linienbündel $(L, M, \pi, \mathbb{C}, \mathbb{C})$ einen nichtverschwindenden, globalen Schnitt $\sigma : M \rightarrow L$ gibt, dann ist das Linienbündel isomorph zu einem trivialen Bündel.*

Beweis: Sei $L_p = \mathbb{C}$ die Faser an der Stelle $p \in M$ und $\sigma : M \rightarrow L$ ein globaler Schnitt mit $\sigma(p) \neq 0$. Dann ist $\sigma(p)$ eine Basis für L_p . Damit ist die folgende Abbildung f ein Isomorphismus:

$$f : M \times \mathbb{C} \rightarrow L \quad \text{mit} \quad f : (p, \lambda) \mapsto \lambda \cdot \sigma(p), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad \square$$

Man sieht sofort, daß dies nur funktioniert, falls für alle $p \in M$ tatsächlich $\sigma(p) \neq 0$ ist.

Korollar 30.2.4 *Eine Anwendung findet dieses Lemma, wenn man das Produktbündel aus L mit seinem dualen Bündel L^* betrachtet. Sei also $E \xrightarrow{\pi} M$ mit $E := L \otimes L^* \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$. Der Schnitt $\sigma(p) = (z, z^*)$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $|z|^2 = 1$ ist ein globaler, nichtverschwindender Schnitt und also ist $L \otimes L^*$ isomorph zu einem trivialen Bündel.*

Grundlegend für die modernen physikalischen Eichfeldtheorien und speziell die Yang-Mills-Theorien ist die Struktur des *Prinzipalbündels* (P, M, π, G, G) , bzw. kurz $P \xrightarrow{\pi} M$, gelegentlich auch *Hauptfaserbündel* genannt. Hierbei besteht die Faser aus der Strukturgruppe G mit einer zusätzlichen Rechtsmultiplikation innerhalb der Faser $\pi^{-1}(p)$. Seien $p \in U_i \subset M$, $u \in P$, $g_i, a \in G$, dann gilt

$$\phi_i(u) = (p, g_i) \quad \Rightarrow \quad \phi_i(ua) := (p, g_i a). \quad (30.2.2)$$

Da $ua \in \pi^{-1}(p)$ gilt also $\pi(ua) = \pi(u) = p$. Diese Definition ist unabhängig von der Trivialisierung, denn

$$ua = \phi_i^{-1}(p, g_i a) = \phi_i^{-1}(p, t_{ij}(p)g_j a) = \phi_j^{-1}(p, g_j a).$$

Weil bei einem Prinzipalbündel die Faser und die Strukturgruppe übereinstimmen, gibt es hier nun eine ausgezeichnete lokale Trivialisierung, die sog. *kanonische lokale Trivialisierung*. Sei σ_i ein lokaler Schnitt in P über U_i , $p \in U_i \subset M$ und $u \in \pi^{-1}(p)$, dann

gibt es ein eindeutiges $g_i(u) \in G$ mit $u = \sigma_i(p)g_i(u)$. Jetzt definiert man die *kanonische lokale Trivialisierung* ϕ_i als

$$\phi_i(u) := (p, g_i(u)) \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(\sigma_i(p)) = (p, e) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_i(p) = \phi_i^{-1}(p, e). \quad (30.2.3)$$

Daraus folgt dann auch, daß bei einem Prinzipalbündel zwei lokale Schnitte $\sigma_i(p)$ über U_i und $\sigma_j(p)$ über U_j in $p \in U_i \cap U_j$ mittels eines Kartenwechsels $t_{ji}(p)$ miteinander zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \sigma_i(p) &= \phi_i^{-1}(p, e) = \phi_j^{-1}(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j^{-1}(p, e t_{ji}(p)) \\ &= \phi_j^{-1}(p, e) t_{ji}(p) = \sigma_j(p) t_{ji}(p). \end{aligned} \quad (30.2.4)$$

Satz 30.2.5 *Ein Prinzipalbündel (P, M, π, G, G) ist genau dann trivial, d.h. global als Produktraum $P \cong M \times G$ darstellbar, wenn es einen globalen Schnitt gibt.*

Beweis: Seien $P \cong M \times G$ und $\phi : P \rightarrow M \times G$ eine globale Trivialisierung und $g \in G$, dann ist $\sigma(p) := \phi^{-1}(p, g)$ ein globaler Schnitt.

Sei umgekehrt $\sigma(p)$ ein globaler Schnitt in P . Jedes Element $u \in \pi^{-1}(p) \subset P$ läßt sich eindeutig darstellen als $u = \sigma(p)g_u$ mit einem $g_u \in G$. Dann ist die Abbildung $\phi : u \mapsto (p, g_u)$ ein Homöomorphismus und damit $P \cong M \times G$. \square

Aus Sicht der Physik möchte man Felder in Form von Vektoren, Tensoren oder Spinoren mit einer inneren topologischen Symmetriegruppe G über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit M beschreiben. Daher benötigt man als Struktur eine Verbindung eines Prinzipalbündels mit Vektoren, etc. Diese Struktur liefern sog. *assozierte Faserbündel*, die zu Beginn der 1940'er Jahre von dem französischen Mathematiker Charles Ehresmann eingeführt wurden.

Definition 30.2.7 *Sei P ein Prinzipalbündel (P, M, π, G, G) , und F eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf welche G von links wirkt, dann wird im Produktraum $P \times F$ eine Wirkung von G definiert als*

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f) \quad \text{für} \quad u \in P, f \in F, (u, f) \in P \times F, g \in G. \quad (30.2.5)$$

Das assoziierte Faserbündel (E, M, π, G, G, F) ist dann die Menge der Äquivalenzklassen $(P \times F)/\sim$, in welcher die Punkte $(u, f) \sim (ug, g^{-1}f)$ äquivalent sind (d.h. G wird als eine innere Symmetrie von $P \times F$ betrachtet). In der Sprache der Physik ist das assoziierte Faserbündel E also gleich $P \times F \bmod$ Eichtransformationen.

In der Physik wird häufig die Spezialisierung eines assoziierten Faserbündels auf das assoziierte Vektorbündel $E := (P \times_\rho V)/\sim$ benutzt, in welchem F ein k -dimensionaler Vektorraum V ist und G auf V mittels einer k -dimensionalen Darstellung $\rho(g)$ wirkt mit der Äquivalenzrelation $(u, v) \mapsto (ug, \rho(g^{-1})v)$. Die Projektion $\pi_E : E \rightarrow M$ wird dann

als $\pi_E(u, v) := \pi(u) = p$ definiert und ist invariant unter der Wirkung von G , denn $\pi_E(ug, \rho(g^{-1})v) = \pi(ug) = p = \pi(u) = \pi_E(u, v)$. Die Kartenwechsel in E sind durch $\rho(t_{ij}(p))$ gegeben, wobei die $t_{ij}(p)$ die Kartenwechsel des Prinzipalbündels P sind.

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen und mit dem Vektorbündel (E, M, π, V, G) starten. Mit dessen Kartenwechsel $t_{ij}(p) \in G$ definiert man ein *assoziertes Prinzipalbündel* $P(E) := (P, M, \pi, G, G)$ und daraus dann den Produktraum $E' := (P \times_\rho V) / \sim$.

Ein spezielles mit einem Vektorbündel $(E, M, \pi, V, GL(k, R))$ assoziiertes Prinzipalbündel, das letztlich auf das von Élie Cartan im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen von Spinoren eingeführte Rahmenfeld (moving frame, repère mobile) zurückgeht, ist das sog. *Rahmenbündel* $LM := (E, M, \pi, GL(k, R), GL(k, R))$. Hierbei errichtet man zunächst über $p \in M$ eine Faser, die aus allen (lokalen) Basen von V besteht, und die Menge all dieser Basen ist ja homöomorph zu $GL(k)$. Also ist LM das zum Vektorbündel E assoziierte Prinzipalbündel. Da nun $GL(k, \mathbb{R})$ und $GL(k, \mathbb{C})$ keine Spinordarstellungen erlauben, nutzen Physiker lieber eine Faser, die aus orthonormierten Basen besteht, denn dann ist die Strukturgruppe im Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $SO(k)$, bzw. im Fall einer Lorentzischen Mannigfaltigkeit über der 4-dimensionalen Raumzeit $SO(1, 3)$, und es können problemlos assoziierte Spinorbündel definiert werden.

Da nun ein Prinzipalbündel und ein assoziiertes Vektorbündel über die gleichen Kartenwechsel $t_{ij}(p) \in G$ verfügen und alle globalen topologischen Informationen in diesen Kartenwechseln enthalten sind, kann man das folgende Korollar zu obigem Satz formulieren:

Korollar 30.2.8 *Ein Vektorbündel E ist genau dann trivial, d.h. global als Produktraum $E \cong M \times V$ darstellbar, wenn es in seinem assoziierten Prinzipalbündel einen globalen Schnitt gibt.*

30.3 Faserbündel-Abbildungen

Sei (E, M, π, F, G) , bzw. kurz $E \xrightarrow{\pi} M$, ein Faserbündel mit der Faser F über der Basis-Mannigfaltigkeit M . Sei weiter $f : N \rightarrow M$ eine Abbildung von einer Basis-Mannigfaltigkeit N in die Basis-Mannigfaltigkeit M , dann kann man über N auf die folgende Weise ein *Rücktransport-Bündel* konstruieren:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

f^*E wird als Teilraum von $N \times E$ mit der Faser F definiert:

$$f^*E := \{(p, u) \in N \times E \mid f(p) = \pi(u)\}, \quad (30.3.1)$$

wobei für $p \in N$ die Faser F_p von f^*E eine Kopie der Faser $F_{f(p)}$ von E sein soll. Aus dieser Konstruktion folgt für die Kartenwechsel:

$$t_{ij}^*(p) = t_{ij}(f(p)). \quad (30.3.2)$$

Des Weiteren werden häufiger auch Produkt- und Summen-Faserbündel benötigt. Das *Produkt-Faserbündel* wird folgendermaßen definiert:

seien (E, M, π, F, G) und (E', M', π', F', G') zwei Faserbündel, dann ist das Produkt-Faserbündel

$$(E \times E', M \times M', \pi \times \pi', F \oplus F', G \oplus G'). \quad (30.3.3)$$

Man beachte, daß die Faser von $E \times E'$ als $F \oplus F'$ über $M \times M'$ erklärt wird.

Das üblichste Summen-Faserbündel ist das *Whitney-Summen-Bündel*:

seien (E, M, π, F, G) und (E', M, π', F', G') zwei Faserbündel über der gleichen Basis-Mannigfaltigkeit M , dann ist das Whitney-Summen-Bündel $E \oplus E'$ das Rücktransport-Bündel von $E \times E'$ bezüglich der Abbildung $f : M \rightarrow M \times M$:

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\pi_2} & E \times E' \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi \times \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M \times M \end{array}$$

Konkret heißt das mit:

$$E \oplus E' := \{(u, u') \in E \times E' \mid \pi \times \pi'(u, u') = (p, p)\}, \quad (30.3.4)$$

mit der Fiber $F \oplus F' = \pi^{-1}(p) \oplus (\pi')^{-1}(p) \simeq (\pi \times \pi')^{-1}(p, p)$.

Aus dieser Konstruktion folgt für die Kartenwechsel:

$$t_{ij}^{E \oplus E'}(p) = \begin{pmatrix} t_{ij}^E(p) & 0 \\ 0 & t_{ij}^{E'}(p) \end{pmatrix}. \quad (30.3.5)$$

30.4 Zusammenhang und Krümmung von Prinzipalbündeln

Wir hatten bei der Diskussion der Riemannschen Geometrie gesehen, daß die Tangentialräume $T_p M$ (d.h. die Fasern) über verschiedenen Punkten p der Mannigfaltigkeit M zunächst nicht miteinander verknüpft sind. Erst durch die Definition eines Zusammenhangs können Vektoren der Fasern $T_p M$ und $T_{p+\epsilon} M$ miteinander verglichen und eine

kovariante Ableitung definiert werden. Dabei hatten wir den sog. *affinen Zusammenhang* (oder *Koszul-Zusammenhang*) als eine bilineare Abbildung mit Leibniz-Regel auf Vektorfeldern über der Mannigfaltigkeit M eingeführt.

Diese Gedanken hat nun Ehresmann für allgemeinere Faserbündeln erweitert. Wir wollen hier eine kurze Einführung in den *Ehresmann-Zusammenhang* und die Definition einer Krümmung im Fall von Prinzipalbündeln geben. Eine ausführliche Diskussion über die verschiedenen Zusammenhang-Definitionen und ihre Äquivalenz im Fall von Tangentialbündeln findet sich in Spivak (1979), II. Wir folgen Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 287 ff., Nakahara (2003), S. 374 ff. und Bleeker (1981), S. 29 ff..

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist die Klärung des Begriffs *Paralleltransport* in einem Prinzipalbündel, analog zum Paralleltransport in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Vor den Details soll zunächst eine Übersicht über den Gedankengang dargestellt werden.

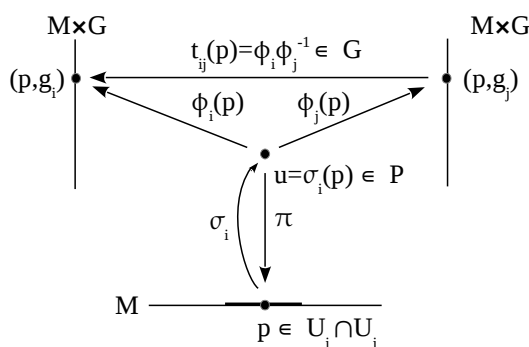


Abbildung 30.3: Prinzipalbündel (P, M, π, G, G) , bzw. $P \xrightarrow{\pi} M$

Übersicht:

Seien $P \xrightarrow{\pi} M$, bzw. (P, M, π, G, G) , ein Prinzipalbündel über der Basis M und die Strukturgruppe G eine Liegruppe. Nun betrachtet man an der Stelle $u \in P$ mit $\pi(u) = p \in M$ den Tangentialraum $T_u P$ des Totalraums P (nicht zu verwechseln mit $T_p M$, dem Tangentialraum der Basis M). Ein spezieller Teilraum von $T_u P$, genannt *vertikaler Teilraum* $V_u P$, besteht aus jenen Tangentialvektoren in u , die tangential zur Faser $\pi^{-1}(p)$ durch u sind. Der durch $T_u P = V_u P \oplus H_u P$ definierte, zu $V_u P$ komplementäre Raum $H_u P$ heißt *horizontaler Teilraum*. Um einen Zusammenhang zwischen den einzelnen Fasern herzustellen, verlangt man daß die Räume $H_u P$ differenzierbar von $u \in P$ abhängen sollen. Um die Kompatibilität mit der Gruppenstruktur innerhalb einer Faser $\pi^{-1}(p)$ herzustellen definiert man den Zusammenhang im vertikalen Teilraum $V_u P$ wie folgt:

sei $g \in G$ und die Rechtsmultiplikation in einer Faser $R_g : \pi^{-1}(p) \rightarrow \pi^{-1}(p)$ mit $R_g u = ug$, dann sollen die horizontalen Teilräume $H_u P$ und $H_{ug} P$ über die induzierte lineare Abbildung R_{g*} mit $H_{ug} = R_{g*} H_u$ zusammenhängen.

Im nächsten Schritt betrachtet man eine beliebige Kurve $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ zwischen zwei Punkten $p, p' \in M$ und liftet diese Kurve in P , so daß $\tilde{\gamma}(0) = u$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$

und alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Dann liegt der Punkt $u' = \tilde{\gamma}(1)$ über p' und wir haben einen Paralleltransport des Tangentialvektors $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(0)}$ in den Tangentialvektor $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(1)}$ konstruiert.

Details:

Wir folgen hier (mit abweichenden Bezeichnungen) Choquet-Bruhat u. a. (1978), S. 287, und stellen zum besseren Verständnis drei verschiedene äquivalente Definitionen eines Zusammenhangs in einem Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ vor.

Definition 30.4.1 (Z1) Sei P ein Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ mit $u \in P$, $\pi(u) = p \in M$, in der Karte $U_i \subset M$, dann heißt die Abbildung $\sigma_{i*} : T_p M \rightarrow T_u P$ ein Zusammenhang, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. σ_{i*} ist linear,
2. $\pi_*(\sigma_{i*}) = Id$ auf $T_p M$,
3. $(\sigma_i g)_* = R_{g*} \sigma_{i*}$ für alle $g \in G$,
4. σ_{i*} hängt differenzierbar von $u \in P$ ab.

Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p, p' \in M$. Jetzt können wir $\gamma(t)$ folgendermaßen in die Kurve $\tilde{\gamma}(t)$ in P liften:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \sigma_{i*} \left(\frac{d}{dt} \gamma(t) \right) \quad \text{mit } \tilde{\gamma}(0) = u .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\tilde{\gamma}(t)$, für die lokal um u herum eine eindeutige Lösung existiert. Durch $\tilde{\gamma}_*(t) := \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t)$ wird der Paralleltransport eines Vektors $\tilde{\gamma}_*(0) = \sigma_{i*}(\gamma_*(0))$ definiert. Der lineare Raum $H_u P$ mit $\pi(u) = p$

$$H_u P := \sigma_{i*}(T_p M)$$

heißt *horizontaler Teilraum* von $T_u P$.

Dies bringt uns sofort zur zweiten Definition eines Zusammenhangs in einem Prinzipalbündel, der Definition von Ehresmann.

Definition 30.4.2 (Z2) Sei P ein Prinzipalbündel $P \xrightarrow{\pi} M$ mit $\pi(u) = p \in M$. Dann heißt die eindeutige Zerlegung des Tangentialraums $T_u P$ in einen horizontalen Teilraum $H_u P$ und einen vertikalen Teilraum $V_u P$ der Ehresmann-Zusammenhang, wenn gilt:

1. $V_u P := \{\tilde{X}^V \in T_u P \mid \pi_*(\tilde{X}^V) = 0\}$,
2. $T_u P = H_u P \oplus V_u P$,
3. jedes glatte Vektorfeld \tilde{X} auf P ist in jedem Punkt $u \in P$ darstellbar als $\tilde{X} = \tilde{X}^H + \tilde{X}^V$ mit $\tilde{X}^H \in H_u P$ und $\tilde{X}^V \in V_u P$,
4. $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$,
5. $H_u P$ hängt differenzierbar von $u \in P$ ab.

Sei \mathfrak{g} die Liealgebra der Liegruppe G und $A \in \mathfrak{g}$. Wir setzen jetzt voraus, daß eine parametrisierte Kurve $g(t) \in G$ mit $t \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als

$$g(t) = e^{tA} \in G \Leftrightarrow \frac{d}{dt}g(t)|_{t=0} = A \in \mathfrak{g}, \quad (30.4.1)$$

was insbesondere für Matrix-Liegruppen gilt. Dann führt die Rechtsmultiplikation $R_g : P_p \rightarrow P_p$ mit $u \mapsto ug$ und $g(t) = e^{tA} \in G$ zu einer durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierten Kurve innerhalb der Faser $\pi^{-1}(p) = P_p \cong G$, denn $\pi(u) = \pi(ug) = p$. Der Tangentialvektor an die Kurve $ug(t)$ im Punkt $u \in P$ ist

$$A^\#(u) := \frac{d}{dt}(ue^{tA})|_{t=0} = uA. \quad (30.4.2)$$

$A^\#$ ist tangential zu $P_p = \pi^{-1}(p)$ an jeder Stelle $u \in P$. Daher kann $A^\#$ als ein Vektorfeld in der Faser P_p betrachtet werden und wird gelegentlich als das *fundamentale Vektorfeld* bezeichnet. Dieses Vektorfeld $A^\#$ definiert den *vertikalen Teilraum* V_uP von T_uP und das entsprechende Komplement dazu heißt der *horizontale Teilraum* H_uP , also

$$T_uP = V_uP \oplus H_uP. \quad (30.4.3)$$

Zunächst einmal ist klar, daß die Abbildung $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_uP$ mit $A \mapsto A^\#$ ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen \mathfrak{g} und V_uP ist. Darüber hinaus erhält die Abbildung $\#$ aber auch die Lie-Algebra Struktur, d.h.

$$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\#, \quad (30.4.4)$$

denn

$$\begin{aligned} A^\#B^\#(u) &= A^\#\left(\frac{d}{dt_2}(ue^{t_2B})\right)|_{t=0} = A^\#(u)B \\ &= \frac{d}{dt_1}(ue^{t_1A})|_{t_1=0}B = uAB \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[A^\#, B^\#](u) = u[A, B] = \frac{d}{dt}(ue^{t[A, B]})|_{t=0} = [A, B]^\#(u).$$

Nun ist man ja an der Möglichkeit eines Paralleltransports von Vektoren aus T_uP interessiert. Mit der Rechtsmultiplikation $R_g u = ug$ innerhalb einer Faser ist bereits der Paralleltransport eines Vektors \tilde{X}^V aus dem vertikalen Teilraum V_uP als $R_{g*}\tilde{X}^V$ festgelegt. Andererseits gibt es jedoch bislang noch keinen Paralleltransport für Vektoren \tilde{X}^H des horizontalen Teilraums H_uP , weder in vertikaler noch in horizontaler Richtung. Dies leistet nun die folgende \mathfrak{g} -wertige Zusammenhang 1-Form ω , eine Projektion von T_uP nach $\mathfrak{g} \cong V_uP$.

Definition 30.4.3 (Z3) 1. $\omega : T_uP \rightarrow \mathfrak{g} \cong V_uP$,

2. $\omega_u(A^\#) = A$ für $A \in \mathfrak{g} \cong V_uP$,
3. $R_g^*\omega_{ug} = g^{-1}\omega_u g$ für $g \in G$, d.h.
 $R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}) = \omega_{ug}(R_{g*}\tilde{X}) = g^{-1}\omega_u(\tilde{X})g$ mit $\tilde{X} \in T_uP$,
4. ω_u hängt differenzierbar von $u \in P$ ab.

Statt ω_u schreiben wir häufig auch einfach ω , wenn es eindeutig ist, daß ω am Punkt $u \in P$ gemeint ist.

Zunächst einmal ist die adjungierte Abbildung $Ad_{g^{-1}}\omega_u := g^{-1}\omega_u g$ eine Abbildung nach \mathfrak{g} , d.h. $Ad : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, denn nach Definition ist die Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = T_eG = \left\{ a \in G \mid a = \frac{d}{dt}g(t)|_{t=0}, g(t) = \exp(ta) \in G \right\}$$

und mit $a \in \mathfrak{g}$ folgt sofort $g^{-1}ag \in \mathfrak{g}$. Weiter folgt aus der Definition von ω auch die Definition von H_uP :

$$\omega : T_uP \rightarrow \mathfrak{g} \cong V_uP \quad \Rightarrow \quad H_uP := \ker \omega = \{ \tilde{X} \in T_uP \mid \omega(\tilde{X}) = 0 \}. \quad (30.4.5)$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die obige Definition Z3 einer \mathfrak{g} -wertigen Zusammenhang 1-Form ω tatsächlich auch zur Definition Z2 des Ehresmann-Zusammenhangs führt. Sei $g \in G$, dann gilt

$$u \in P, \tilde{X}^H \in H_uP \subset T_uP \quad \Rightarrow \quad \omega_u(\tilde{X}^H) = 0,$$

$$\omega_{ug}(R_{g*}\tilde{X}^H) = R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}^H) = g^{-1}\omega_u(\tilde{X}^H)g = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{g*}H_uP \subset H_{ug}P.$$

Umgekehrt ist R_{g*} invertierbar, denn $R_{g*}^{-1} = R_{g^{-1}*}$, und daraus folgt, daß jeder Vektor $\tilde{Y}^H \in H_{ug}P$ sich als $\tilde{Y}^H = R_{g*}\tilde{X}^H$ mit einem vorgegebenen $\tilde{X}^H \in H_uP$ ausdrücken läßt, also $H_{ug}P \subset R_{g*}H_uP$. Und damit folgt $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$.

In der Physik arbeitet man nun vorwiegend nicht mit dieser globalen Zusammenhangform ω , sondern mit lokalen Zusammenhangformen \mathcal{A}_i , die auf lokalen Karten $U_i \subset M$ definiert sind. Diese heißen in der Physik *Eichpotentiale* oder *Yang-Mills-Potentiale*.

Natürlich stellt sich die Frage, ob es überhaupt in jedem Prinzipalbündel eine globale Zusammenhangform ω gibt. Die Frage läßt sich bejahen, indem man aus lokalen Zusammenhangformen \mathcal{A}_i explizit eine globale Zusammenhangform ω konstruiert. Dies soll im Folgenden gezeigt werden. Dabei bezeichne d_p das Differential auf P , im Gegensatz zu d , dem Differential auf M . Wenn $\tilde{\gamma}(t)$ eine Kurve in P mit $u = \tilde{\gamma}(0)$ und der Tangente $\tilde{X} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=0}$ in u ist, dann gilt für $d_P g_i$, wie für jede Differentialform, $d_P g_i(\tilde{X}) = \tilde{X}(g_i) = \frac{d}{dt}g_i|_{t=0}$.

Definition 30.4.4 Seien U_i eine Karte einer offenen Überdeckung von M , $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt und $\omega \in \mathfrak{g} \times T^*P$ eine globale Zusammenhangform, dann ist die lokale Zusammenhangform \mathcal{A}_i auf U_i definiert als

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \times \Omega^1(U_i). \quad (30.4.6)$$

Satz 30.4.5 Seien \mathcal{A}_i eine \mathfrak{g} -wertige 1-Form auf U_i , $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt mit der Trivialisierung $\phi_i(u) = (p, g_i(u))$, dann gibt es eine globale \mathfrak{g} -wertige 1-Form ω auf P mit $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$, die auf U_i die folgende Form hat:

$$\omega_i = g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i . \quad (30.4.7)$$

Damit die einzelnen ω_i auf überlappenden Karten U_i und U_j tatsächlich eine eindeutige Zusammenhangform ω bilden, müssen die \mathcal{A}_i zusammen mit den Kartenwechseln $t_{ij} \in G$ die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} . \quad (30.4.8)$$

Beweis: Zunächst soll $\sigma_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$ gezeigt werden. Wir verwenden jetzt für $u = \sigma_i(p)$ die kanonische Trivialisierung, so daß $g_i(u) = e$ gilt und damit

$$\omega_i = \pi^* \mathcal{A}_i + d_P g_i .$$

Sei $X \in T_p M$, dann wenden wir den Rücktransport (pullback) σ_i^* auf ω_i an, so daß $\sigma_i^* \omega_i$ jetzt eine \mathfrak{g} -wertige 1-Form über U_i ist:

$$\begin{aligned} \sigma_i^* \omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*} X) = \pi^* \mathcal{A}_i(\sigma_{i*} X) + d_P e(\sigma_{i*} X) \\ &= \mathcal{A}_i(\pi_* \sigma_{i*} X) = \mathcal{A}_i(X) . \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß dieses ω_i aus 30.4.7 die Bedingungen der obigen Definition Z3 des Ehresmann-Zusammenhangs erfüllt. Sei $A^\# \in V_u P$ mit $A \in \mathfrak{g}$, dann ist $\pi_*(A^\#) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \omega_i(A^\#) &= g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i(A^\#) g_i + g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* A^\#) g_i + g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) \\ &= g_i^{-1} d_P g_i(A^\#) = g_i^{-1}(u) A^\# g_i(u) = g_i^{-1}(u) \frac{d}{dt} g_i(u e^{tA})|_{t=0} \\ &= g_i^{-1}(u) \frac{d}{du'} g_i(u')|_{u'=u} \frac{d}{dt} (u e^{tA})|_{t=0} . \end{aligned}$$

In der kanonischen Trivialisierung gilt für ein festes $u \in P$

$$u = \sigma_i(p) = e \cdot \sigma_i(p) = g_i(u) \cdot \sigma_i(p) , \text{ wegen } g(u) = g^{-1}(u) = e .$$

Jeder Punkt $u' \in P$ läßt sich damit als $u' = g_i(u') \cdot u$ schreiben und daraus folgt:

$$\frac{d}{du'} g_i(u')|_{u'=u} = 1 ,$$

und daraus folgt für $\omega_i(A^\#)$:

$$\omega_i(A^\#) = A .$$

Also ist die Bedingung 2 der Definition Z3 erfüllt.

Nun zur Bedingung 3 der Definition Z3. Sei $X \in T_u P$ und $h \in G$. Wir betrachten den Rücktransport (pullback) R_h^* auf $\omega_{i,uh}$, d.h. auf ω_i an der Stelle uh . Dabei sei $\tilde{\gamma}(t)$ eine Kurve in P mit $u = \tilde{\gamma}(0)$ und der Tangente $\tilde{X} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=0}$.

$$\begin{aligned}
R_h^* \omega_{i,uh}(\tilde{X}) &= \omega_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) = g_{i,uh}^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i(R_{h*}\tilde{X}) g_{i,uh} + g_{i,uh}^{-1} d_P g_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) \\
&= h^{-1} g_{i,u}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*}\tilde{X}) g_{i,u} h + g_{i,uh}^{-1} d_P g_{i,uh}(R_{h*}\tilde{X}) \\
&= h^{-1} g_{i,u}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* \tilde{X}) g_{i,u} h + h^{-1} g_{i,u}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i,\tilde{\gamma}(t)} h |_{t=0} \\
&= h^{-1} g_{i,u}^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i(\tilde{X}) g_{i,u} h + h^{-1} g_{i,u}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i,\tilde{\gamma}(t)} |_{t=0} h \\
&= h^{-1} g_{i,u}^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i(\tilde{X}) g_{i,u} h + h^{-1} g_{i,u}^{-1} d_P g_{i,u}(\tilde{X}) h \\
&= h^{-1} \omega_{i,u}(\tilde{X}) h .
\end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung 3 der Definition Z3 erfüllt.

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, daß die lokalen Zusammenhänge ω_i und ω_j im überlappenden Gebiet $U_i \cap U_j$ konsistent zu einem globalen Zusammenhang ω verbunden werden können. Seien $\gamma(t)$ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = p$ und $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = X$ und $u = \sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_{j*} X &= \frac{d}{dt} \sigma_j(\gamma(t)) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (\sigma_i(\gamma(t)) t_{ij}(\gamma(t))) |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \sigma_i(\gamma(t)) |_{t=0} t_{ij}(\gamma(0)) + \sigma_i(\gamma(0)) \frac{d}{dt} t_{ij}(\gamma(t)) |_{t=0} \\
&= R_{t_{ij}(p)*} \frac{d}{dt} \sigma_i(\gamma(t)) |_{t=0} + u t_{ij}^{-1}(p) \frac{d}{dt} t_{ij}(\gamma(t)) |_{t=0} \\
&= R_{t_{ij}(p)*} (\sigma_{i*} X) + u \frac{d}{dt} (t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(\gamma(t))) |_{t=0} .
\end{aligned}$$

Nun ist $t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(\gamma(t)) |_{t=0} = e$ an der Stelle $\gamma(0) = p$ und daraus folgt mit 30.4.1

$$\frac{d}{dt} (t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(\gamma(t))) |_{t=0} \in T_e G = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow$$

$$u \frac{d}{dt} (t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(\gamma(t))) |_{t=0} = \left(\frac{d}{dt} (t_{ij}^{-1}(p) t_{ij}(\gamma(t))) |_{t=0} \right)^\# = (t_{ij}^{-1}(p) dt_{ij}(X))^\# .$$

Damit erhalten wir schließlich für $\sigma_{j*} X$

$$\sigma_{j*} X = R_{t_{ij}(p)*} (\sigma_{i*} X) + (t_{ij}^{-1}(p) dt_{ij}(X))^\# .$$

Jetzt wenden wir ω auf diese Gleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}\omega(\sigma_{j*}X) &= \omega(R_{t_{ij}(p)*}(\sigma_{i*}X)) + \omega((t_{ij}^{-1}(p) dt_{ij}(X))^{\#}) \quad \Rightarrow \\ \sigma_j^*\omega(X) &= R_{t_{ij}(p)}^*\omega(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1}(p) dt_{ij}(X) \\ &= t_{ij}^{-1}(p)\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij}(p) + t_{ij}^{-1}(p) dt_{ij}(X) \quad \Rightarrow \\ \mathcal{A}_j(X) &= t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i(X)t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X) \quad \text{bzw.}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} . \quad \square$$

Möglicherweise gibt es auf dem Prinzipalbündel P mehrere globale Zusammenhänge ω . Jeder globale Zusammenhang ω enthält aber im Gegensatz zu einem einzelnen lokalen Zusammenhang \mathcal{A}_i auf U_i die globalen topologischen Informationen von P .

Mit dem globalen Zusammenhang ω läßt sich jetzt der Paralleltransport definieren. Dazu betrachtet man einen sog. *horizontalen Lift* einer beliebige Kurve $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und sucht eine geliftete Kurve $\tilde{\gamma}(t)$ in P , so daß $\tilde{\gamma}(0) = u_0$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ und daß alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Der nächste Satz zeigt, daß dies eindeutig möglich ist.

Satz 30.4.7 Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Dann gibt es einen eindeutigen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}(t) \in P$ mit $\tilde{\gamma}(0) = u_0$ und $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei $g_i(\gamma(t))$ die Lösung folgender Differentialgleichung ist:

$$\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)}g_i(\gamma(t)) . \quad (30.4.9)$$

Beweis: Sei $\sigma_i : U_i \subset M \rightarrow P$ ein Schnitt. Wenn es einen horizontalen Lift $\tilde{\gamma}(t)$ gibt, dann kann dieser geschrieben werden als $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_i(\gamma(0)) = g_i(p_0) = e$ wählen kann, wodurch $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \sigma_i(p_0) = u_0$ wird. X sei der Tangentenvektor an $\gamma(t)$ an der Stelle t' mit $t_0 \leq t' \leq t_1$, d.h. $\gamma(t') = p$ und $\tilde{X} = \tilde{\gamma}_*X$ sei der Tangentenvektor an $\tilde{\gamma}(t)$ an der Stelle t' , d.h. $\tilde{\gamma}(t') = u$. Wie im vorherigen Beweis folgt

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \tilde{\gamma}_*(t')X = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t)|_{t=t'} = \frac{d}{dt}(\sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} \\ &= \frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=t'}g_i(\gamma(t')) + \sigma_i(\gamma(t'))\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t))|_{t=t'} \\ &= R_{g_i(\gamma(t'))*}\frac{d}{dt}\sigma_i(\gamma(t))|_{t=t'} + u g_i^{-1}(\gamma(t'))\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t))|_{t=t'}$$

$$= R_{g_i(\gamma(t'))^*}(\sigma_{i^*}X) + u \frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t')) g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} .$$

Nun ist $g_i^{-1}(\gamma(t'))g_i(\gamma(t))|_{t=t'} = e$ und daraus folgt mit 30.4.1

$$\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t')) g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} \in T_e G = \mathfrak{g} \quad \Rightarrow$$

$$u \frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t')) g_i(\gamma(t)))|_{t=t'} = \left(\frac{d}{dt}(g_i^{-1}(\gamma(t')) g_i(\gamma(t)))|_{t=t'}\right)^\# = (g_i^{-1}(\gamma(t')) dg_i(X)|_{t'})^\# .$$

Damit erhalten wir schließlich für \tilde{X} an der Stelle t'

$$\tilde{X} = R_{g_i(\gamma(t'))^*}(\sigma_{i^*}X) + (g_i^{-1}(\gamma(t')) dg_i(X)|_{t'})^\# .$$

Nun soll ja $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t')}$ im horizontalen Teilraum $H_{\tilde{\gamma}(t')}P$ liegen, d.h. $\omega(\tilde{X}) = 0$, und daraus folgt

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}) &= \omega(R_{g_i(\gamma(t'))^*}(\sigma_{i^*}X)) + \omega((g_i^{-1}(\gamma(t')) dg_i(X)|_{t'})^\#) \\ &= g_i^{-1}(\gamma(t'))\omega(\sigma_{i^*}X)g_i(\gamma(t')) + g_i^{-1}(\gamma(t')) dg_i(X) = 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$dg_i(X) = -\omega(\sigma_{i^*}X)g_i(\gamma(t')) = -\sigma_i^*\omega(X)g_i(\gamma(t')) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t')}g_i(\gamma(t')) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)}g_i(\gamma(t)) .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $g_i(\gamma(t))$, die nach dem Satz von Picard-Lindelöf für die Anfangswerte $\gamma(0) = p_0$ und $g_i(\gamma(0)) = e$ in einer geeigneten Umgebung von p_0 eine eindeutige Lösung hat (siehe etwa: Eschenburg u. Jost (2007), S. 238). In dieser Umgebung um p_0 hat dann auch der horizontale Lift $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$ eine eindeutige Lösung.

Wenn der Punkt p_1 im Existenzbereich dieser Lösung liegt, so ist mit $g_i(p_1) = g_i(\gamma(1))$ auch $\tilde{\gamma}(1) = \sigma_i(\gamma(1))g_i(\gamma(1))$ gegeben und damit der Paralleltransport von $\tilde{\gamma}(0)$ nach $\tilde{\gamma}(1)$ definiert. \square

Mit diesem Ergebnis kann man jetzt eine kovariante Ableitung in $H_u P$ definieren. Wir folgen Nakahara (2003), S. 385 ff., und definieren die *äußere kovariante Ableitung* für vektorwertige r -Formen.

Definition 30.4.9 Sei $\phi \in \Omega^r(P) \times V$ eine r -Form auf dem Prinzipalbündel P mit Werten in einem k -dimensionalen Vektorraum V , d.h. $\phi : TP \wedge \dots \wedge TP \rightarrow V$. Im allgemeinen Fall hat dann ϕ die Darstellung

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^k \phi^\alpha \otimes e_\alpha \quad \text{mit} \quad \phi^\alpha \in \Omega^r(P) \quad \text{und} \quad \{e_\alpha\} \quad \text{einer Basis von } V . \quad (30.4.10)$$

Seien weiter $\tilde{X}_i = \tilde{X}_i^H + \tilde{X}_i^V$ mit $1 \leq i \leq r+1$ Tangentialvektoren aus T_uP mit $\tilde{X}_i^H \in H_uP$ und $\tilde{X}_i^V \in V_uP$, dann wird die äußere kovariante Ableitung $D\phi \in \Omega^{r+1} \times V$ definiert als Differential $d_P\phi$ auf Vektoren in horizontaler Richtung H_uP :

$$\begin{aligned} D\phi(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{r+1}) &:= d_P\phi(\tilde{X}_1^H, \dots, \tilde{X}_{r+1}^H) \\ &:= \sum_{\alpha=1}^k d_p\phi^\alpha(\tilde{X}_1^H, \dots, \tilde{X}_{r+1}^H) \otimes e_\alpha. \end{aligned} \quad (30.4.11)$$

Aus der Linearität von ϕ und von D folgt, daß $D\phi(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{r+1}) = 0$ ist, wenn ein $\tilde{X}_i^H = 0$ ist ($1 \leq i \leq r+1$).

Definition 30.4.10 Die Krümmungs 2-Form Ω wird als die äußere kovariante Ableitung der Zusammenhangs 1-Form ω definiert, bzw. am Ort $u \in P$ als ω_u , also als:

$$\Omega := D\omega \in \Omega^2(P) \times \mathfrak{g} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_u := D\omega_u \in \Omega^2(P) \times V_uP. \quad (30.4.12)$$

Lemma 30.4.11 Für die Krümmungs 2-Form Ω gilt für Verschiebungen in V_uP ebenso wie für die Zusammenhangs 1-Form ω der Ausdruck

$$R_g^*\Omega_{ug} = g^{-1}\Omega_{ug} \quad \text{mit } g \in G. \quad (30.4.13)$$

Beweis: Aus 11.3.4 folgt $d_P R_g^*\Omega = R_g^*d_P\Omega$ und aus der Definition des Zusammenhangs $H_{ug}P = R_{g^*}H_uP$ folgt für $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_uP$: $(R_{g^*}\tilde{X}_u)^H = R_{g^*}\tilde{X}_u^H$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} R_g^*\Omega_{ug}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= \Omega_{ug}(R_{g^*}\tilde{X}, R_{g^*}\tilde{Y}) = d_p\omega_{ug}((R_{g^*}\tilde{X})^H, (R_{g^*}\tilde{Y})^H) \\ &= d_p\omega_{ug}((R_{g^*}\tilde{X}^H), (R_{g^*}\tilde{Y}^H)) = R_g^*d_p\omega_{ug}(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) \\ &= d_p R_g^*\omega_{ug}(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = d_p(g^{-1}\omega_{ug})(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) \\ &= g^{-1}d_p\omega_u(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H)g = g^{-1}\Omega_u(\tilde{X}, \tilde{Y})g. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn $\zeta \in \Omega^p(M)$ eine p -Form auf M ist und $\eta \in \Omega^q(M)$ eine q -Form, dann gilt

$$\zeta \wedge \eta = (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta \quad \text{bzw.} \quad \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta = 0.$$

Dies gilt natürlich nicht mehr, wenn jetzt ζ und η keine einfachen Differentialformen sind, sondern wie hier im Fall der Prinzipalbündel \mathfrak{g} -wertige Differentialformen. Daher definiert man den Kommutator für \mathfrak{g} -wertige Differentialformen:

Definition 30.4.13 Seien $\zeta \in \Omega^p(P) \times \mathfrak{g}$ und $\eta \in \Omega^q(P) \times \mathfrak{g}$, dann ist der Kommutator $[\zeta, \eta]$ definiert als

$$[\zeta, \eta] := \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta. \quad (30.4.14)$$

Ausführlich formuliert erhält man mit einer Basis $\{T_\alpha\}$ von \mathfrak{g} für den Kommutator $[\zeta, \eta]$ also

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^\alpha \otimes T_\alpha, \quad \eta = \eta^\beta \otimes T_\beta \quad \Rightarrow \\ [\zeta, \eta] &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\alpha T_\beta - (-1)^{pq} \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha T_\beta T_\alpha \\ &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\alpha T_\beta - \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta T_\beta T_\alpha = \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \otimes [T_\alpha, T_\beta] \\ &= \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \otimes f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma. \end{aligned} \quad (30.4.15)$$

Völlig analog zur Krümmung in der Riemannschen Geometrie (siehe 15.9.5) gilt auch für die Krümmung von Prinzipalbündeln wieder eine wichtige Cartansche Strukturgleichung:

Satz 30.4.14 (Cartansche Strukturgleichung) *Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_u P$, dann gilt für die Krümmungs 2-Form Ω und die Zusammenhangs 1-Form ω :*

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](\tilde{X}, \tilde{Y}) \quad \Leftrightarrow \quad (30.4.16)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] \\ &= (d_P\omega + \omega \wedge \omega)(\tilde{X}, \tilde{Y}). \end{aligned} \quad (30.4.17)$$

Beweis: Die Gleichheit der beiden Formulierungen folgt sofort aus 30.4.14, denn da ω eine \mathfrak{g} -wertige 1-Form ist gilt:

$$[\omega, \omega] = \omega \wedge \omega - (-1)^1 \omega \wedge \omega = 2\omega \wedge \omega \quad \text{und}$$

$$(\omega \wedge \omega)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \omega(\tilde{X})\omega(\tilde{Y}) - \omega(\tilde{Y})\omega(\tilde{X}) = [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})].$$

Jetzt zum eigentlichen Beweis.

(1) Seien $\tilde{X}, \tilde{Y} \in H_u P$, dann ist $\omega(\tilde{X}) = 0$ und $\omega(\tilde{Y}) = 0$ und für Ω gilt

$$\begin{aligned} \Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ &= d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})]. \end{aligned}$$

(2) Seien jetzt $\tilde{X} \in H_u P$ und $\tilde{Y} \in V_u P$, also $\tilde{Y}^H = 0$, dann ist

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(\tilde{X}) = 0.$$

Es gilt also zu beweisen, daß auch $d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$ ist. Hierfür greifen wir auf die immer wieder hilfreiche Formel 15.2.12 zurück und erhalten

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\omega(\tilde{X}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]).$$

Nun kann man $\tilde{Y} \in V_u P$ schreiben als $\tilde{Y} =: B^\# = \frac{d}{dt}(ue^{tB})|_{t=0}$ mit $B \in \mathfrak{g}$ (siehe 30.4.2) und damit ist $\tilde{X}\omega(\tilde{Y}) = \tilde{X}B = 0$, weil ja B konstant ist. Also bleibt nur noch der Ausdruck $\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}])$ übrig. Hierfür erinnern wir uns an den Zusammenhang von Kommutator und Lie-Ableitung (15.3.3). Sei \tilde{Y} das von $g(t)$ erzeugte Vektorfeld, dann gilt

$$\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{X} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (R_{g^{-1}(t)*}\tilde{X}|_{ug} - \tilde{X}|_u) .$$

Nach Definition des Ehresmann Zusammenhangs gilt $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$, und damit folgt

$$\mathcal{L}_{\tilde{Y}}\tilde{X} = [\tilde{Y}, \tilde{X}] \in H_uP \quad \Rightarrow \quad \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0 .$$

(3) Der Fall $\tilde{X} \in V_uP$ und $\tilde{Y} \in H_uP$ ist völlig analog zum soeben behandelten Fall $\tilde{X} \in H_uP$ und $\tilde{Y} \in V_uP$.

(4) Nun zum letzten Fall mit $\tilde{X}, \tilde{Y} \in V_uP$. Zunächst ist wieder wie oben

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = D\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d_P\omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) = 0 .$$

Und ebenso wie oben können wir $\tilde{X}, \tilde{Y} \in V_uP$ schreiben als $\tilde{X} =: A^\# = \frac{d}{dt}(ue^{tA})|_{t=0}$ und $\tilde{Y} =: B^\# = \frac{d}{dt}(ue^{tB})|_{t=0}$ mit $A, B \in \mathfrak{g}$ (siehe 30.4.2) und damit sind $\tilde{X}\omega(\tilde{Y}) = \tilde{X}B = 0$ und $\tilde{Y}\omega(\tilde{X}) = \tilde{Y}A = 0$, weil ja A und B konstant sind und wir erhalten mit 15.2.12:

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}\omega(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\omega(\tilde{X}) - \omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = -\omega([\tilde{X}, \tilde{Y}]) .$$

Sei nun $[\tilde{X}, \tilde{Y}] =: C^\#$, dann folgt mit 30.4.4

$$d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\omega(C^\#) = -C = -[A, B] = -[\omega(A^\#), \omega(B^\#)] = -[\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] ,$$

also

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0 = d_P\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) + [\omega(\tilde{X}), \omega(\tilde{Y})] . \quad \square$$

Analog zur Bianchi-2 Identität 15.9.7 in der Riemannschen Geometrie kann man auch für die Krümmung von Prinzipalbündeln eine Bianchi Identität ableiten:

Lemma 30.4.16 *Sei Ω eine Krümmungs 2-Form, dann gilt*

$$D\Omega = 0 . \quad (30.4.18)$$

Beweis: Sowohl die Zusammenhangs 1-Form ω als auch die Krümmungs 2-Form Ω sind \mathfrak{g} -wertige Formen und können also nach einer Basis $\{T_\alpha\}$ von \mathfrak{g} entwickelt werden:

$$\omega = \omega^\alpha T_\alpha , \quad \Omega = \Omega^\alpha T_\alpha .$$

Mit 30.4.15 und 30.4.17 erhält man

$$\Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega = (d_P\omega^\alpha)T_\alpha + (\omega^\beta \wedge \omega^\gamma)f_{\beta\gamma}{}^\alpha T_\alpha ,$$

$$\Omega^\alpha = d_P \omega^\alpha + (\omega^\beta \wedge \omega^\gamma) f_{\beta\gamma}{}^\alpha .$$

$$d_P \Omega^\alpha = (d_P \omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \omega^\beta \wedge d_P \omega^\gamma) f_{\beta\gamma}{}^\alpha .$$

$$\begin{aligned} D\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= d_P \Omega(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H, \tilde{Z}^H) = \\ &= (d_P \omega^\beta(\tilde{X}^H, \tilde{Y}^H) \wedge \omega^\gamma(\tilde{Z}^H) - \omega^\beta(\tilde{X}^H) \wedge d_P \omega^\gamma(\tilde{Y}^H, \tilde{Z}^H)) f_{\beta\gamma}{}^\alpha T_\alpha \\ &= 0 \quad \text{wegen} \quad \omega(\tilde{X}^H) = \omega(\tilde{Z}^H) = 0 . \end{aligned} \quad \square$$

Wie bereits oben beschreiben, arbeitet man in der Physik nun vorwiegend nicht mit der globalen Zusammenhangform ω , sondern mit den lokalen \mathfrak{g} -wertigen Zusammenhang 1-Formen \mathcal{A}_i , den sogenannten *Eich-Potentialen*, oder *Yang-Mills-Potentialen*, die auf den lokalen Karten $U_i \subset M$ definiert sind. Die entsprechenden lokalen \mathfrak{g} -wertigen Krümmungs 2-Formen \mathcal{F}_i heißen in der Physik *Feldstärken*, oder *Yang-Mills Feldstärken*.

Definition 30.4.18 Seien U_i eine Karte einer offenen Überdeckung von M , $\sigma_i : U_i \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt und Ω eine globale Krümmungsform, dann ist die lokale Krümmungsform \mathcal{F}_i auf U_i definiert als

$$\mathcal{F}_i := \sigma_i^* \Omega . \quad (30.4.19)$$

Entsprechend der Cartanschen Strukturgleichung (30.4.16, 30.4.17) gilt für die lokalen Krümmungsformen:

Satz 30.4.19 Mit $X, Y \in T_p M$, $p \in U_i \subset M$ gilt:

$$\mathcal{F}_i(X, Y) = d\mathcal{A}_i + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i](X, Y) \quad \Leftrightarrow \quad (30.4.20)$$

$$\mathcal{F}_i(X, Y) = d\mathcal{A}_i(X, Y) + [\mathcal{A}_i(X), \mathcal{A}_i(Y)] = (d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i)(X, Y) . \quad (30.4.21)$$

Beweis: Es ist $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$, mit 11.3.4 folgt $\sigma_i^* d_P \omega = d\sigma_i^* \omega$ und mit 11.2.1 folgt $\sigma_i^*(\omega \wedge \omega) = (\sigma_i^* \omega) \wedge (\sigma_i^* \omega)$ und damit folgt die Behauptung sofort aus der Cartanschen Strukturgleichung 30.4.16, bzw. 30.4.17. \square

Dieses Ergebnis legt nun die Definition einer kovarianten Ableitung einer \mathfrak{g} -wertigen p -Form $\eta_i \in \Omega^p(U_i)$ auf $U_i \subset M$ nahe:

Definition 30.4.21

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\eta_i(X, Y_1, \dots, Y_p) &:= d\eta_i(X, Y_1, \dots, Y_p) + [\mathcal{A}_i(X), \eta_i(Y_1, \dots, Y_p)] \\ &:= (d\eta_i + (\mathcal{A}_i \wedge \eta_i - (-1)^p \eta_i \wedge \mathcal{A}_i))(X, Y_1, \dots, Y_p) . \end{aligned} \quad (30.4.22)$$

Damit schreibt sich 30.4.21 als

$$\mathcal{F}_i(X, Y) = \mathcal{D}\mathcal{A}_i(X, Y) = d\mathcal{A}_i(X, Y) + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i(X, Y) . \quad (30.4.23)$$

In dieser Schreibweise wird dann aus der Bianchi-2 Identität 30.4.18

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_i = \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{A}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (30.4.24)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_i(X, Y_1, Y_2) = d\mathcal{F}_i(X, Y_1, Y_2) + [\mathcal{A}_i(X), \mathcal{F}_i(Y_1, Y_2)] = 0 .$$

Beweis: Man beginnt wieder mit 30.4.17 und projiziert diese Gleichung mit σ_i^* auf M :

$$\Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega \quad \Rightarrow \quad d_P\Omega = (d_P\omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d_P\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\sigma_i^* d_P\Omega = \sigma_i^*((d_P\omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d_P\omega)) \quad \Rightarrow$$

$$d\sigma_i^*\Omega = (d\sigma_i^*\omega) \wedge (\sigma_i^*\omega) - (\sigma_i^*\omega) \wedge (d\sigma_i^*\omega) \quad \Rightarrow$$

$$d\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i \wedge d\mathcal{A}_i$$

$$= d\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i - (\mathcal{A}_i \wedge d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i)$$

$$= \mathcal{F}_i \wedge \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{F}_i = [\mathcal{F}_i, \mathcal{A}_i] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_i = d\mathcal{F}_i + [\mathcal{A}_i, \mathcal{F}_i] = 0 . \quad \square$$

Wenn man in der Karte U_i Koordinaten einführt, dann schreibt sich die Feldstärke \mathcal{F}_i als Funktion des Eichpotentials \mathcal{A}_i in der Form der *Yang-Mills Gleichungen*

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i,\nu} dx^\nu \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{A}_i = (\partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu}) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

und

$$\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_{i,\mu} dx^\mu) \wedge (\mathcal{A}_{i,\nu} dx^\nu) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{i,\mu} \mathcal{A}_{i,\nu} - \mathcal{A}_{i,\nu} \mathcal{A}_{i,\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}_{i,\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$+ \frac{1}{2}(\mathcal{A}_{i,\mu} \mathcal{A}_{i,\nu} - \mathcal{A}_{i,\nu} \mathcal{A}_{i,\mu}) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_{i,\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu} - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu} + [\mathcal{A}_{i,\mu}, \mathcal{A}_{i,\nu}] . \quad (30.4.25)$$

Wenn man jetzt noch berücksichtigt, daß $\mathcal{F}_{i,\mu\nu}$ und $\mathcal{A}_{i,\mu}$ ja \mathfrak{g} -wertige Formen sind und diese nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von \mathfrak{g} entwickelt, dann nehmen die Yang-Mills Gleichungen die folgende explizite Form an:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{i,\mu}, \mathcal{A}_{i,\nu}] &= [\mathcal{A}_{i,\mu}^\beta T_\beta, \mathcal{A}_{i,\nu}^\gamma T_\gamma] = \mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}^\gamma [T_\beta, T_\gamma] = \mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}^\gamma f_{\beta\gamma}^\alpha \Rightarrow \\ \mathcal{F}_{i,\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu \mathcal{A}_{i,\nu}^\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_{i,\mu}^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \mathcal{A}_{i,\nu}^\gamma . \end{aligned} \quad (30.4.26)$$

Als letztes soll noch gezeigt werden, daß sich die lokalen Krümmungs 2-Formen \mathcal{F}_i (Feldstärken) bei einem Kartenwechsel $U_i \rightarrow U_j$ wie Tensoren transformieren.

Lemma 30.4.23 *Seien U_i und U_j überlappende Karten von M mit den Kartenwechseln $t_{ij} \in G$, dann gilt die folgende Kompatibilitätsbedingung:*

$$\mathcal{F}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} .$$

Beweis: Seien auf $U_i \cap U_j$ zwei lokale Krümmungen (Feldstärken) $\mathcal{F}_i = d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{F}_j = d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j$ gegeben. Zunächst soll dt_{ij}^{-1} bestimmt werden.

$$0 = d(\mathbb{1}) = d(t_{ij}^{-1} t_{ij}) = (dt_{ij}^{-1}) t_{ij} + t_{ij}^{-1} (dt_{ij}) \Rightarrow d(t_{ij}^{-1}) = -t_{ij}^{-1} (dt_{ij}) t_{ij}^{-1} . \quad (30.4.27)$$

Das Transformationsverhalten der lokalen Zusammenhang 1-Form (Eichpotential) \mathcal{A}_i bei einem Kartenwechsel kennen wir aus 30.4.8

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} ,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= d\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j \\ &= d(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\ &\quad + (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) \\ &= \{-t_{ij}^{-1} (dt_{ij}) \wedge t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} d\mathcal{A}_i t_{ij} + (-1)^1 t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij}\} \\ &\quad + \{-t_{ij}^{-1} dt_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge dt_{ij}\} \\ &\quad + \{t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \wedge dt_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \wedge t_{ij}^{-1} dt_{ij}\} \\ &= t_{ij}^{-1} \{d\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i\} t_{ij} = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} . \end{aligned} \quad \square$$

30.5 Kovariante Ableitung in assoziierten Vektorbündeln

So schön die Theorie der Prinzipalbündel auch ist, in der Physik benötigt man zu dem geeigneten Prinzipalbündel, das die innere Symmetrie des Systems beschreibt, auch ein *assoziertes Vektorbündel*, *Tensorbündel*, oder *Spinorbündel* zur Beschreibung des entsprechenden Feldes. Hier beschreiben wir jetzt die Konstruktion des assoziierten Vektorbündels.

Das zu einem Prinzipalbündel P assoziierte Vektorbündel ist $E := (P \times_\rho V) / \sim$, das ist die Menge der Äquivalenzklassen von $(P \times_\rho V)$ mit der Äquivalenzrelation $(u, v) \sim (ug, \rho(g^{-1})v)$. Hierbei ist V ein k -dimensionaler Vektorraum und G wirkt auf V mittels einer k -dimensionalen Darstellung $\rho(g)$, d.h. $(u, v) \mapsto (ug, \rho(g^{-1})v)$. Die Projektion $\pi_E : E \rightarrow M$ wird dann als $\pi_E(u, v) := \pi(u) = p$ definiert und ist invariant unter der Wirkung von G , denn $\pi_E(ug, \rho(g^{-1})v) = \pi(ug) = p = \pi(u) = \pi_E(u, v)$. Die Kartenwechsel in E sind durch $\rho(t_{ij}(p))$ gegeben, wobei die $t_{ij}(p)$ die Kartenwechsel des Prinzipalbündels P sind. Die Multiplikation mit einem Skalar ist im Vektorbündel definiert als $c \cdot [u, v] := [u, cv]$, wenn $[u, v]$ eine Äquivalenzklasse aus E und $c \in \mathbb{R}$ ist.

Achtung: $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet hier und im Folgenden keinen Kommutator, sondern eine Äquivalenzklasse von $(P \times_\rho V) / \sim$.

Wenn man eine kovariante Ableitung in diesem assoziierten Vektorbündel konstruieren will, dann definiert man zunächst genau wie beim reinen Prinzipalbündel einen Paralleltransport mittels eines horizontalen Lifts. Sei $\gamma(t) \in M$, $t \in [0, 1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in M$ und $\tilde{\gamma}(t)$ die geliftete Kurve in P , so daß $\tilde{\gamma}(0) = u_0$, $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ und daß alle Tangentialvektoren $\tilde{X}_{\tilde{\gamma}(t)}$ an $\tilde{\gamma}(t)$ in den horizontalen Teilräumen $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ liegen. Ein Schnitt $s(\gamma(t))$ in E ist dann die t -abhängige Äquivalenzklasse

$$s(\gamma(t)) := [\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))], \quad (30.5.1)$$

$$s(\gamma(t)) \text{ parallel transportiert} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}v(\gamma(t)) = 0. \quad (30.5.2)$$

Diese Definition des Paralleltransports ist tatsächlich unabhängig vom speziellen Lift $\tilde{\gamma}(t)$, denn wenn $\tilde{\gamma}_2(t) := \tilde{\gamma}(t) \cdot a$, mit $a \in G$, ein anderer Lift von $\gamma(t)$ ist, so ergibt sich:

$$[\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))] = [\tilde{\gamma}(t)a, \rho(a^{-1})v(\gamma(t))] = [\tilde{\gamma}_2(t), \rho(a^{-1})v(\gamma(t))].$$

Wegen

$$\frac{d}{dt}v(\gamma(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\rho(a^{-1})v(\gamma(t)) = \rho(a^{-1})\frac{d}{dt}v(\gamma(t)) = 0$$

folgt aus dem Paralleltransport bzgl. $\tilde{\gamma}(t)$ der Paralleltransport bzgl. $\tilde{\gamma}_2(t)$.

Infolgedessen definiert man also die kovariante Ableitung eines Schnitts eines assoziierten Vektorbündels als:

Definition 30.5.1 Sei $X \in T_{p_0}M$ der Tangentialvektor an $\gamma(t)$ am Punkt $p_0 \in M$. Dann ist die kovariante Ableitung des Schnitts $s(\gamma(t))$ definiert als

$$\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} := [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}v(\gamma(t))|_{t=0}]. \quad (30.5.3)$$

Ein kovariantes Differential kann definiert werden als

$$\nabla s(X) := \nabla_X s. \quad (30.5.4)$$

Zunächst einmal sieht man, daß die hier definierte kovariante Ableitung ∇_X die Leibniz-Regeln erfüllt, denn sei etwa $c \in C^1(\mathbb{R})$, dann folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X(c(t)s(\gamma(t)))|_{t=0} &= \nabla_X[\tilde{\gamma}(t), c(t)v(\gamma(t))]|_{t=0} = [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}(c(t)v(\gamma(t)))]|_{t=0} \\ &= [\tilde{\gamma}(0), \frac{dc(t)}{dt}v(\gamma(t))]|_{t=0} + [\tilde{\gamma}(0), c(t)\frac{d}{dt}v(\gamma(t))]|_{t=0} \\ &= \frac{dc(t)}{dt}[\tilde{\gamma}(0), v(\gamma(t))]|_{t=0} + c(t)[\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}v(\gamma(t))]|_{t=0} \\ &= (\frac{dc(t)}{dt}s(\gamma(t))|_{t=0}) + (c(t)\nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0}). \end{aligned}$$

Die anderen Leibniz-Regeln für ∇_X folgen aufgrund der Eigenschaften von $\frac{d}{dt}$ und der Linearität im zweiten Argument von $[\cdot, \cdot]$ analog.

Diese Definition ist unabhängig vom speziellen Lift $\tilde{\gamma}(t)$, denn sei wieder $\tilde{\gamma}_2(t) := \tilde{\gamma}(t) \cdot a$ mit $a \in G$ ein anderer Lift von $\gamma(t)$, dann ist das entsprechende Element der Äquivalenzklasse $[\tilde{\gamma}(t), v(\gamma(t))]$ jetzt $[\tilde{\gamma}(t) \cdot a, \rho(a^{-1})v(\gamma(t))]$, und daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &:= [\tilde{\gamma}(0)a, \frac{d}{dt}\rho(a^{-1})v(\gamma(t))]|_{t=0} \\ &= [\tilde{\gamma}(0)a, \rho(a^{-1})\frac{d}{dt}v(\gamma(t))]|_{t=0} \\ &= [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}v(\gamma(t))]|_{t=0}. \end{aligned}$$

Wiederum interessieren Physiker sich vornehmlich für die lokale Form der kovarianten Ableitung ∇_X . Sei $\sigma_i : U_i \subset M \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt im Prinzipalbündel P und $\gamma(t) \in U_i$, $t \in [0, 1]$ eine beliebige Kurve zwischen zwei Punkten $p_0, p_1 \in U_i$ und $\tilde{\gamma}(t)$ der horizontale Lift von $\gamma(t)$ in P mit $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $g_i(\gamma(0)) = g_i(p_0) = e$ wählen kann, wodurch $\tilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0)) = \sigma_i(p_0) = u_0$ wird. In 30.4.9 hatten wir für $g_i(\gamma(t))$ die folgende Differentialgleichung gefunden

$$\frac{d}{dt}g_i(\gamma(t)) = -\mathcal{A}_i(X)|_{\gamma(t)}g_i(\gamma(t)). \quad (30.5.5)$$

Hier benötigen wir aber k -dimensionale Darstellungen von G , bzw. \mathfrak{g} , die auf V wirken, und damit schreibt sich die obige Differentialgleichung als

$$\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t))) = -\rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(t)}\rho(g_i(\gamma(t))). \quad (30.5.6)$$

Wir wählen eine orthonormale Basis $\{e_\alpha^V\}_{\alpha=1,\dots,k}$ im Vektorraum V und konstruieren damit einen lokalen Schnitt $e_\alpha(p)$ mit $p \in U_i$ in E :

Definition 30.5.2

$$e_\alpha(p) := [\sigma_i(p), e_\alpha^V] \quad \text{mit } p \in U_i. \quad (30.5.7)$$

Dann ist

$$e_\alpha(\gamma(t)) = [\sigma_i(\gamma(t)), e_\alpha^V] = [\tilde{\gamma}(t)g_i^{-1}(\gamma(t)), e_\alpha^V] = [\tilde{\gamma}(t), \rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e_\alpha^V].$$

Wie in 30.4.27 gilt

$$\frac{d}{dt}(\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))) = -\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))\left(\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t)))\right)\rho(g_i^{-1}(\gamma(t))).$$

Damit und mit 30.4.9 ergibt sich für die kovariante Ableitung von $e_\alpha(\gamma(t))$

$$\begin{aligned} \nabla_X e_\alpha(\gamma(t))|_{t=0} &= [\tilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e_\alpha^V|_{t=0}] \\ &= [\tilde{\gamma}(0), -\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))\left(\frac{d}{dt}\rho(g_i(\gamma(t)))\right)\rho(g_i^{-1}(\gamma(t)))e_\alpha^V|_{t=0}] \\ &= [\tilde{\gamma}(0)(g_i^{-1}(\gamma(0))), \rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(0)}e_\alpha^V] \\ &= [\sigma_i(\gamma(0)), \rho(\mathcal{A}_i(X))|_{\gamma(0)}e_\alpha^V]. \end{aligned} \quad (30.5.8)$$

Die $\rho(\mathcal{A}_i)$ sind $k \times k$ dimensionale Darstellungen der \mathfrak{g} -wertigen 1-Formen \mathcal{A}_i . Wenn man nun die $\rho(\mathcal{A}_i)$ nach der Basis $\{\rho(T_\alpha)\}$ von $\rho(\mathfrak{g})$ entwickelt so folgt:

$$\rho(\mathcal{A}_i) = \rho(\mathcal{A}_{i,\mu})dx^\mu = \mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \rho(T_\beta)dx^\mu$$

und mit $X = \frac{d}{dt}$ folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X e_\alpha(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \rho(T_\beta)e_\alpha^V] \\ &= \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \rho(T_\beta)[\sigma_i(\gamma(0)), e_\alpha^V] \\ &= \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i,\mu}^\beta \rho(T_\beta)e_\alpha(\gamma(0)). \end{aligned} \quad (30.5.9)$$

Wenn $\gamma(t) = x^\mu$ eine Koordinatenlinie ist, dann ist $X = \partial_\mu$ und der obige Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\nabla_{\partial_\mu} e_\alpha(x^\mu(t))|_{t=0} = \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) e_\alpha(x^\mu(0)) . \quad (30.5.10)$$

Wenn jetzt $s(\gamma(t))$ ein Schnitt in E ist mit

$$\begin{aligned} s(\gamma(t)) &:= [\sigma_i(\gamma(t)), v_i(\gamma(t))] = [\sigma_i(\gamma(t)), v_i^\alpha(\gamma(t)) e_\alpha^V] \\ &= v_i^\alpha(\gamma(t)) [\sigma_i(\gamma(t)), e_\alpha^V] = v_i^\alpha(\gamma(t)) e_\alpha(\gamma(t)) , \end{aligned} \quad (30.5.11)$$

dann ergibt sich für die kovariante Ableitung mit der Leibniz-Regel sofort

$$\begin{aligned} \nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \left\{ \frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} e_\alpha^V] \\ &= \left\{ \frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} [\sigma_i(\gamma(0)), e_\alpha^V] \\ &= \frac{dx^\mu}{dt} \left\{ \frac{\partial v_i^\alpha(\gamma(t))}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} e_\alpha(\gamma(0)) . \end{aligned} \quad (30.5.12)$$

Diese Definition ist tatsächlich von der verwendeten lokalen Karte unabhängig, denn seien in $U_i \cap U_j$ die Schnitte $\sigma_i(p)$ und $\sigma_j(p)$ in P durch einen Kartenwechsel t_{ij} verknüpft, d.h. $\sigma_j(p) = \sigma_i(p) t_{ij}(p)$, dann folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X s(\gamma(t))|_{t=0} &= [\sigma_i(\gamma(0)), \left\{ \frac{dv_i^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{i,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} e_\alpha^V] \\ &= [\sigma_j(\gamma(0)) t_{ij}^{-1}, \left\{ \frac{dv_j^\alpha(\gamma(t))}{dt} \rho(t_{ij}) + \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{j,\mu}{}^\beta \rho(t_{ij}) \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} e_\alpha^V] \\ &= [\sigma_j(\gamma(0)), \left\{ \frac{dv_j^\alpha(\gamma(t))}{dt} + \frac{dx^\mu}{dt} \mathcal{A}_{j,\mu}{}^\beta \rho(T_\beta) \right\}|_{t=0} e_\alpha^V] . \end{aligned}$$

31 Eichtheorien

Wir folgen hier Nakahara (2003), S. 399 ff., Jost (1995), S. 86 ff. und Zeidler (2011), S. 843 ff.

31.1 Chen Ning Yang (*1922)

Yang ist einer der bedeutendsten theoretischen Physiker des 20. Jh. Er wurde in Hefei in China als Sohn eines Mathematikprofessors geboren und verbrachte seine Kindheit und Jugend bei seinen Eltern auf dem Campus der Tsinghua Universität von Peking. Während des japanisch-chinesischen Krieges war die Tsinghua Universität zur Universität von Kunming ausgelagert worden und dort in Kunming studierte Yang Physik. Nach dem Krieg erhielt Yang im Jahr 1946 ein Forschungsstipendium für die USA und er ging an die Universität von Chicago zu Enrico Fermi und wurde 1948 mit einer Arbeit „Über die Winkelverteilung von Kernreaktionen und Koinzidenzmessungen“ bei Edward Teller promoviert. Im Jahr 1949 wurde er ans 'Institute for Advanced Study' in Princeton eingeladen und im Jahr 1965 nahm er eine Professur an der 'State University of New York at Stony Brook' (SUNYSB) an und wirkte als Direktor am dort neugegründeten Institut für Theoretische Physik.



Abbildung 31.1: C.N. Yang
Alanmak (2005), CC-BY-SA-3.0.
[[http://de.wikipedia.org/wiki/
Chen_Ning_Yang](http://de.wikipedia.org/wiki/Chen_Ning_Yang)]

Im Jahr 1971 war es Yang zum ersten Mal wieder möglich China zu besuchen. In den Jahren davor nutzte er regelmäßig seine Aufenthalte am CERN in Genf für Treffen mit seinem Vater, der dazu aus China anreiste. Nach der chinesischen Kulturrevolution half Yang intensiv dabei die chinesische Physik-Community wieder aufzubauen, nahm nach seiner Emeritierung am SUNYSB im Jahr 1999 eine Ehrenprofessur an der Tsinghua Universität von Peking an, übersiedelte später nach Peking und nahm eine Professur am dortigen 'Center for Advanced Study' (CASTU) an.

Seine wichtigsten Beiträge zur theoretischen Physik sind:

- zusammen mit Robert L. Mills die später sog. Yang-Mills-Theorie, eine nicht-abelsche Eichtheorie. Interessanterweise wurde diese Theorie unabhängig und etwa

gleichzeitig von Ronald Shaw in seiner Dissertation bei Abdus Salam entwickelt. Yang und Mills erkannten, daß sich ihr Modell nicht wie von ihnen gewünscht auf die starke Wechselwirkung anwenden ließ, da die Austauschbosonen masselos sein mußten, um die Eichinvarianz zu gewährleisten - was sie aber wegen der Kurzreichweitigkeit der Starken Wechselwirkung nicht sein konnten. Dennoch publizierten sie ihre Arbeit, weil sie nach eigenen Worten von der mathematischen Schönheit der Theorie beeindruckt waren. Erst 1974 entdeckte Yang die schon lange in der Mathematik vorhandene geometrische Struktur der Prinzipalbündel als die angemessene Beschreibung für die Yang-Mills Theorien. Diesen Zugang wandte er dann auf eine Theorie der 'Magnetischen Monopole' (eine Lieblingsidee von Dirac) und auf 'globale Phasenfaktoren' in der Quantenmechanik (z.B. den Aharonov-Bohm-Effekt) an.

- zusammen mit Tsung-Dao Lee im Jahr 1956 die Vorhersage einer möglichen Paritätsverletzung der Schwachen Wechselwirkung, die dann 1957 von Chien-Shiung Wu von der Columbia Universität experimentell bestätigt wurde. Hierfür erhielten Yang & Lee 1957 den Nobelpreis - wobei leider Frau Wu nicht berücksichtigt wurde.
- Yang forschte auch intensiv über Fragen der Statistischen Mechanik, so etwa über Vielteilchenprobleme der Quantenmechanik und über Lösungen von Ising-Modellen (Spin-Gitter-Modellen). Aus der Beschäftigung mit der Quanten-Statistischen Mechanik entwickelte er die berühmte Yang-Baxter-Gleichung, die ein eindruckliches Anwendungsbeispiel des mathematischen Gebiets der 'Quantengruppen' und 'Hopf-Algebren' in der theoretischen Physik darstellt.

In dem unten referierten Interview von Dianzhou Zhang mit Chen Ning Yang findet sich der schöne Satz, den Yang wohl auf einer Konferenz in Seoul im Jahr 1983 geäußert hat:

„About ten years ago, I gave a talk on physics in Seoul, South Korea. I joked: "There exist only two kinds of modern mathematical books: one which you cannot read beyond the first page, and one which you cannot read beyond the first sentence. The *Mathematical Intelligencer* later reprinted this yoke of mine. But I suspect many mathematicians themselves agree with me.”

Yang erhielt neben dem Nobelpreis von 1957 zahlreiche Preise und Ehrungen, darunter die National Medal of Science (1986), die Albert Einstein Medal (1995) und den Lars Onsager Prize (1999).

Quelle: de.wikipedia: Chen_Ning_Yang, An Interview with Chen Ning Yang: Zeidler (2011), S. 4-7].

31.2 Elektromagnetismus als $U(1)$ Eichtheorie

Das einfachste Beispiel ist Maxwells Theorie des Elektromagnetismus, die als eine Eichtheorie mit der Eichgruppe $U(1) := \{e^{i\Theta} | \Theta \in \mathbb{R}\}$ beschrieben werden kann. Als Prinzipalbündel wählt man $P(M, U(1))$ und als assoziiertes Vektorbündel $E = P \times_{\rho} \mathbb{C}$,

wobei ρ die natürliche Identifikation eines Elements von $U(1)$ mit einer komplexen Zahl ist. Die Liegruppe $U(1)$ ist eindimensional und abelsch, also sind alle Strukturkonstanten $f_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ und man benötigt auch keine Gruppenindizes α, β . Weiter wählen wir für dieses Beispiel den topologisch trivialen Fall, bei dem P einfach der Produktraum $P(M, U(1)) = M \times U(1)$ ist, mit der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit M als Basismannigfaltigkeit, d.h. $M = \mathbb{R}^4$. Die Minkowski-Metrik sei mit $c = 1$ wie üblich $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale Zusammenhang 1-Form $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$, das Eichpotential, ist wegen der Trivialität des Prinzipalbündels global gültig.

Die lokale Krümmungs 2-Form \mathcal{F} , die Feldstärke, ist dann mit 30.4.21:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{A} \\ &= (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \otimes dx^\nu .\end{aligned}\quad (31.2.1)$$

Die Bianchi-2 Identität 30.4.24 schreibt sich wegen der abelschen Gruppenstruktur einfach als

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\mathcal{F} &= d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = d\mathcal{F} = d^2\mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \\ d\mathcal{F} &= d\left(\frac{1}{2!} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\right) = \frac{1}{2!} (\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2!} (\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} - \partial_\lambda \mathcal{F}_{\nu\mu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} - \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} - \partial_\mu \mathcal{F}_{\lambda\nu}) dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= (\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda}) dx^\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu = 0 \quad \Rightarrow \\ &\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 .\end{aligned}\quad (31.2.2)$$

In der Physik verwendet man anstelle von \mathcal{A} und \mathcal{F} das Eichpotential A und den Feldstärketensor F , die sich von \mathcal{A} und \mathcal{F} gerade um den Lie-Algebra-Faktor i unterscheiden:

$$\mathcal{A} =: iA \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} =: iF_{\mu\nu} .\quad (31.2.3)$$

Die Bianchi-2 Identität für $F_{\mu\nu}$ heißt auch Jacobi-Identität und liefert die beiden 'geometrischen' Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 .\quad (\text{Gauß-Faradaysches Gesetz})\quad (31.2.4)$$

Die Komponenten des dreidimensionalen elektrischen Feld-Vektors $E = E^i \partial_i$ und des dreidimensionalen magnetischen Feld-Pseudovektors $B = B^i \partial_i$, mit $i, j, k \in \{1, \dots, 3\}$, werden in der Physik als spezielle Komponenten des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ definiert. Das heißt, E und B sind keine Vierervektoren!

$$E^i := E_i := F^{0i} ,\quad (31.2.5)$$

$$B^i := B_i := \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} . \quad (31.2.6)$$

Aufgrund unserer Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ ist $F_{0i} = -F^{0i}$ und $F_{jk} = F^{jk}$.

Die Beziehung zwischen B^i und F_{jk} kann umgekehrt werden, denn für das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} in \mathbb{R}^3 gilt

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l = \eta_j^l \eta_k^m - \eta_j^m \eta_k^l \quad \Rightarrow \quad (31.2.7)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} B^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{ilm} F_{lm} = \frac{1}{2} (\eta_j^l \eta_k^m - \eta_j^m \eta_k^l) F_{lm} \\ &= \frac{1}{2} (F_{jk} - F_{kj}) = F_{jk} . \end{aligned} \quad (31.2.8)$$

$$B^1 = F_{23} , \quad B^2 = F_{31} , \quad B^3 = F_{12} \quad \Rightarrow \quad (31.2.9)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (31.2.10)$$

Der entsprechende kontravariante Feldstärketensor ergibt sich zu

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\mu'} F_{\mu'\nu'} \eta^{\nu'\nu} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (31.2.11)$$

Die Bianchi-2 Identität 31.2.2 liefert die ersten beiden Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die also rein geometrischer Natur sind.

Setzt man jetzt in 31.2.4 $\lambda = 0$, $\mu = j$, $\nu = k$ so folgt

$$0 = \partial_0 F_{jk} + \partial_k F_{0j} + \partial_j F_{k0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_0 F_{jk} + \partial_k F_{0j} + \partial_j F_{k0}) = \partial_0 B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{0j} \\
&= \partial_0 B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} + \frac{1}{2}\epsilon^{ikj}\partial_j F_{0k} = \partial_0 B^i + \epsilon^{ijk}\partial_j F_{k0} \quad \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} B^i + (\vec{\nabla} \times \vec{E})^i . \quad (\text{Faradaysches Gesetz}) \quad (31.2.12)
\end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = i$, $\mu = j$, $\nu = k$ so folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} \quad \Rightarrow \\
0 &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki}) = \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_k F_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_j F_{ki} \\
&= \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{jki}\partial_i F_{jk} + \frac{1}{2}\epsilon^{kij}\partial_i F_{jk} = \partial_i B^i + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} \\
&= \partial_i B^i + \epsilon^{ijk}\partial_i F_{jk} = \partial_i B^i + 2\partial_i B^i = 3\partial_i B^i \quad \Rightarrow \\
0 &= \partial_i B^i = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} . \quad (\text{Gaußsches Gesetz für Magnetfelder}) \quad (31.2.13)
\end{aligned}$$

Die beiden anderen Maxwell-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktional $\mathcal{S}[A]$:

$$\mathcal{S}[A] := \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) d^4 x := \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{i} \mathcal{A}_\nu j^\nu \right) d^4 x , \quad (31.2.14)$$

$$\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\nu j^\nu = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} F_{\alpha'\beta'} + A_\alpha \eta^{\alpha\beta} j_\beta . \quad (31.2.15)$$

Natürlich soll die Lagrangefunktion \mathcal{L} ein Skalar sein, aber daß \mathcal{L} nun im Fall der klassischen Elektrodynamik genau diese Form hat ist nicht theoretischen Überlegungen zu verdanken, sondern der Forderung nach Übereinstimmung mit den Experimenten. Inzwischen ist allerdings klar, daß die Elektrodynamik der klassische Grenzfall der Quantenelektrodynamik ist, und wenn man versucht die Lagrangefunktion der QED aufzustellen, so erhält man zusätzliche Einschränkungen an die Lagrangefunktion: dort würde etwa ein Term der Form $A_\nu A^\nu$ zu einer Masse der Photonen führen und Terme mit einer Kombination von A_ν und $\partial_\mu A_\nu$ in höherer als vierter Potenz würden die Theorie unrenormierbar machen.

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa 34.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (31.2.16)$$

Im Einzelnen ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \delta_\alpha^\nu \eta^{\alpha\beta} j_\beta = j^\nu .$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \eta^{\alpha\alpha'} \eta^{\beta\beta'} [(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha'}^\mu \delta_{\beta'}^\nu - \delta_{\beta'}^\mu \delta_{\alpha'}^\nu)] \\ &= -\frac{1}{4} [(\eta^{\mu\alpha'} \eta^{\nu\beta'} - \eta^{\nu\alpha'} \eta^{\mu\beta'}) F_{\alpha'\beta'} + F_{\alpha\beta} (\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu})] \\ &= -\frac{1}{4} [(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) + (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu})] = -F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} \stackrel{!}{=} j^\nu. \quad (\text{Gauß-Ampèresches Gesetz}) \quad (31.2.17)$$

Wie oben kann man dies wieder in Differentialgleichungen für \vec{E} und \vec{B} umschreiben. Mit $\nu = 0$ folgt

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \partial_i F^{0i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0. \quad (\text{Gaußsches Gesetz}) \quad (31.2.18)$$

Mit $\nu = i$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{i0}}{\partial t} + \partial_k F^{ik} &= j^i \quad \Rightarrow \\ -\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{lik} \partial_k B_l &= -\frac{\partial E^i}{\partial t} + \epsilon^{ikl} \partial_k B_l = j^i \quad \Rightarrow \\ (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i - \frac{\partial E^i}{\partial t} &= j^i. \quad (\text{Ampèresches Gesetz}) \end{aligned} \quad (31.2.19)$$

Nachtrag:

1. Aus dem Feldstärketensor lassen sich sofort zwei Invarianten bilden:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2). \quad (31.2.20)$$

Und mit dem Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ in \mathbb{R}^4 folgt die zweite Invariante:

$$F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = 4\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (31.2.21)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} \\ &= -[\vec{E}^2 + (E^1)^2 - (B^3)^2 - (B^2)^2 + (E^2)^2 - (B^3)^2 - (B^1)^2 \\ &\quad + (E^3)^2 - (B^2)^2 - (B^1)^2] = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2). \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu}^* := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} &= -F_{\mu\nu}^*F^{\nu\mu} \\ &= -[-\vec{B} \cdot \vec{E} - B^1E^1 - E^3B^3 - E^2B^2 - B^2E^2 - E^3B^3 \\ &\quad - E^1B^1 - B^3E^3 - E^2B^2 - E^1B^1] = 4\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad \square \end{aligned}$$

2. Aus dem Feldstärketensor läßt sich auch der Energie-Impulstensor für ein freies elektromagnetisches Feld konstruieren.

Lemma 31.2.2 *Sei die Lagrange-Dichte eines freien elektromagnetischen Feldes gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{EM}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (31.2.22)$$

dann läßt sich hieraus ein Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ konstruieren:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu A_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}. \quad (31.2.23)$$

Wenn es sich um ein abgeschlossenes System handelt, dann hängt \mathcal{L}_{EM} nicht explizit von den Koordinaten x^μ ab und es folgt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (31.2.24)$$

Dieser Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ ist nicht symmetrisch in μ und ν , er kann aber durch Addition eines divergenzfreien Zusatzterms symmetrisiert werden zu:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (31.2.25)$$

\tilde{T}^{00} ist hierbei die Energiedichte und wird daher auch als Hamiltondichte bezeichnet:

$$\mathcal{H}_{EM} := \tilde{T}^{00} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad (31.2.26)$$

Beweis: \mathcal{L}_{EM} hänge nicht explizit von den Koordinaten x^μ ab, also gilt

$$\partial^\nu \mathcal{L}_{EM} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial x_\nu} \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\partial^\nu \mathcal{L}_{EM} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu A_\alpha)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu}.$$

Für $\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\alpha}$ setzen wir die Lagrange-Gleichungen 31.2.16 ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \partial^\nu \mathcal{L}_{EM} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial^\nu (\partial_\mu A_\alpha) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \right) \partial^\nu A_\alpha \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \partial_\mu (\partial^\nu A_\alpha) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} \right) \partial^\nu A_\alpha \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) \right] - \partial_\mu (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$T^{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} (\partial^\nu A_\alpha) - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) \quad \text{mit} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \text{ bzw.}$$

$$T^{\mu\nu} := -F^{\mu\alpha} (\partial^\nu A_\alpha) - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) \quad \text{mit} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Dies ist ein schönes Ergebnis, doch findet sich heute häufig in der Literatur eine andere, symmetrische Form des Energie-Impulstensors, nämlich $\tilde{T}^{\mu\nu}$. Wie gelangt man nun von $T^{\mu\nu}$ nach $\tilde{T}^{\mu\nu}$? Hier kann uns ein altes, aber großartiges Lehrbuch der theoretischen Physik weiterhelfen, nämlich Landau u. Lifschitz (1963), S. 91, 94:

Wir addieren den Ausdruck $(\partial^\alpha A^\nu) F^\mu_\alpha$ zu $T^{\mu\nu}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu} &:= (\partial^\alpha A^\nu) F^\mu_\alpha + T^{\mu\nu} \\ &= (\partial^\alpha A^\nu) F^\mu_\alpha - (\partial^\nu A^\alpha) F^\mu_\alpha - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) \\ &= F^{\alpha\nu} F^\mu_\alpha - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}) \\ &= F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu - (g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{EM}). \end{aligned}$$

Tatsächlich erfüllt auch dieser symmetrisierte Energie-Impulstensor die gewünschte Divergenzfreiheit $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$, denn wenn keine Ladungen vorhanden sind, dann folgt mit 31.2.17

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\mu\alpha} = \partial^\alpha F^\mu_\alpha = 0 &\Rightarrow (\partial^\alpha A^\nu) F^\mu_\alpha = \partial^\alpha (A^\nu F^\mu_\alpha) \Rightarrow \\ \partial^\mu \partial^\alpha (A^\nu F^\mu_\alpha) = 0, &\quad \text{da } F^\mu_\alpha = -F_\alpha^\mu. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\alpha A^\nu) F^\mu_\alpha + \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\alpha (A^\nu F^\mu_\alpha) + \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Für die Hamiltondichte $\mathcal{H}_{EM} := \tilde{T}^{00}$ ergibt sich mit $F_\alpha^\nu = \eta^{\nu\rho} F_{\rho\alpha}$ und mit 31.2.20:

$$F_\alpha^\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EM} := \tilde{T}^{00} &= F^{0\alpha} F_\alpha^0 + (g^{00} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = F^{0\alpha} F_\alpha^0 + \frac{1}{2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \\ &= \vec{E}^2 + \frac{1}{2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \quad \square \end{aligned}$$

31.3 Yang-Mills $SU(n)$ Eichtheorie

Im Jahr 1954 erweiterten Yang und Mills das Konzept der Beschreibung der Elektrodynamik als einer $U(1)$ -Eichtheorie auf die nichtabelschen Liegruppen $SU(n)$. Ihr Ziel war eine mögliche Anwendung dieses Ansatzes auf die 'Starke Wechselwirkung'. Dieser erste Versuch wurde zunächst als erfolglos aufgegeben, weil die Austauschbosonen der Theorie masselos sein mußten, um die Eichinvarianz sicherzustellen. Erst als in den 1960'er Jahren durch die Arbeiten von Goldstone, Higgs u.a. ein Mechanismus gefunden war, wie die Eichbosonen durch *spontane Symmetriebrechung* Masse erhalten konnten, wurden die Arbeiten an den $SU(n)$ -Theorien wieder aufgenommen. Im Jahr 1967 formulierten Salam, Glashow und Weinberg die $SU(2)$ -Theorie der Schwachen Wechselwirkung, und ab 1969 entwickelten Gell-Mann, Fritsch und Leutwyler die Quantenchromodynamik (QCD) als eine $SU(3)$ -Eichtheorie. Doch erst mit dem Nachweis der Renormierbarkeit der quantisierten Yang-Mills-Theorien durch Gerardus 't Hooft Anfang der 1970'er Jahre fanden diese Theorien große Anerkennung und etablierten sich als *Standardmodell der Teilchenphysik*. Einen gewissen Abschluß fanden diese Forschungen als im Jahr 2012 am LHC-Beschleuniger des CERN der erste experimentelle Nachweis eines Higgs-Bosons gelang.

Wegen der massiven Nichtlinearitäten der Yang-Mills-Theorien erfolgen heute physikalische Untersuchung hierzu nicht mehr über störungstheoretische analytische Methoden, sondern numerisch über Gitterrechnungen (Gittereichtheorien). In der Mathematik sind die quantisierten Yang-Mills-Theorien ein aktuelles Forschungsgebiet und eines der berühmten, ungelösten Millennium-Probleme des 'Clay Mathematics Institute' (CMI) in Cambridge/Massachusetts.

Feynman startete einen ersten, aber erfolglosen Versuch einer Quantisierung der Gravitation als einer Yang-Mills-Theorie. Erst Ashtekar, Smolin und Rovelli gelang auf diesem Weg Ende der 1980'er Jahre mit der sog. *Schleifenquantengravitation* (*Loop-Quantum-Gravity*, *LQG*) ein Durchbruch.

Wir wählen für dieses Beispiel wieder den topologisch trivialen Fall, bei dem P einfach der Produktraum $P(M, SU(n)) = M \times SU(n)$ ist, mit der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit M als Basismannigfaltigkeit, d.h. $M = \mathbb{R}^4$. Die Minkowski-Metrik sei mit $c = 1$ wie üblich $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Die lokale Zusammenhang 1-Form $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \mathcal{A}_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu$, das Yang-Mills-Potential, ist wegen der Trivialität des Prinzipalbündels global gültig. Dabei haben wir \mathcal{A}_μ als eine \mathfrak{g} -wertige Form wieder nach der Basis $\{T_\alpha\}$ von $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ entwickelt. Die lokale Krümmungs 2-Form \mathcal{F} , die Yang-Mills-Feldstärke, ist dann mit 30.4.26:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \mathcal{F}_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha dx^\mu \otimes dx^\nu \quad \text{mit} \quad (31.3.1)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha \mathcal{A}_\mu^\beta \mathcal{A}_\nu^\gamma . \quad (31.3.2)$$

Die Bianchi-2 Identität 30.4.24 ist unverändert gültig:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} := d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 . \quad (31.3.3)$$

Die beiden anderen Yang-Mills-Gleichungen sind dynamischer Natur und folgen aus dem Extremum des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}[\mathcal{A}]$:

$$\mathcal{S}[\mathcal{A}] := \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) d^4x := \int_{\mathbb{R}^4} \left(\frac{1}{4} \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) + \text{tr}(\mathcal{A}_\nu \mathcal{J}^\nu) \right) d^4x , \quad (31.3.4)$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) = \frac{1}{4} \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \mathcal{F}^{\mu\nu\beta} T_\beta) + \text{tr}(\mathcal{A}_\nu^\alpha T_\alpha \mathcal{J}^{\nu\beta} T_\beta) . \quad (31.3.5)$$

Hierbei erfolgt die Spurbildung über die Matrix $T_\alpha T_\beta \in \mathfrak{su}(n)$. Diese Spurbildung ergibt eine Invariante, da sie in $\mathfrak{su}(n)$ ja gerade das inneres Produkt $g_{\mathfrak{g}}$ ist (26.5.6). Wir wählen die T_α jetzt orthonormal, d.h.

$$\text{tr}(T_\alpha T_\beta) = g_{\mathfrak{g},\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (31.3.6)$$

und erhalten für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_\nu, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) = \frac{1}{4} (\mathcal{F}_{\mu\nu}^\alpha \mathcal{F}^{\mu\nu}_\alpha) + \mathcal{A}_\nu^\alpha \mathcal{J}_\alpha^\nu.$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten dann (siehe etwa 34.1.17):

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} \stackrel{!}{=} 0. \quad (31.3.7)$$

Im Einzelnen ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} &= -\partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} \mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g}, \zeta\zeta'} \mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}^{\zeta'} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g}, \zeta\zeta'} \mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}^{\zeta'} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial (\partial_\kappa \mathcal{A}_\lambda^\zeta - \partial_\lambda \mathcal{A}_\kappa^\zeta)}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\alpha)} \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu \left((\delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu \delta_\alpha^\zeta - \delta_\kappa^\nu \delta_\lambda^\mu \delta_\alpha^\zeta) \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu [(\mathcal{F}^{\mu\nu}_\alpha - \mathcal{F}^{\nu\mu}_\alpha)] = -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}_\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} \left(\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta + \mathcal{A}_\nu^\alpha \mathcal{J}_\alpha^\nu \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} [\mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g}, \zeta\zeta'} \mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}^{\zeta'}] + \mathcal{J}_\alpha^\nu \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} [\mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta] g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} g_{\mathfrak{g}, \zeta\zeta'} \mathcal{F}_{\kappa'\lambda'}^{\zeta'} + \mathcal{J}_\alpha^\nu \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\nu^\alpha} [\mathcal{F}_{\kappa\lambda}^\zeta] \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta + \mathcal{J}_\alpha^\nu \\ &= \frac{1}{2} [f_{\beta\gamma}^\zeta \delta_\kappa^\nu \delta_\alpha^\beta \mathcal{A}_\lambda^\gamma + f_{\beta\gamma}^\zeta \delta_\lambda^\nu \delta_\alpha^\gamma \mathcal{A}_\kappa^\beta] \mathcal{F}^{\kappa\lambda}_\zeta + \mathcal{J}_\alpha^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [f_{\alpha\beta}{}^\zeta \delta_\kappa^\nu \mathcal{A}_\lambda{}^\beta + f_{\beta\alpha}{}^\zeta \delta_\lambda^\nu \mathcal{A}_\kappa{}^\beta] \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_\zeta + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= \frac{1}{2} [-f_{\beta\alpha}{}^\zeta \delta_\kappa^\nu \mathcal{A}_\lambda{}^\beta + f_{\beta\alpha}{}^\zeta \delta_\lambda^\nu \mathcal{A}_\kappa{}^\beta] \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_\zeta + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= \frac{1}{2} f_{\beta\alpha}{}^\zeta [\delta_\lambda^\nu \mathcal{A}_\kappa{}^\beta - \delta_\kappa^\nu \mathcal{A}_\lambda{}^\beta] \mathcal{F}^{\kappa\lambda}{}_\zeta + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= \frac{1}{2} f_{\beta\alpha}{}^\zeta [\mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_\zeta - \mathcal{A}_\lambda{}^\beta \mathcal{F}^{\nu\lambda}{}_\zeta] + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= \frac{1}{2} f_{\beta\alpha}{}^\zeta [\mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_\zeta - \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\nu\kappa}{}_\zeta] + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= f_{\beta\alpha}{}^\zeta \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu}{}_\zeta + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha = f_{\beta\alpha\zeta} \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha \\
&= -f_{\beta\zeta\alpha} \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha .
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir in der letzten Zeile von der totalen Antisymmetrie von $f_{\beta\alpha\zeta}$ Gebrauch gemacht (siehe 26.5.7).

Wenn man jetzt die Lagrange-Gleichung mit dem zu T_α dualen $\mathfrak{su}(n)$ -Basisvektor T^α multipliziert, so folgt

$$\begin{aligned}
(-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\alpha)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu{}^\alpha}) T^\alpha &= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu}{}_\alpha T^\alpha - f_{\beta\zeta\alpha} \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} T^\alpha + \mathcal{J}^\nu{}_\alpha T^\alpha \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu\alpha} T_\alpha - \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} f_{\beta\zeta}{}^\alpha T_\alpha + \mathcal{J}^{\nu\alpha} T_\alpha \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - \mathcal{A}_\kappa{}^\beta \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} [T_\beta, T_\zeta] + \mathcal{J}^\nu \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}_\kappa{}^\beta T_\beta, \mathcal{F}^{\kappa\nu\zeta} T_\zeta] + \mathcal{J}^\nu \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}_\kappa, \mathcal{F}^{\kappa\nu}] + \mathcal{J}^\nu \\
&= -\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - [\mathcal{A}, \mathcal{F}]^\nu + \mathcal{J}^\nu \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} := \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}]^\nu \stackrel{!}{=} \mathcal{J}^\nu . \quad (31.3.8)$$

Häufig findet man diese Yang-Mills Gleichung auch in einer Formulierung mit dem Hodge-Stern-Operator (siehe Kapitel 25.1).

Mit 25.1.21 läßt sich jetzt das Yang-Mills Wirkungsfunktional $\mathcal{S}[\mathcal{A}]$ sehr kompakt schreiben als

$$\mathcal{S}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}) + \int_{\mathbb{R}^4} \text{tr}(\mathcal{A} \wedge \star \mathcal{J}) . \quad (31.3.9)$$

Satz 31.3.1 Die Yang-Mills Gleichung 31.3.8 lautet dann:

$$-\mathcal{D}(\star\mathcal{F}) \stackrel{!}{=} \star\mathcal{J} . \quad (31.3.10)$$

Mit dem Hodge-adjungierten Operator \mathcal{D}^\dagger läßt sich dies auch schreiben als

$$-\mathcal{D}^\dagger\mathcal{F} = \mathcal{J} . \quad (31.3.11)$$

Beweis: In $M = \mathbb{R}^4$ sind \mathcal{F} und $\star\mathcal{F}$ jeweils \mathfrak{g} -wertige 2-Formen und damit ist $\mathcal{D}(\star\mathcal{F})$ eine \mathfrak{g} -wertige 3-Form. Hierbei ergibt sich für \mathcal{D} angewandt auf eine \mathfrak{g} -wertige 2-Form $\eta = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ (siehe 30.4.22):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\eta &:= d\eta + [\mathcal{A}, \eta] := d\eta + (\mathcal{A} \wedge \eta - (-1)^2\eta \wedge \mathcal{A}) \\ &= d\eta + (\mathcal{A} \wedge \eta - \eta \wedge \mathcal{A}) \end{aligned}$$

und das können wir auch schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\eta &:= \mathcal{D}_\lambda(\eta_{\mu\nu})dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= (d_\lambda\eta_{\mu\nu} + (\mathcal{A}_\lambda\eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\mathcal{A}_\lambda)) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= (d_\lambda\eta_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha + (\mathcal{A}_\lambda{}^\beta T_\beta\eta_{\mu\nu}{}^\gamma T_\gamma - \eta_{\mu\nu}{}^\gamma T_\gamma\mathcal{A}_\lambda{}^\beta T_\beta) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= (d_\lambda\eta_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha + \mathcal{A}_\lambda{}^\beta\eta_{\mu\nu}{}^\gamma [T_\beta, T_\gamma]) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= (d_\lambda\eta_{\mu\nu}{}^\alpha + \mathcal{A}_\lambda{}^\beta\eta_{\mu\nu}{}^\gamma f_{\beta\gamma}{}^\alpha) T_\alpha dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu . \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\star\mathcal{F}) &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda(\star\mathcal{F})_{\mu_3\mu_4}dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\ &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda\left(\frac{\sqrt{|g|}}{2}\tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2}{}_{\mu_3\mu_4}\mathcal{F}_{\mu_1\mu_2}\right) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\ &= \frac{1}{3!}\mathcal{D}_\lambda\left(\frac{\sqrt{|g|}}{2}\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2}\right) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\ &= \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{|g|}}{2}\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2}) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} . \end{aligned}$$

Jetzt kann der Wert von λ im 4-Dimensionalen aufgrund der Antisymmetrie von $dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4}$ nur μ_1 oder μ_2 sein, also folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\star\mathcal{F}) &= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\frac{1}{2}(\epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_1}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2}) + \epsilon_{\mu_1\lambda\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_2}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2})) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{3!}\epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4}\mathcal{D}_{\mu_1}(\mathcal{F}^{\mu_1\mu_2}) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!} \epsilon_{\lambda\mu_2\mu_3\mu_4} \mathcal{J}^{\mu_2} dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!} (-\epsilon_{\mu_2\lambda\mu_3\mu_4} \mathcal{J}^{\mu_2}) dx^\lambda \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{3!} (-\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \mathcal{J}^{\mu_1}) dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_3} \wedge dx^{\mu_4} \\
&= -(\star\mathcal{J}) .
\end{aligned}$$

Für den Hodge-adjungierten Operator \mathcal{D}^\dagger in einer 4-dimensionalen Lorentzischen Mannigfaltigkeit gilt mit 25.1.25 und $m = 4$ und $\star\mathcal{F} \in \Omega^2(\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{g}$, d.h. $r = 2$:

$$\mathcal{D}^\dagger = (-1)^{mr+m} \star \mathcal{D} \star = \star \mathcal{D} \star ,$$

und damit folgt mit $m = 4$ und $\mathcal{J} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{g}$, d.h. $r = 1$:

$$-\mathcal{D}^\dagger(\mathcal{F}) = -\star \mathcal{D} \star (\mathcal{F}) = \star \star \mathcal{J} = (-1)^{1+r(m-r)} \mathcal{J} = \mathcal{J} . \quad \square$$

32 Charakteristische Klassen

32.1 Shiing-Shen Chern (1911 - 2004)

Shiing-Shen Chern wurde 1911 in Jiaxing in der Provinz Zhejiang in China geboren. Im Jahr 1926 begann der 15-jährige Chern sein Studium der Mathematik an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Nankai Universität in Tianjin und erwarb dort im Jahr 1930 seinen Bachelor. Danach arbeitete er als Assistent am Mathematischen Institut der Tsinghua University in Peking (Beijing). Im Jahr 1932 besuchte der Hamburger Mathematiker Wilhelm Blaschke die Tsinghua Universität, war von Chern sehr beeindruckt und lud diesen an die Universität Hamburg ein. Von 1934-1936 promovierte Chern bei Blaschke in Hamburg, danach schickte dieser Chern weiter zu Élie Cartan nach Frankreich. Im Jahr 1937 nahm Chern eine Professur an der Tsinghua Universität an und ging dann 1943 wegen des Krieges in China in die USA, wo er einen Platz am Institute for Advanced Study in Princeton fand. Dort arbeitete er insbesondere über die sog. *Charakteristischen Klassen* in der Differentialgeometrie. 1946 kehrte er nach Shanghai zurück, um dann schließlich 1949 erneut nach Princeton zu gehen. Von 1960 bis zu seiner Emeritierung 1979 arbeitete er an der University of California, Berkeley.

Bei seinen regelmäßigen Besuchen in China und Taiwan gründete Chern das Nankai-Institut für Mathematik in Tianjin (das heutige Chern-Institut für Mathematik) und ein mathematisches Forschungsinstitut in Taipei, Taiwan. Von 2000 an verbrachte Chern seine letzten Jahre in Tianjin, China.

Heinz Hopf, einer der Begründer der algebraischen Topologie, machte schon in den 1930'er Jahren darauf aufmerksam, daß die Mathematiker doch nach einem intrinsischen Beweis für den verallgemeinerten Satz von Gauß-Bonnet suchen sollten, der ohne eine Einbettung der Mannigfaltigkeit M in einen umgebenden Raum \mathbb{E}^{m+1} auskommt, da die Euler Charakteristik $\chi(M)$ als eine topologische Invariante nur von M abhängt. Es hat dann aber noch bis 1944 gedauert, bis Shiing-Shen Chern ein solcher intrinsischer Beweis des verallgemeinerten Gauß-Bonnet Satzes mittels der später nach ihm



Abbildung 32.1: Shiing-Shen Chern
K. Jacobs (1976), CC-BY-SA-2.0 de.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Shiing-Shen_Chern]

benannten *Chernschen Charakteristischen Klassen* gelang (Chern (1944)). Der Beweis von Chern findet sich z.B. in Spivak (1979), V, S. 385 ff.

Cherns Arbeiten erstrecken sich über das ganze Feld der Differentialgeometrie, am bekanntesten sind seine Beiträge zum *Satz von Gauß-Bonnet*, den *Charakteristischen Klassen (Chern Klassen)*, der *Chern-Simons Theorie* und den *Komplexen Mannigfaltigkeiten*. In seinen letzten Jahren warb er für das Studium der *Finsler Geometrie*.

Sehr schön und lesenswert ist der Nachruf von Chern und Chevalley auf ihren gemeinsamen Lehrer Élie Cartan (Chern u. Chevalley (1952)).

[Quelle: en.wikipedia: Shiing-Shen_Chern]

32.2 Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908 - 1988)

Pontrjagin wurde 1908 in Moskau geboren und war einer der einflußreichsten Mathematiker der Sowjetunion. Er verlor im Alter von 14 Jahren bei einer Gasofenexplosion sein Augenlicht. Dank der intensiven Unterstützung seiner Mutter Tatyana Andreevna, die ihrem Sohn mathematische Bücher und später auch Forschungspublikationen der Topologen Hopf, Whitney u.a. vorlas, konnte Pontrjagin Mathematik an der Moskauer Lomonossow-Universität studieren und wurde 1935 bei Alexandrow promoviert. Seit 1934 arbeitete er am Mathematischen Institut der sowjetischen Akademie der Wissenschaften, dem berühmten Steklow-Institut, und seit 1935 leitete er dort als Professor eine eigene Abteilung für Topologie und Funktionalanalysis.

Pontrjagin arbeitete jahrzehntelang auf dem Gebiet der algebraischen Topologie. Mit seinem Namen verbunden sind die Dualität von Homologiegruppen, eine Theorie der Charaktere für kommutative topologische Gruppen, Beiträge zur Theorie der Charakteristischen Klassen, Grundlagen der Kobordismtheorie. Im Jahr 1938 erschien sein klassisches Werk über Topologische Gruppen (siehe: Pontryagin (1966)). Später arbeitete er auf dem Gebiet der Theorie der Optimalen Steuerungen.

Zu seinen berühmtesten Schülern gehören Anosov, Boltyansky, Postnikov, Rokhlin und Zelikin.

Pontrjagin hatte einen bedeutenden Einfluß auf die sowjetische Wissenschaftspolitik, war der Chef eines Gremiums, das über das Erscheinen aller mathematischer Fachbücher entschied und arbeitete als Chefredakteur der wichtigsten sowjetischen mathematischen Zeitschrift *Matematitscheski sbornik*. Zudem vertrat er die Sowjetunion in der Internationalen Mathematischen Union (IMU).

Trotz seiner zahlreichen begabten russisch-jüdischen Schüler, die Pontrjagin persönlich alle förderte, engagierte er sich immer wieder mit Äußerungen und Initiativen gegen den von ihm so genannten *zionistischen Einfluß in der Wissenschaft*. Dies wurde etwa sehr deutlich, als er im Vorstand der IMU versuchte die Verleihung der Fields-Medaille im Jahr 1978 an den russisch-jüdischen Mathematiker Margulis zu verhindern - glücklicherweise erfolglos.

[Quelle: en.wikipedia: Lev_Pontryagin]

32.3 Grundgedanken zu Charakteristischen Klassen

In der Einführung zum Abschnitt Faserbündel (Kapitel 30.2) hatten wir geschrieben:

„In der theoretischen Physik haben wir es immer wieder mit Vektorfeldern, Tensorfeldern, Spinorfeldern und Symmetriefeldern über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit zu tun. Wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und $TM := \cup_{p \in M} T_p M$ der zugehörige Tangentialraum, dann kann man die Dynamik des Systems im einfachsten Fall in dem Produktraum $M \otimes TM$ beschreiben. Wenn nun aber im betrachteten System nichttriviale Randbedingungen vorliegen, dann kann es sein, daß das System nur noch

lokal als Produktraum beschrieben werden kann, daß aber *global* eine *Verdrehung* vorliegt. Als einfaches Beispiel einer solchen globalen Verdrehung sei hier das Möbiusband angeführt: die Mannigfaltigkeit M ist hier S^1 , eine Kreislinie, und darüber befindet sich als *Faser* das Intervall $[-1, 1]$. Ohne Verdrehung erhalten wir den Zylinder als Produktraum $S^1 \times [-1, 1]$, mit einer Verdrehung jedoch das Möbiusband, das nur noch lokal als Produktraum darstellbar ist.”

Jetzt stellt sich also die Frage: gibt es möglichst einfach berechenbare topologische Invarianten, um die *Nichttrivialität*, bzw. die *Verdrehung* eines Faserbündels zu beschreiben? Die Antwort lautet ja und die gesuchten topologischen Invarianten sind die sog. *Charakteristischen Klassen*, von denen die gebräuchlichsten *de Rham Kohomologie-Klassen* der Basis-Mannigfaltigkeit M sind.

Die ersten Überlegungen zu diesem Thema erfolgten 1935 von Stiefel und Whitney bei ihren Untersuchungen zu Vektorfeldern über Mannigfaltigkeiten. Im Jahr 1942 begann Pontrjagin an der Universität Moskau mit der Untersuchung der Homologie-Gruppen von Graßmann-Mannigfaltigkeiten.

Chern erweiterte die Untersuchungen zu den Charakteristischen Klassen, insb. zu den später nach ihm benannten *Chern Klassen*, auf eine sehr bedeutsame Weise und mit diesem Hilfsmittel gelang ihm 1944 der erste intrinsische Beweis des verallgemeinerten *Gauß-Bonnet Satzes* (siehe z.B. Spivak (1979), V, S. 385 ff.). Später führte Hirzebruch die Untersuchungen zu den Charakteristischen Klassen fort und konnte damit den *Riemann-Roch-Hirzebruch Satz* und den *Hirzebruchschen Signatursatz* beweisen (siehe Hirzebruch (1978)), beides Spezialfälle der erst später entdeckten *Atiyah-Singer-Indexsätze*, an dessen Entstehung Hirzebruch durch seine zahlreichen Arbeiten zusammen mit Atiyah großen Anteil hatte.

Wie in der algebraischen Topologie üblich, gibt es heute zahlreiche verschiedene Zugänge zu den Charakteristischen Klassen. Wir wählen hier die Methode von Chern-Weil, weil sie direkt mit den Krümmungen der Prinzipalbündel arbeitet, und so für Physiker mit Interessen an Eichtheorien einen recht intuitiven Einstieg ermöglicht. Die Idee von Chern und Weil ist recht einfach: wenn die Krümmung des Prinzipalbündels flach ist, dann ist das Prinzipalbündel mit Sicherheit trivial, also auch global eine Produktmannigfaltigkeit. Also sollte es eine Verbindung zwischen den lokalen Krümmungen und der Nichttrivialität des Prinzipalbündels geben. Diese Verbindung stellen die sog. *Invarianten Polynome* her.

Für theoretische Physiker eignen sich insbesondere die schönen Darstellungen von Nash u. Sen (1983), S. 200 ff., Nakahara (2003), S. 419 ff, Alvarez-Gaumé u. Ginsparg (1985), Eguchi u. a. (1980) und Bär (2011), denen wir hier folgen. Gelegentlich greifen wir auch auf die mathematischen Grundlagenwerke von Kobayashi u. Nomizu (1969), S. 293 ff. und Gilkey (1995), S. 121 ff. zurück. Umfassende mathematische Grundlagenwerke zu den Charakteristischen Klassen sind Milnor u. Stasheff (1974) und Bott u. Tu (1982), S. 266 ff.

Wir beschränken unsere Darstellung hier im Wesentlichen auf die Charakteristischen Klassen, die im *Gauß-Bonnet-Satz* und den einfachsten *Atiyah-Singer-Indexsätzen* vor-

kommen - das sind die Chern-Klassen, Chern-Charaktere, Pontrjagin-Klassen, Todd-Klassen, \hat{A} -Klassen und die Euler-Klassen.

32.4 Der Chern-Weil Satz

Definition 32.4.1 Sei G eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ der invertierbaren, komplexen $n \times n$ Matrizen und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. Dann wird I^r definiert als der Vektorraum der symmetrischen, G -invarianten, r -linearen Funktionen auf \mathfrak{g} :

$$I^r(G) := \{ \tilde{P} \mid \tilde{P} : \otimes^r \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C} \}, \quad \text{mit} \quad (32.4.1)$$

$$\tilde{P}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_r) = \tilde{P}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_r), \quad a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{g}, \quad (32.4.2)$$

$$\tilde{P}(Ad_g a_1, \dots, Ad_g a_r) = \tilde{P}(g^{-1} a_1 g, \dots, g^{-1} a_r g) = \tilde{P}(a_1, \dots, a_r), \quad g \in G. \quad (32.4.3)$$

Seien $\tilde{P} \in I^p(G)$ und $\tilde{Q} \in I^q(G)$, dann läßt sich ein Produkt $I^p(G) \otimes I^q(G) \rightarrow I^{p+q}(G)$ definieren

$$\tilde{P}\tilde{Q}(a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) := \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\pi} \tilde{P}(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(p)}) \tilde{Q}(a_{\pi(p+1)}, \dots, a_{\pi(p+q)}) \quad (32.4.4)$$

und mit diesem Produkt ist $I^*(G) := \bigoplus_{r \geq 0} I^r(G)$ eine Algebra.

Sei $\tilde{P} \in I^r(G)$, dann heißt

$$P(a) := \tilde{P}(a, \dots, a) \quad \text{mit } a \in \mathfrak{g} \quad (32.4.5)$$

ein Ad G invariantes Polynom, oder kurz invariantes Polynom.

Diese Definitionen kommen hier etwas unvermittelt. Ihre Sinnhaftigkeit und Mächtigkeit wird sich erst im folgenden erschließen. Insbesondere ist die geforderte Symmetrie von \tilde{P} , wie wir sogleich sehen werden, für den Beweis des Satzes von Chern-Weil notwendig.

Warum wird $P \in I^r(G)$ als ein Polynom bezeichnet? Nun, $\tilde{P} \in I^r(G)$ ist eine multilineare Funktion und wenn wir $\tilde{P}(ta, \dots, ta)$ mit $t \in \mathbb{R}$ nach t entwickeln erhalten wir ein Polynom vom Grad r in t .

Umgekehrt kann man auch aus $P \in I^r(G)$ wieder $\tilde{P} \in I^r(G)$ gewinnen. Man entwickle

$$P(t_1 a_1 + \dots + t_r a_r) = \tilde{P}(t_1 a_1 + \dots + t_r a_r, \dots, t_1 a_1 + \dots + t_r a_r)$$

nach den t_i . Dann ist

$$\tilde{P}(a_1, \dots, a_r) = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial t^1 \dots \partial t^r} P(t_1 a_1 + \dots + t_r a_r) \Big|_{t_1 = \dots = t_r = 1}. \quad (32.4.6)$$

Diese Konstruktion heißt *Polarisation* von P .

Wir sind nun aber noch nicht fertig mit den vorbereitenden Definitionen, denn was im Zusammenhang mit den Chern-Klassen wirklich interessiert, sind invariante Polynome von lokalen Krümmungsformen, bzw. in der Sprache der Physiker, von Yang-Mills-Feldstärken. Diese Krümmungsformen sind nun aber nicht einfach nur Elemente aus \mathfrak{g} , sondern eben zugleich Differentialformen. Daher verallgemeinert man die obigen Definitionen von invarianten Polynomen auf invariante Polynome von \mathfrak{g} -wertigen Differentialformen.

Definition 32.4.2 Sei (P_M, M, π, G, G) ein Prinzipalbündel über der Mannigfaltigkeit M mit der Strukturgruppe G , welches eine Liegruppe über \mathbb{C} sei. Statt einem Prinzipalbündel P_M könnten wir ebenso ein Vektorbündel E_M mit der Strukturgruppe G nehmen. Sei \mathcal{A} eine \mathfrak{g} -wertige p -Form auf M , d.h.

$$\mathcal{A} \in \Omega^p(M) \times \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad \mathcal{A} = T^\alpha \eta_\alpha, \quad (32.4.7)$$

wobei die T^α eine Basis von \mathfrak{g} bilden und die $\eta_\alpha \in \Omega^p(M)$. Da die \tilde{P} multilineare Funktionen sind, genügt es die folgende Erweiterung von \tilde{P} auf \mathfrak{g} -wertige p -Formen des Typs $\mathcal{A}_i = X_i \eta_i$ mit $X_i \in \mathfrak{g}$ und $\eta_i \in \Omega^{p_i}$ mit $1 \leq i \leq r$ zu betrachten:

$$\tilde{P}(X_1 \eta_1, \dots, X_r \eta_r) := \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}(X_1, \dots, X_r), \quad (32.4.8)$$

$$P(X\eta) := \eta \wedge \dots \wedge \eta P(X) = \eta \wedge \dots \wedge \eta \tilde{P}(X, \dots, X). \quad (32.4.9)$$

Den Kommutator der \mathfrak{g} -wertigen p -Form $\mathcal{A} = X\eta$ und der \mathfrak{g} -wertigen p_i -Formen $\mathcal{B}_i = X_i \eta_i$ definiert man dann als:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}, \mathcal{B}_i] &:= \eta \wedge \eta_i [X, X_i] = X X_i \eta \wedge \eta_i - X_i X \eta \wedge \eta_i \\ &= X X_i \eta \wedge \eta_i - (-1)^{pp_i} X_i X \eta_i \wedge \eta. \end{aligned} \quad (32.4.10)$$

Dabei ist $\eta \wedge \eta = 0$ für p -Form mit ungeradem p , siehe 11.1.13.

Nach diesen Definitionen können wir jetzt den zentralen *Satz von Chern und Weil* beweisen. Wir folgen im Beweis Nakahara (2003), S. 422, weil dieser Beweis im Gegensatz zu vielen rein mathematisch orientierten Darstellungen mit der *lokalen* Zusammenhangs-1-Form \mathcal{A} (dem Yang-Mills-Potential), und der *lokalen* Krümmungs-2-Form \mathcal{F} (der Yang-Mills-Feldstärke) arbeitet, was Physikern üblicherweise näher liegt, als die entsprechenden *globalen* Formen.

Satz 32.4.3 (Chern-Weil) 1. Seien P ein invariantes Polynom von \mathfrak{g} -wertigen Differentialformen und \mathcal{F} eine Krümmungs-2-Form, dann gilt

$$dP(\mathcal{F}) = 0. \quad (32.4.11)$$

2. Sei $[P]$ die de-Rham-Kohomologie-Klasse von P , dann werden die Krümmungs-2-Formen \mathcal{F} und \mathcal{F}' , die zu den Zusammenhangs-1-Form \mathcal{A} und \mathcal{A}' gehören, durch P in die gleiche Klasse $[P]$ abgebildet, d.h. $P(\mathcal{F}) - P(\mathcal{F}')$ ist exakt.

Beweis: 1. Wegen der Linearität von d genügt es, die Behauptung für ein invariantes Polynom \tilde{P}_r vom Grad r zu beweisen.

Seien $g(t) = \exp(tX) \in G$ mit $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{g}$ dann folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_r(g(t)^{-1}X_1g(t), \dots, g(t)^{-1}X_rg(t)) &= \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_r) \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}_r(g(t)^{-1}X_1g(t), \dots, g(t)^{-1}X_rg(t)) \Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(X_1, \dots, -XX_i + X_iX, \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_r) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (32.4.12)$$

Seien wie oben $\mathcal{A} = X\eta$ eine \mathfrak{g} -wertige p -Form und $\mathcal{B}_i = X_i\eta_i$ \mathfrak{g} -wertige p_i -Formen, dann folgt:

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{i-1}, [\mathcal{B}_i, \mathcal{A}], \mathcal{B}_{i+1}, \dots, \mathcal{B}_r) \\ &= \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{i-1} \wedge \eta_i \wedge \eta \wedge \eta_{i+1} \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_{i-1}, X_iX, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &\quad - (-1)^{pp_i} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{i-1} \wedge \eta \wedge \eta_i \wedge \eta_{i+1} \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_{i-1}, XX_i, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &= (-1)^{p(p_1+\dots+p_i)} \eta \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_{i-1}, X_iX, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &\quad - (-1)^{p(p_1+\dots+p_i)} \eta \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_{i-1}, XX_i, X_{i+1}, \dots, X_r) \\ &= (-1)^{p(p_1+\dots+p_i)} \eta \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r \tilde{P}_r(X_1, \dots, X_{i-1}, [X_i, X], X_{i+1}, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Mit 32.4.12 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(X_1, \dots, [X_i, X], \dots, X_r) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{p(p_1+\dots+p_i)} \tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{i-1}, [\mathcal{B}_i, \mathcal{A}], \mathcal{B}_{i+1}, \dots, \mathcal{B}_r) \end{aligned} \quad (32.4.13)$$

Als nächstes soll $d\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ berechnet werden. Dazu bemerken wir:

$$\begin{aligned} d(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{p_i(p_1+\dots+p_{i-1})} ((d\eta_i) \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{i-1} \wedge \eta_{i+1} \wedge \dots \wedge \eta_r) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_i+1)(p_1+\dots+p_{i-1})} (-1)^{p_i(p_1+\dots+p_{i-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{i-1} \wedge (d\eta_i) \wedge \eta_{i+1} \wedge \dots \wedge \eta_r) \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_1 + \dots + p_{i-1})} (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{i-1} \wedge (d\eta_i) \wedge \eta_{i+1} \wedge \dots \wedge \eta_r) . \end{aligned}$$

Also ist

$$d\tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{(p_1 + \dots + p_{i-1})} \tilde{P}_r(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{i-1}, d\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_{i+1}, \dots, \mathcal{B}_r) . \quad (32.4.14)$$

Jetzt seien alle $\mathcal{B}_i = \mathcal{F}$, also gleich der Krümmungs-2-Form, also $p_i = 2$, und \mathcal{A} sei die entsprechende Zusammenhangs-1-Form, also $p = 1$. Dann folgt

$$d\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}, d\mathcal{F}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) .$$

32.4.13 schreibt sich in diesem Fall mit $[\mathcal{F}, \mathcal{A}] = -[\mathcal{A}, \mathcal{F}]$ (siehe 30.4.14) als

$$0 = \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}, [\mathcal{F}, \mathcal{A}], \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) = - \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}, [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) .$$

Dies subtrahieren wir von $d\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F})$ und erhalten mit $\mathcal{DF} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}]$ (siehe 30.4.22):

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}, d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) \\ &= \sum_{i=1}^r \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}, \mathcal{DF}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}) = 0 , \end{aligned} \quad (32.4.15)$$

weil $\mathcal{DF} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ ist - dies ist ja gerade die Bianchi-Identität (30.4.24).

2. Seien \mathcal{F} und \mathcal{F}' , zwei Krümmungs-2-Formen und \mathcal{A} und \mathcal{A}' die entsprechende Zusammenhangs-1-Formen. Dann kann man eine zwischen \mathcal{A} und \mathcal{A}' interpolierende Zusammenhangs-1-Form \mathcal{A}_t definieren:

$$\mathcal{A}_t := \mathcal{A} + t\Theta := \mathcal{A} + t(\mathcal{A}' - \mathcal{A}) \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 1 . \quad (32.4.16)$$

Die \mathcal{A}_t entsprechende Krümmungs-2-Form \mathcal{F}_t ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= d\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t = d(\mathcal{A} + t\Theta) + (\mathcal{A} + t\Theta) \wedge (\mathcal{A} + t\Theta) \\ &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + td\Theta + t(\Theta \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \Theta) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \\ &= \mathcal{F} + t(d\Theta + \mathcal{A} \wedge \Theta + \Theta \wedge \mathcal{A}) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \\ &= \mathcal{F} + t(d\Theta + [\mathcal{A}, \Theta]) + t^2(\Theta \wedge \Theta) \end{aligned}$$

$$= \mathcal{F} + t\mathcal{D}\Theta + t^2(\Theta \wedge \Theta) . \quad (32.4.17)$$

Im nächsten Schritt wird jetzt von der Symmetrie von \tilde{P} in seinen Argumenten Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_r(\mathcal{F}_t) &= \frac{d}{dt}\tilde{P}_r(\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta + 2t\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + 2rt\tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) . \end{aligned} \quad (32.4.18)$$

Nun muß man aber sorgfältig zwischen $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ und $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t$ unterscheiden, denn für $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t$ gilt die Bianchi-Identität (30.4.24)

$$\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{F}_t = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] ,$$

während man für $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ findet:

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = [\mathcal{A} - \mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = -t[\Theta, \mathcal{F}_t] = t[\mathcal{F}_t, \Theta] . \quad (32.4.19)$$

Man beachtet, daß Θ eine 1-Form ist und \mathcal{F}_t eine 2-Form und erhält

$$d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(d\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (-1)(r-1)\tilde{P}_r(\Theta, d\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) .$$

Nun kann man 32.4.13 verwenden, diesmal mit $\mathcal{B}_1 = \Theta$ und $\mathcal{B}_2 = \dots = \mathcal{B}_r = \mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{pp_1}\tilde{P}_r([\Theta, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + \sum_{i=2}^r (-1)^{p(p_1+\dots+p_i)}\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{F}_t, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\Theta, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (-1)\sum_{i=2}^r \tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{F}_t, \mathcal{A}], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\mathcal{A}, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + \sum_{i=2}^r \tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t, [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= (-1)\tilde{P}_r([\mathcal{A}, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{P}_r([\mathcal{A}, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) , \end{aligned} \quad (32.4.20)$$

wobei $[\Theta, \mathcal{A}] = [\mathcal{A}, \Theta]$ und $[\mathcal{F}_t, \mathcal{A}] = -[\mathcal{A}, \mathcal{F}_t]$ (siehe 30.4.14) und die Symmetrie von \tilde{P} angewandt wurde, und zum Schluß noch $+0 = -0$.

Dies addiert man zu $d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t)$ und erhält mit $\mathcal{D}\mathcal{F}_t = d\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t]$ (siehe 30.4.22):

$$d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{D}\mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) . \quad (32.4.21)$$

Für $\mathcal{D}\mathcal{F}_t$ setzt man 32.4.19 ein und erhält

$$d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)t\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{F}_t, \Theta], \dots, \mathcal{F}_t). \quad (32.4.22)$$

Nun kann man sich 32.4.20 statt mit \mathcal{A} auch mit Θ aufschreiben, denn beides sind ja 1-Formen:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{P}_r([\Theta, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\Theta, \mathcal{F}_t], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= \tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta + \Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{F}_t, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \\ &= 2\tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{F}_t, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \Rightarrow \\ &\quad -(r-1)t\tilde{P}_r(\Theta, [\mathcal{F}_t, \Theta], \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = 2t\tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Damit schreibt sich 32.4.22 als

$$d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) + 2t\tilde{P}_r(\Theta \wedge \Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t).$$

Dies vergleicht man mit 32.4.18 und findet

$$\frac{d}{dt}P_r(\mathcal{F}_t) = r d\tilde{P}_r(\Theta, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t). \quad (32.4.23)$$

Wenn man dies nun von $t = 0$ bis $t = 1$ integriert folgt:

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = P_r(\mathcal{F}_1) - P_r(\mathcal{F}_0) = d \left(r \int_0^1 \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \dots, \mathcal{F}_t) \right). \quad (32.4.24) \quad \square$$

Damit unterscheiden sich $P_r(\mathcal{F}')$ und $P_r(\mathcal{F})$ nur um eine exakte Form und liegen somit in der selben Klasse $[P]$.

Definition 32.4.5 Sei (P_M, M, π, G, G) ein Prinzipalbündel über der Mannigfaltigkeit M mit der Strukturgruppe G , welches eine Liegruppe über \mathbb{C} sei, oder ein entsprechendes Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) , sei P ein invariantes Polynom von \mathfrak{g} -wertigen Differentialformen, dann heißt die de-Rham-Kohomologie-Klasse $[P]$ die charakteristische Klasse $\chi(P)$, bzw. ausführlicher geschrieben $\chi_{P_M}(P)$, bzw. $\chi_{E_M}(P)$.

Der Chern-Weil Satz zeigt also, daß es eine Abbildung von der Algebra der invarianten Polynome \mathfrak{g} -wertiger Differentialformen $I^*(G)$ in die Algebra der de-Rham-Kohomologie-Klassen $H^*(M)$ gibt. André Weil hat gezeigt, daß diese Abbildung tatsächlich ein Homomorphismus ist und bezüglich des Rücktransports (pullback) von Bündelabbildungen auch die Eigenschaft der *Natürlichkeit* aufweist:

Satz 32.4.6 (Weil Homomorphismus) 1. Sei $\chi(P)$ eine charakteristische Klasse auf einem Prinzipalbündel (P_M, M, π, G, G) , oder einem entsprechenden Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) , dann ist die Abbildung

$$\chi : I^*(G) \rightarrow H^*(M) \quad (32.4.25)$$

ein Homomorphismus. (Man unterscheide hier das Prinzipalbündel P_M vom invarianten Polynom P .)

2. Seien P_M das Prinzipalbündel (P_M, M, π, G, G) , oder E_M ein entsprechenden Vektorbündel, und sei $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Basismannigfaltigkeiten, dann gilt für die charakteristischen Klassen des Prinzipalbündels P_M und des sog. Rücktransportbündel $P_N := f^*P_M$ die Eigenschaft der sog. Natürlichkeit:

$$\chi_{f^*P_M} = f^* \chi_{P_M} . \quad (32.4.26)$$

Beweis: 1. Seien $P_r \in I^r(G)$, $P_s \in I^s(G)$ und sei eine \mathfrak{g} -wertige Krümmungs-2-Form \mathcal{F} gegeben als $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha T_\alpha$ mit $\mathcal{F}^\alpha \in \Omega^2(M)$ und $T_\alpha \in \mathfrak{g}$, dann folgt für das Produkt der r -Form P_r mit der s -Form P_s aufgrund von 32.4.4:

$$\begin{aligned} P_r P_s(\mathcal{F}) &= \frac{1}{(r+s)!} \mathcal{F}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{F}^{\alpha_r} \wedge \mathcal{F}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{F}^{\beta_s} \\ &\quad \cdot \tilde{P}_r(T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}) \tilde{P}_s(T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_s}) \\ &= P_r(\mathcal{F}) \wedge P_s(\mathcal{F}) . \end{aligned}$$

Da $P_r(\mathcal{F}) \in H^r(M)$ und $P_s(\mathcal{F}) \in H^s(M)$ und $P_r P_s(\mathcal{F}) \in H^{r+s}(M)$ ist die Abbildung χ ein Homomorphismus.

2. Sei \mathcal{A} eine Zusammenhangs-1-Form auf P_M , dann ist die rücktransportierte Form $f^*\mathcal{A}$ eine Zusammenhangs-1-Form auf dem Rücktransportbündel f^*P_M , denn:

auf zwei überlappenden Karten U_i und U_j von M gilt mit der Kartenwechselfunktion t_{ij} (siehe 30.4.8):

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} ;$$

für $f^*\mathcal{A}_j$ gilt dann auf den überlappenden Karten $f^{-1}(U_i)$ und $f^{-1}(U_j)$ von N :

$$f^*(\mathcal{A}_j) = f^*(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}) = f^*(t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij}) + f^*(t_{ij}^{-1} dt_{ij}) ,$$

da f^* linear ist. Weiter folgt mit $f^*(\psi \wedge \omega) = f^*(\psi) \wedge f^*(\omega)$ (siehe 11.2.5) und $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$ (siehe 11.3.4):

$$f^*(\mathcal{A}_j) = f^*(t_{ij}^{-1})(f^*\mathcal{A}_i)f^*(t_{ij}) + f^*(t_{ij}^{-1})df^*(t_{ij}) ,$$

womit also auch $f^*\mathcal{A}_j$ die Kompatibilitätsbedingung einer Zusammenhangs-1-Form auf dem Rücktransportbündel f^*P_M erfüllt. Ebenso folgt für den Rücktransport der Krümmungs-2-Form $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$

$$f^*(\mathcal{F}) = f^*(d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) = f^*(d\mathcal{A}) + f^*(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$$

$$= df^*(\mathcal{A}) + f^*(\mathcal{A}) \wedge f^*(\mathcal{A}) .$$

Damit folgt dann für das invariante Polynom P_r

$$f^*(P(\mathcal{F})) = P(f^*(\mathcal{F})) \quad \Rightarrow \quad f^* \chi_{P_M}(P) = \chi_{f^*P_M}(P) . \quad \square$$

Der zweite Punkt des obigen Beweises hat die schöne Folge, daß die charakteristischen Klassen von trivialen Prinzipal- oder Vektorbündeln über einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M selbst trivial sind, d.h. daß $\chi_{P_M}[P] \simeq \mathbb{1}$ ist, denn:

sei (P_M, M, π, G, G) ein triviales Prinzipalbündel über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten M und f die Abbildung von M in einen Punkt $p_0 \in M$, also $f : M \rightarrow \{p_0\}$. Dann ist natürlich das Prinzipalbündel $(P_{\{p_0\}}, \{p_0\}, \pi, G, G)$ über dem Punkt $\{p_0\}$ ein triviales Prinzipalbündel, die entsprechende Krümmungs-2-Form \mathcal{F} ist die Identität und die entsprechende charakteristische Klasse $\chi_{\{p_0\}} = 1$, d.h. ist trivial. Daraus folgt:

$$\chi_{P_M}(P) = \chi_{f^*\{p_0\}}(P) = f^* \chi_{\{p_0\}}(P) \simeq \mathbb{1} . \quad (32.4.27)$$

32.5 Chern-Klassen

Chern geht von einem komplexen Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) aus, dessen Faser $F = \mathbb{C}^k$ und dessen Struktur-Liegruppe $G = GL(k, \mathbb{C})$ mit der entsprechenden Lie-Algebra \mathfrak{g} ist. Aufgrund des Satzes von Chern-Weil (32.4.11) werden alle Krümmungs-2-Formen \mathcal{F} durch ein invariantes Polynom P in die gleiche de-Rham-Kohomologie-Klasse $[P]$ abgebildet. Also ist man in Bezug auf die Charakteristischen Klassen frei eine beliebige Zusammenhangs-1-Form \mathcal{A} zu wählen. Häufig führt man auf F ein hermitesches Skalarprodukt ein und wählt dann für \mathcal{A} eine metrische Zusammenhangs-1-Form. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man auf der Faser $F = \mathbb{C}^k$ eine orthonormale Basis (hier *Rahmen*, bzw. engl. *frame* genannt) definieren und wählt folglich als Struktur-Liegruppe $G = U(k)$, die Matrixgruppe der unitären Matrizen, die orthonormale Basen in orthonormale Basen abbilden. Die Zusammenhangs- und Krümmungsformen sind dann Elemente von $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(k)$, wobei $i \cdot \mathfrak{u}(k)$ hermitesche Matrizen sind. Bei dieser Konstruktion spricht man dann von einem *Rahmenbündel* (*frame bundle*). Wenn dieses Rahmenbündel E_M orientierbar ist, dann reduziert sich die Struktur-Liegruppe auf $G = SU(k)$, gerade jene Liegruppen, welche die Grundlage der modernen physikalischen Eichtheorien darstellen.

Chern definiert nun die folgende Funktion $c(\mathcal{F})$, die sog. totale Chern-Klasse, und die Funktionen $c_j(\mathcal{F})$, die j -ten Chern-Klassen:

Definition 32.5.1

$$c(\mathcal{F}) := \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) , \quad (32.5.1)$$

bzw. mit $t \in \mathbb{R}$

$$c(t\mathcal{F}) := \det\left(\mathbb{1} + \frac{it\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=0}^k c_j(\mathcal{F}) t^j . \quad (32.5.2)$$

Zunächst soll gezeigt, daß $c(\mathcal{F})$ tatsächlich ein invariantes Polynom im Sinne der Chern-Weil Theorie ist.

Lemma 32.5.2 1. $c(\mathcal{F})$ ist ein invariantes Polynom.

2. Für die $c_j(\mathcal{F})$ gilt:

$$c_0(\mathcal{F}) = 1 , \quad (32.5.3)$$

$$c_1(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right) \operatorname{tr}(\mathcal{F}) , \quad (32.5.4)$$

$$c_2(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2} [-\operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F})] , \quad (32.5.5)$$

$$\begin{aligned} c_3(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^3 \left[\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \right] , \end{aligned} \quad (32.5.6)$$

$$\begin{aligned} c_4(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^4 \left[-\frac{1}{4} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \right] . \end{aligned} \quad (32.5.7)$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$c_k(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \det(\mathcal{F}) , \quad (32.5.8)$$

$$c_j(\mathcal{F}) = 0 \quad \text{für } 2j > m, j > k . \quad (32.5.9)$$

Beweis: Die Invarianz von $c(\mathcal{F})$ unter G folgt sofort aus den Eigenschaften der Determinanten:

$$c(g^{-1}\mathcal{F}g) = \det\left(g^{-1}\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)g\right) = \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) = c(\mathcal{F}) .$$

Daß $c(\mathcal{F})$ auch ein symmetrisches Polynom in \mathcal{F} ist kann man folgendermaßen sehen. Zunächst nehmen wir an, daß die $k \times k$ Matrix $i\mathcal{F}$ und damit auch $\mathbb{1} + i\mathcal{F}/(2\pi)$ diagonalisierbar sind, d.h. Elemente von $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) &= \det(\text{diag}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_k)) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j) \\ &= \exp\left\{\ln \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^k \ln(1 + \lambda_j)\right\} \\ &= \exp\left\{\text{tr}\left[\ln\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Wenn man den Logarithmus und die Exponentialfunktion als Potenzreihen entwickelt erhält man also eine Potenzreihe in $\text{tr}(\mathcal{F})$. Da \mathcal{F} eine 2-Form ist verschwinden die $c_j(\mathcal{F})$ für alle $2j > m = \dim(M)$ trivialerweise. Daher ist $c(\mathcal{F})$ ein symmetrisches Polynom. Die Polynomreihe kann aber auch nicht weiter als bis zu $c_k(\mathcal{F})$ gehen, denn der höchste Term von $c(\mathcal{F})$ ist:

$$c_k(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^k \lambda_j = \det\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \det(\mathcal{F}).$$

Um die anderen $c_j(\mathcal{F})$ zu bestimmen kann man den Logarithmus als Potenzreihe schreiben:

$$\ln(1 + x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j$$

und erhält damit

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) &= \exp\left\{\text{tr}\left[\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \dots\right]\right\} \\ &= \exp\left\{\text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) - \frac{1}{2} \text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \frac{1}{3} \text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \dots\right\} \\ &= \exp\left\{\text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)\right\} \wedge \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)\right\} \\ &\quad \wedge \exp\left\{\frac{1}{3} \text{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \wedge \exp\left\{-\frac{1}{4} \operatorname{tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi} \wedge \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)\right\} \wedge \dots \\
&= \left\{1 + \left(\frac{i}{2\pi}\right) \operatorname{tr}(\mathcal{F}) + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^3 \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^4 \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) + \dots\right\} \\
&\wedge \left\{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \dots\right\} \\
&\wedge \left\{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^3 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \dots\right\} \\
&\wedge \left\{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^4 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \dots\right\} \\
&\wedge \dots .
\end{aligned}$$

Nun faßt man Terme gleicher Ordnung in \mathcal{F} zusammen und erhält:

$$\begin{aligned}
c_0(\mathcal{F}) &= 1 , \\
c_1(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right) \operatorname{tr}(\mathcal{F}) , \\
c_2(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F})\right] , \\
c_3(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^3 \left[\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F})\right] , \\
c_4(\mathcal{F}) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^4 \left[-\frac{1}{4} \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \\
&\quad - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!} \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F})\right] .
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man nun von den diagonalisierbaren Matrizen $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ auf ganz $GL(k, \mathbb{C})$ ausdehnen, weil die diagonalisierbaren Matrizen $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ dicht in

$GL(k, \mathbb{C})$ liegen und die totale Chern-Klasse c als Polynom stetig ist. Diese Dichtheits-Aussage kann man folgendermaßen sehen: aus der linearen Algebra wissen wir, daß jede Matrix $A \in GL(k, \mathbb{C})$ in der Form $A = C^{-1} \cdot D \cdot C$ geschrieben werden kann, wobei $C \in GL(k, \mathbb{C})$ und D eine obere Dreiecks-Matrix ist (Stichwort: Jordansche Normalform, siehe z.B. Koecher (1992), S. 238 ff.):

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & \cdots & D_{1k} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & D_{kk} \end{pmatrix}.$$

Jetzt kann man eine Matrix $D_{\vec{\epsilon}}$ mit 'kleinem' $\vec{\epsilon} := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$ konstruieren,

$$(D_{\vec{\epsilon}})_{ij} := \begin{cases} D_{ij} + \epsilon_i & \text{für } i = j, \\ D_{ij} & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

so daß alle D_{ii} voneinander verschieden sind, und damit alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $D_{\vec{\epsilon}}$ voneinander verschieden sind, und sich damit $D_{\vec{\epsilon}}$ diagonalisieren läßt. Als Matrixnorm verwenden wir

$$\|D\|^2 := \sum_{ij}^k |D_{ij}|^2$$

und erhalten damit

$$\lim_{\vec{\epsilon} \rightarrow \vec{0}} \|D_{\vec{\epsilon}} - D\|^2 = \lim_{\vec{\epsilon} \rightarrow \vec{0}} \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 = 0.$$

Also liegt $GL_{diag}(k, \mathbb{C})$ bzgl. der üblichen Matrixnorm dicht in $GL(k, \mathbb{C})$. \square

Da $c(\mathcal{F})$ ein invariantes Polynom im Sinne der Chern-Weil Theorie ist und \mathcal{F} eine \mathfrak{g} -wertige Krümmungs-2-Form, deshalb folgt zunächst einmal, daß $c(\mathcal{F})$ ein Element des de Rham Kohomologie-Rings H^{2*} über M mit komplexen Koeffizienten ist:

$$c(\mathcal{F}) \in H^{2*}(M, \mathbb{C}).$$

Wenn man nun zu einem Rahmenbündel übergeht, d.h. ein hermitesches Skalarprodukt auf der Faser $F = \mathbb{C}^k$ einführt und eine metrische Zusammenhang-1-Form \mathcal{A} und eine Orthonormalbasis und $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(k)$ wählt, dann ist $c(\mathcal{F})$ sogar reell:

$$c(\mathcal{F}) \in H^{2*}(M, \mathbb{R}) \subset H^{2*}(M, \mathbb{C}), \quad (32.5.10)$$

denn $i\mathcal{F} \in i \cdot \mathfrak{u}(k)$ ist hermitesch und damit folgt

$$\overline{(c(\mathcal{F}))} = \overline{(\det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}))} = \det(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi})$$

$$= \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) = c(\mathcal{F}).$$

Von Bedeutung ist auch, wie die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels (30.3.4) auf das Produkt der einzelnen Chern-Klassen zurückgeführt werden kann.

Lemma 32.5.4 *Seien \mathcal{F}_{E_1} und \mathcal{F}_{E_2} die Krümmungs-2-Formen der komplexen Vektorbündel, bzw. Prinzipalbündel E_1 und E_2 , dann gilt:*

$$c(\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}) = c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}). \quad (32.5.11)$$

Beweis: Die Fasern von $E_1 \oplus E_2$ sind ja $F_1 \oplus F_2$ und daher ist Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}$ blockdiagonal:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2} &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{E_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{E_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ c(\mathcal{F}_{E_1 \oplus E_2}) &= \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{E_1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{E_2} \end{pmatrix} \\ &= \det\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{E_1}\right) \wedge \det\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{E_2}\right) \\ &= c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}). \quad \square \end{aligned}$$

Für ein komplexes Linienbündel $L := (E_M, M, \pi, F, G)$ mit Faser $F = \mathbb{C}^1$ und Strukturgruppe $G \in GL(1, \mathbb{C})$ folgt sofort:

$$c(\mathcal{F}) = c_0(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) = 1 + \lambda_1 = 1 + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}. \quad (32.5.12)$$

Da für ein beliebiges komplexes Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) gilt

$$c(\mathcal{F}) = \det\left(\mathbb{1} + \frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j) \quad (32.5.13)$$

kann man die totale Chern-Klasse von (E_M, M, π, F, G) auch interpretieren als die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels von k komplexen Linienbündeln:

$$c(\mathcal{F}_M) = c(\mathcal{F}_{L_1}) \wedge \dots \wedge c(\mathcal{F}_{L_k}). \quad (32.5.14)$$

Die Konstruktion einer Abbildung von $f : L_1 \oplus \dots \oplus L_k \rightarrow E_M$, bzw. des Rücktransports f^* , wird in der Literatur als das *Splitting-Prinzip* bezeichnet (siehe Bott u. Tu (1982), S. 275 ff., oder Shanahan (1978), S. 191).

Wenn man das Produktbündel $L \otimes L^*$ aus einem komplexen Linienbündel L und seinem dualen Bündel L^* bildet, dann hat $L \otimes L^*$ einen nichtverschwindenden, globalen Schnitt und ist damit ein triviales Bündel (30.2.4). Damit ist die Chern-Klasse $c(\mathcal{F})$ von $L \otimes L^*$ trivial, d.h.

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}_M) = c(\mathcal{F}_L) \wedge c(\mathcal{F}_{L^*}) \stackrel{!}{=} 1 &\Rightarrow c_1(\mathcal{F}_M) = c_1(\mathcal{F}_L) + c_1(\mathcal{F}_{L^*}) = 0 \Rightarrow \\ \lambda_1(\mathcal{F}_{L^*}) = -\lambda_1(\mathcal{F}_L) . & \end{aligned} \quad (32.5.15)$$

32.6 Chern-Charaktere

Die Chern-Charaktere gehen ebenso wie die Chern-Klassen von einem komplexen Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) aus, dessen Faser $F = \mathbb{C}^k$ und dessen Struktur-Liegruppe $G = U(k)$ ist, so daß \mathfrak{ig} aus hermiteschen und damit diagonalisierbaren Matrizen besteht. Sie sind eng verwandt mit den Chern-Klassen, wie man unmittelbar aus der folgenden Definition sehen kann.

Definition 32.6.1

$$ch(\mathcal{F}) := \operatorname{tr} \exp\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right), \quad (32.6.1)$$

bzw. mit $t \in \mathbb{R}$

$$ch(t\mathcal{F}) := \operatorname{tr} \exp\left(\frac{it\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} ch_j(\mathcal{F}) t^j, \quad (32.6.2)$$

$$ch_j(\mathcal{F}) = \frac{1}{j!} \operatorname{tr}\left(\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j\right), \quad (32.6.3)$$

wobei die Multiplikation in \mathcal{F}^j natürlich die äußere Multiplikation \wedge ist.

Da der Chern-Charakter $ch(\mathcal{F})$ eine Potenzreihe in $\operatorname{tr}(\mathcal{F})$ ist, der wie die Chern-Klasse $c(\mathcal{F})$ für alle $2j > m = \dim(M)$ verschwindet, ist $ch(\mathcal{F})$ ein symmetrisches Polynom.

Für die $ch_j(\mathcal{F})$ gilt:

$$ch_0(\mathcal{F}) = \operatorname{tr}(\mathbb{1}) = k, \quad (32.6.4)$$

$$ch_1(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right) \operatorname{tr}(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}), \quad (32.6.5)$$

$$ch_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) = \frac{1}{2} [-2c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})]. \quad (32.6.6)$$

... = ...

32.7 Additive und multiplikative Charakteristische Klassen

Wir folgen hier vorwiegend dem schönen Vortrag von Prof. Christian Bär aus dem Jahr 2006 am MPI für Gravitationsphysik in Postdam-Golm (Bär (2011)). Der Gedanke, aus den Chern-Klassen neue additive und multiplikative Charakteristische Klassen zu konstruieren geht im Wesentlichen auf die Arbeiten von Hirzebruch (1978) zurück.

Da die Chern-Klassen invariante Polynome von \mathfrak{g} -wertigen Differentialformen sind versucht man sie mit Hilfe von Potenzreihen in andere invariante Polynome transformieren. Die j -te Chern-Klassen $c_j(\mathcal{F})$ ist ja aufgrund des Satzes von Chern-Weil gerade der de Rham Kohomologie-Vektorraum $H^{2j}(M, \mathbb{R})$. Diese de Rham Kohomologie-Klassen bilden die kommutative, graduierte Algebra

$$H^{2*}(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_j H^{2j}(M, \mathbb{R}) . \quad (32.7.1)$$

Graduiert bedeutet hier, daß gilt

$$H^{2j}(M, \mathbb{R}) \cdot H^{2k}(M, \mathbb{R}) \subset H^{2(j+k)}(M, \mathbb{R}) . \quad (32.7.2)$$

Verallgemeinert betrachtet man also eine kommutative, graduierte Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper \mathbb{K} mit dem Einselement 1 und der Graduierung $R^j \cdot R^k \subset R^{j+k}$.

Definition 32.7.1 Sei $R = \bigoplus_j R^j$ eine kommutative, graduierte Algebra über einem Körper \mathbb{K} mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über \mathbb{K} , d.h.

$$g(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j \quad \text{mit } g_j \in \mathbb{K} . \quad (32.7.3)$$

Dann definiert man den folgenden Vektorraum-Endomorphismus

$$\Lambda_g : R \rightarrow R , \quad \Lambda_g|_{R^j} := (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j . \quad (32.7.4)$$

Damit gilt $\Lambda_g(R^j) \subset R^j$.

Angewandt auf $H^{2*}(M, \mathbb{R})$ heißt das:

$$\Lambda_g : R \rightarrow R , \quad \Lambda_g|_{H^{2j}} := (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j . \quad (32.7.5)$$

Natürlich stellt sich hier sofort die Frage, warum kommt in der Definition von Λ_g der Faktor $(-1)^{j+1} \cdot j$ vor? In der nächsten Definition der Abbildung $g_R : R \rightarrow R$ kommt ein Term der Form $\Lambda_g(\log(c))$ vor, und der Faktor $(-1)^{j+1} \cdot j$ kompensiert gerade den Faktor $(-1)^{j+1} \frac{1}{j}$ der Potenzreihe des Logarithmus.

Mit Hilfe von $g(x)$ und Λ_g kann man nun die folgende Abbildung $g_R : R \rightarrow R$ definieren:

Definition 32.7.2 (Additive Klassen) Sei c ein Element der kommutativen, graduierten Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper \mathbb{K} mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über \mathbb{K} , d.h.

$$c \in R, \quad c := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j, \quad (32.7.6)$$

$$g_R : R \rightarrow R, \quad g_R(c, k) := k \cdot g_0 \cdot 1 + \Lambda_g(\log(c)), \quad (32.7.7)$$

$$\text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } \log(1 + y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l}. \quad (32.7.8)$$

Seien $c = c(\mathcal{F})$ die totale Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{2j}(M, \mathbb{R})$, $R = H^{2*}(M, \mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{g}_E(c) := k \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_E))) \quad (32.7.9)$$

die additive Klasse von E bezüglich g .

Dabei ist die Summe der Terme von $\log(c)$ vom Grad j ein endlicher polynomialer Ausdruck in den c_1, \dots, c_j .

Additiv heißen die Klassen $\tilde{g}_E(c)$ weil gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{E_1 \oplus E_2}(c) &= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1} \oplus \mathcal{F}_{E_2}))) \\ &= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2}))) \\ &= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \log(c(\mathcal{F}_{E_2})) \\ &= (k_1 + k_2) \cdot g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2}))) \\ &= \tilde{g}_{E_1}(c) + \tilde{g}_{E_2}(c). \end{aligned} \quad (32.7.10)$$

Die obige Definition der additiven Klasse $\tilde{g}_E(c)$ bezüglich der Funktion g (32.7.8, 32.7.9) erscheint zunächst etwas undurchsichtig. Das folgende Lemma beweist eine Spektralform von $\tilde{g}_E(c)$ und klärt so die Zusammenhänge.

Lemma 32.7.3 Sei die Chern-Klasse $c(\mathcal{F}_E)$ in Diagonalform gegeben, d.h.

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j).$$

Dann gilt für die additive Klasse $\tilde{g}_E(c)$ bezüglich der Funktion g die Spektralformel:

$$\tilde{g}_E(c) = \sum_{j=1}^k g(\lambda_j). \quad (32.7.11)$$

Beweis:

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j) \quad \Rightarrow$$

$$\log(c(\mathcal{F}_E)) = \sum_{j=1}^k \log(1 + \lambda_j) = \sum_{j=1}^k \left[\lambda_j - \frac{1}{2} \lambda_j^2 + \frac{1}{3} \lambda_j^3 \mp \dots \right].$$

Der l -te Term von Λ_g ist nach Definition gerade

$$\Lambda_g^{(l)} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l,$$

wobei $(\log(g))_l$ gerade der Vorfaktor des x^l -Terms in der Potenzreihe von $g(x)$ ist, d.h.

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (g)_l x^l.$$

Damit folgt für $\tilde{g}_E(c)$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_E(c) &= k g_0 + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_E))) \\ &= k g_0 + \sum_{j=1}^k \left[\Lambda_g^{(1)} \lambda_j - \frac{1}{2} \Lambda_g^{(2)} \lambda_j^2 \pm \dots \right] \\ &= k g_0 + \sum_{j=1}^k \left[(g)_1 \lambda_j + (g)_2 \lambda_j^2 + \dots \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[g_0 + (g)_1 \lambda_j + (g)_2 \lambda_j^2 + \dots \right] \\ &= \sum_{j=1}^k g(\lambda_j). \quad \square \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir für die formale Potenzreihe $g(x)$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion:

$$g(x) := e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j. \quad (32.7.12)$$

Damit folgt:

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 1, \quad g_2 = \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad c_0(\mathcal{F}_E) = 1,$$

$$\Lambda_{e^x}|_{H^0(M, \mathbb{R})} = 0, \quad \Lambda_{e^x}|_{H^2(M, \mathbb{R})} = 1, \quad \Lambda_{e^x}|_{H^4(M, \mathbb{R})} = -1, \quad \dots$$

Der Faktor $(-1)^{j+1} \cdot j$ in Λ_{e^x} kompensiert gerade die Vorfaktoren der Potenzreihenentwicklung des Logarithmus und man erhält also die Potenzreihe $g(x) = e^x$ mit $x^j = c_j(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} \log(c(\mathcal{F})) &= \log(1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots) \\ &= (c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots) - \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots)^2 + \dots \\ &= c_1(\mathcal{F}) + (c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{E,0}(c) = k, \quad \tilde{g}_{E,1}(c) = c_1(\mathcal{F}), \quad \tilde{g}_{E,2}(c)_2 = -(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})), \quad \dots \quad (32.7.13)$$

Also ist $\tilde{g}_E(c) = ch(\mathcal{F})$, d.h. der bereits oben behandelten totale Chern-Charakter.

Auf ganz analoge Weise kann man jetzt mittels einer Funktion $f(x)$ und $\Lambda_{\log(f)}$ multiplikative Klassen $f_R : R \rightarrow R$ definieren:

Definition 32.7.5 (Multiplikative Klassen) *Sei c ein Element der kommutativen, graduierten Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper \mathbb{K} mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über \mathbb{K} , d.h.*

$$c \in R, \quad c := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j, \quad (32.7.14)$$

$$f_R : R \rightarrow R, \quad f_R(c) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c))), \quad (32.7.15)$$

$$\text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } \log(1 + y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l}. \quad (32.7.16)$$

Seien $c = c(\mathcal{F})$ die totale Chern-Klasse eines komplexen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{2j}(M, \mathbb{R})$, $R = H^{2*}(M, \mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{f}_E(c) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_E)))) , \quad (32.7.17)$$

$$\text{mit } \log(1 + y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l}. \quad (32.7.18)$$

die multiplikative Klasse von E bezüglich g .

Multiplikativ heißen die Klassen $\tilde{f}_E(c)$ weil gilt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{E_1 \oplus E_2}(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_{E_1} \oplus \mathcal{F}_{E_2})))) \\
 &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}) \wedge c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
 &= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1})) + \log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
 &= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1}))) + \Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
 &= \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_1})))) \wedge \exp(\Lambda_g(\log(c(\mathcal{F}_{E_2})))) \\
 &= \tilde{f}_{E_1}(c) \wedge \tilde{f}_{E_2}(c) .
 \end{aligned} \tag{32.7.19}$$

Die obige Definition der multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(c)$ bezüglich der Funktion g (32.7.17, 32.7.18) erscheint zunächst etwas undurchsichtig. Das folgende Lemma beweist eine Spektralform von $\tilde{f}_E(c)$ und klärt so die Zusammenhänge.

Lemma 32.7.6 *Sei die Chern-Klasse $c(\mathcal{F}_E)$ in Diagonalform gegeben, d.h.*

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j) .$$

Dann gilt für die multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(c)$ bezüglich der Funktion g die Spektralformel:

$$\tilde{f}_E(c) = \prod_{j=1}^k g(\lambda_j) . \tag{32.7.20}$$

Beweis:

$$c(\mathcal{F}_E) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j) \quad \Rightarrow$$

$$\log(c(\mathcal{F}_E)) = \sum_{j=1}^k \log(1 + \lambda_j) = \sum_{j=1}^k [\lambda_j - \frac{1}{2}\lambda_j^2 + \frac{1}{3}\lambda_j^3 \mp \dots] .$$

Der l -te Term von $\Lambda_{\log(g)}$ ist nach Definition gerade

$$\Lambda_{\log(g)}^{(l)} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l ,$$

wobei $(\log(g))_l$ gerade der Vorfaktor des x^l -Terms in der Potenzreihe von $(\log(g))(x)$ ist, d.h.

$$(\log(g))(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (\log(g))_l x^l .$$

Damit folgt für $\tilde{f}_E(c)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_E(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F}_E)))) \\
 &= \exp\left(\sum_{j=1}^k [\Lambda_{\log(g)}^{(1)} \lambda_j - \frac{1}{2} \Lambda_{\log(g)}^{(2)} \lambda_j^2 \pm \dots]\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{j=1}^k [(\log(g))_1 \lambda_j + (\log(g))_2 \lambda_j^2 + \dots]\right) \\
 &= \exp\left(\sum_{j=1}^k [(\log(g))(\lambda_j)]\right) = \prod_{j=1}^k \exp[(\log(g))(\lambda_j)] \\
 &= \prod_{j=1}^k g(\lambda_j) . \quad \square
 \end{aligned}$$

32.8 Todd-Klassen

Die totale Todd-Klasse wird als multiplikative Charakteristische Klasse aus der totalen Chern-Klasse abgeleitet. Als Potenzreihe $g(x)$ dient hier die erzeugende Funktion des Bernoulli-Polynoms $B_m(n)$ mit $n = 0$ (siehe Richter u. Schiekel (2004), S. 9 ff.):

$$g(x) := \frac{x}{1 - e^{-x}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{B_j}{j!} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} x^{2j} \quad (32.8.1)$$

mit den Bernoulli-Zahlen

$$B_0 := 1, \quad B_1 := -\frac{1}{2}, \quad \text{für } i \geq 1: \quad B_{2j} := -\sum_{k=0}^{2j-1} \binom{2j}{k} \frac{B_k}{(2j-k+1)}, \quad B_{2j+1} := 0, \quad (32.8.2)$$

$$\text{insb. } B_4 = \frac{1}{6}, \quad B_6 = -\frac{1}{30}, \quad B_8 = \frac{1}{42}, \quad \dots \quad (32.8.3)$$

Wenn man sich, wie wir in dieser Arbeit, dem Atiyah-Singer-Indexsätzen von der geometrisch-topologischen Seite her nähert, wird man sich vermutlich die Frage stellen: warum wählt man für eine neue aus der Chern-Klasse abgeleitete Charakteristische Klasse für $g(x)$ gerade die erzeugende Funktion des Bernoulli-Polynoms? Diese und weitere ähnliche Fragen finden ihre Antwort, wenn man spezielle in der Geometrie verwendete elliptische Differentialoperatoren betrachtet, bei denen Funktionen des Typs

$\frac{x}{1-e^{-x}}$ ganz natürlich als Spektralfunktionen auftauchen. Diese Zusammenhänge stellt Gilkey (1995) sehr schön dar.

Also können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots \Rightarrow \\
\log(g(x)) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \dots\right)^2 + \dots \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{8}x^2 + \dots = \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^2 + \dots \Rightarrow \\
\Lambda_{\log(g)}|_{H^0(M,\mathbb{R})} &= 0, \quad \Lambda_{\log(g)}|_{H^2(M,\mathbb{R})} = \frac{1}{2}, \quad \Lambda_{\log(g)}|_{H^4(M,\mathbb{R})} = \frac{1}{12}, \quad \dots \\
\tilde{f}_E(c) &= \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(c(\mathcal{F})))) \\
&= \exp(\Lambda_{\log(g)}(c_1(\mathcal{F}) + (c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots)) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots\right) \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots\right)^2 + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots + \frac{1}{8}c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F}) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}) + \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})) + \dots \quad (32.8.4)
\end{aligned}$$

Diese aus der totalen Chern-Klasse abgeleitete multiplikative Charakteristische Klasse heißt Todd-Klasse:

$$Td(\mathcal{F}) := \tilde{f}_E(c), \quad (32.8.5)$$

$$Td_0(\mathcal{F}) = 1, \quad Td_1(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}c_1(\mathcal{F}), \quad Td_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{12}(c_2(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}) \wedge c_1(\mathcal{F})), \quad \dots \quad (32.8.6)$$

Mit 32.7.20 folgt aus der Spektraldarstellung der Chern-Klasse $c(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^k (1 + \lambda_j)$ die Spektralformel für die Todd-Klasse:

$$Td(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^k g(\lambda_j) = \prod_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{1 - e^{-\lambda_j}}. \quad (32.8.7)$$

32.9 Pontrjagin-Klassen

Die Pontrjagin-Klassen sind Charakteristische Klassen für reelle Vektorbündel. Ein einfacher Zugang zu diesen Pontrjagin-Klassen ist es, das reelle Vektorbündel E zu komplexifizieren und dann die Pontrjagin-Klassen über die Chern-Klassen zu definieren. Sei also E das reelle k -dimensionale Vektorbündel (E_M, M, π, F, G) , dann bezeichnen wir dessen Komplexifizierung als

$$E^{\mathbb{C}} := E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} . \quad (32.9.1)$$

Komplexifiziert wird hier der reelle Vektorraum der Faser F , indem dessen Körper \mathbb{R} erweitert wird zum Körper \mathbb{C} . Wir bezeichnen im Folgenden das konjugiert Komplexe der Zahl $z \in \mathbb{C}$ als \bar{z} , da der $*$ weiterhin entweder die Rücktransport- (pullback-) Abbildung oder die de Rham Kohomologie-Algebra $H^*(M, \mathbb{R})$ bezeichnen soll.

Zunächst noch einige Bemerkungen zur Reellifizierung und Komplexifizierung von linearen Abbildungen in Vektorräumen, wobei wir Bott u. Tu (1982), S. 286 ff. folgen. Man kann eine komplex-lineare Abbildung in \mathbb{C}^k

$$L : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k , \quad \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_k \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} . \quad (32.9.2)$$

auch als reell-lineare Abbildung in einem reellen Vektorraum \mathbb{R}^{2k} auffassen:

$$L_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k} , \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{2k} \end{pmatrix} = L_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2k} \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{2j-1} + ix_{2j} := z_j . \quad (32.9.3)$$

Umgekehrt kann man \mathbb{R}^{2k} natürlich in \mathbb{C}^{2k} einbetten, so daß die Abbildung $L_{\mathbb{R}}$ nun als eine Abbildung in \mathbb{C}^{2k} betrachtet wird, d.h.

$$L_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k} \quad \Rightarrow \quad L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} : \mathbb{C}^{2k} \rightarrow \mathbb{C}^{2k} . \quad (32.9.4)$$

Die Reellifizierung und Komplexifizierung seien an einem kleinen Beispiel gezeigt:

Beispiel: Sei eine Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit

$$\begin{aligned} Lz &:= \lambda z := (\alpha + i\beta)z := (\alpha + i\beta)(x_1 + ix_2) \\ &= (\alpha x_1 - \beta x_2) + i(\beta x_1 + \alpha x_2) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$L_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Entsprechend ergibt sich für eine Abbildung $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit

$$L \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$L_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_{11})_{\mathbb{R}} & (\lambda_{12})_{\mathbb{R}} \\ (\lambda_{21})_{\mathbb{R}} & (\lambda_{22})_{\mathbb{R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{11} & \alpha_{12} & -\beta_{12} \\ \beta_{11} & \alpha_{11} & \beta_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\beta_{21} & \alpha_{22} & -\beta_{22} \\ \beta_{21} & \alpha_{21} & \beta_{22} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

□

Lemma 32.9.2 Sei $L : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ eine komplex-lineare Abbildung, d.h. eine komplexe $k \times k$ Matrix, dann gibt es eine Ähnlichkeitstransformation mit einer unitären $2k \times 2k$ Matrix B , so daß

$$B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix} \Leftrightarrow L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq L \oplus \bar{L}. \quad (32.9.5)$$

Beweis: Die Idee ist es $L_{\mathbb{R}}$ zu diagonalisieren. Dies sieht man zunächst am übersichtlichsten für $k = 1$:

$$L := \alpha + i\beta \Rightarrow L_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} B^{-1}(L_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\beta + i\alpha \\ \alpha - i\beta & \beta - i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \bar{L} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $k = 2$ ergibt sich:

$$B := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ -i & & i & \\ & 1 & & 1 \\ & -i & & i \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & & & i \\ & & 1 & i \\ 1 & -i & & \\ & & & 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Nun ist bei einem reellen Vektorbündel $F = \overline{F}$ und damit $F^{\mathbb{C}} = \overline{F^{\mathbb{C}}}$ und also $E^{\mathbb{C}} \simeq \overline{E^{\mathbb{C}}}$. Mit 32.5.2 folgt, daß $c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$ den Faktor $(i/2\pi)^j$ enthält und damit folgt:

$$\begin{aligned} c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) &= c_j(\mathcal{F}_{\overline{E^{\mathbb{C}}}}) = (-1)^j c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \quad \Rightarrow \\ c_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) &= 0 \quad \text{für } j \text{ ungerade.} \end{aligned} \quad (32.9.6)$$

Daraus folgt die Definition der Pontrjagin-Klassen:

Definition 32.9.4

$$p_j(\mathcal{F}_E) := \begin{cases} (-1)^j c_{2j}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \in H^{4j}(M, \mathbb{R}), \\ 0 \end{cases} \quad \text{für } 4j > m, 2j > k. \quad (32.9.7)$$

$$p(\mathcal{F}_E) := \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} p_j(\mathcal{F}_E) \in H^{4*}(M, \mathbb{R}) \quad \text{mit } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor := \begin{cases} k/2 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ (k-1)/2 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (32.9.8)$$

Die Bedingung $p_j(\mathcal{F}_E) = 0$ für $4j > m, 2j > k$ folgt aus der entsprechenden Bedingung für $c_{2j}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})$, siehe 32.5.9.

Lemma 32.9.5 Seien $\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}$ und $\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}$ die Krümmungs-2-Formen der komplexifizierten Vektorbündel $E_1^{\mathbb{C}}$ und $E_2^{\mathbb{C}}$, dann gilt wie für die Chern-Klassen:

$$p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) = p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}). \quad (32.9.9)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p_j(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) &= (-1)^j c_{2j}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= (-1)^j \sum_{\substack{m,n \\ m+n=2j}} c_m(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge c_n(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= (-1)^j \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} c_{2m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge c_{2n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} (-1)^{m'} c_{2m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge (-1)^{n'} c_{2n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}) \\ &= \sum_{\substack{m',n' \\ m'+n'=j}} p_{m'}(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p_{n'}(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung

$$p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}} \oplus E_2^{\mathbb{C}}}) = p(\mathcal{F}_{E_1^{\mathbb{C}}}) \wedge p(\mathcal{F}_{E_2^{\mathbb{C}}}). \quad \square$$

Wenn man an einer konkreteren Gestalt der Pontrjagin-Klassen interessiert ist, dann geht man zu einem Rahmenbündel über, d.h. man führt ein symmetrisches Skalarprodukt auf der Faser $F = \mathbb{R}^k$ ein und eine metrische Zusammenhang-1-Form \mathcal{A} und eine Orthonormalbasis und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(k)$. Damit sind dann die Zusammenhang-1-Form \mathcal{A} und die Krümmungs-2-Form \mathcal{F} schiefsymmetrische reelle Matrizen aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$.

Lemma 32.9.7 *Eine reelle, schiefsymmetrische Matrix A mit geradzahlgiger Dimension läßt sich auf folgende Form diagonalisieren:*

$$A \simeq \begin{pmatrix} -i\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & -i\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & i\lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R}. \quad (32.9.10)$$

Beweis: Das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$ hat in \mathbb{C} mindestens eine Lösung. Dies sei der Eigenwert μ_1 mit dem Eigenvektor $|e_1\rangle$. Bei einer schiefsymmetrischen reellen Matrix A folgt, daß μ_1 rein imaginär ist, denn

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_1 \langle e_1 | e_1 \rangle = \langle e_1 | \mu_1 e_1 \rangle = \langle e_1 | A e_1 \rangle \\ &= \langle A^\dagger e_1 | e_1 \rangle = \langle A^T e_1 | e_1 \rangle = \langle -A e_1 | e_1 \rangle \\ &= -\langle \mu_1 e_1 | e_1 \rangle = -\overline{\mu_1} \langle e_1 | e_1 \rangle = -\overline{\mu_1}. \end{aligned}$$

Weiter sind A und $A^T = -A$ unitär äquivalent, d.h. sie haben die gleichen Eigenwerte μ_j . Sofern die Eigenwerte nicht 0 sind kommen sie also immer paarweise als $\pm\mu_j = \pm i\lambda_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ vor. \square

Korollar 32.9.9 *Die obige reelle, schiefsymmetrische Matrix A mit geradzahlgiger Dimension läßt sich auch unitär auf die folgende Form Block-diagonalisieren:*

$$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad (32.9.11)$$

denn

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +i & -1 \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & +i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda & +i\lambda \\ \lambda & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & +i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich jetzt die totale Pontrjagin-Klasse schreiben als:

$$p(\mathcal{F}_E) = \det\left(\mathbb{1} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{E^c}\right), \quad (32.9.12)$$

denn:

$$c(\mathcal{F}_{E^c}) = 1 + c_2(\mathcal{F}_{E^c}) + c_4(\mathcal{F}_{E^c}) + \dots + c_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_{E^c}) \quad (32.9.13)$$

$$= \det\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{E^c}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & 1 + \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 - \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 + \lambda_j)(1 - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 - \lambda_j^2) \Rightarrow \quad (32.9.14)$$

$$p(\mathcal{F}_E) = 1 + p_1(\mathcal{F}_E) + p_2(\mathcal{F}_E) + \dots + p_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_E)$$

$$= 1 - c_2(\mathcal{F}_{E^c}) + c_4(\mathcal{F}_{E^c}) \mp \dots + (-1)^{[\frac{k}{2}]} c_k(\mathcal{F}_{E^c})$$

$$= \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 + \lambda_j^2) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 + i\lambda_j)(1 - i\lambda_j)$$

$$= \det(\text{diag}(1 + i\lambda_1, 1 - i\lambda_1, \dots, 1 + i\lambda_{[\frac{k}{2}]}, 1 - i\lambda_{[\frac{k}{2}]}))$$

$$= \det\left(\mathbb{1} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{E^c}\right). \quad (32.9.15)$$

Konkret heißt das also für den Fall eines Rahmenbündels mit schiefssymmetrischen reellen Krümmungs-2-Formen \mathcal{F}_E aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$, weshalb $\text{tr}(\mathcal{F}_E) = 0$ ist, daß für die Pontrjagin-Klassen gilt:

$$p_0(\mathcal{F}_E) = 1, \quad (32.9.16)$$

$$p_1(\mathcal{F}_E) = -c_2(\mathcal{F}_{E^c}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{F}_{E^c} \wedge \mathcal{F}_{E^c})\right] = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(\mathcal{F}_{E^c} \wedge \mathcal{F}_{E^c}), \quad (32.9.17)$$

$$\begin{aligned}
p_2(\mathcal{F}_E) &= c_4(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^4 \left[-\frac{1}{4} \operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})\right] \\
&= \frac{1}{128\pi^4} \left[\operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) \wedge \operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) - 2 \operatorname{tr}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}} \wedge \mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}})\right], \\
&\hspace{20em} (32.9.18)
\end{aligned}$$

... = ...

$$p_{[\frac{k}{2}]}(\mathcal{F}_E) = c_k(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \det(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}). \quad (32.9.19)$$

Das Standardbeispiel ist eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit dem Tangentialbündel TM als reellem Vektorbündel F . Man geht zu einem Rahmenbündel über, d.h. man führt an $p \in M$ das übliche symmetrische Skalarprodukt auf der Faser $F = T_p M = \mathbb{R}^4$ ein und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(4)$. Damit sind dann die Zusammenhang-1-Form \mathcal{A} und die Krümmungs-2-Form \mathcal{F} schiefsymmetrische reelle Matrizen aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(4)$. Damit sind $m = \dim(M) = 4$ und $k = \dim(F) = \dim(TM) = 4$. Seien also $p \in M$, $\{e_a\}$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums $T_p M$ und $\{\theta^a\}$ die entsprechende duale Basis des Kotangentialraums $T_p^* M$, und $R_{ab} = \frac{1}{2} R_{abcd} \theta^c \wedge \theta^d$ die Cartansche Krümmungs-2-Form (15.9.3), dann folgt wegen der Schiefssymmetrie von $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(4)$, daß $\operatorname{tr}(R) = 0$ ist, und damit folgt für die entsprechenden Pontrjagin-Klassen:

$$p_0(R) = 1, \quad (32.9.20)$$

$$p_1(R) = -c_2(R) = -\frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr}(R \wedge R), \quad (32.9.21)$$

$$p_2(R) = c_4(R) = \frac{1}{128\pi^4} [\operatorname{tr}(R \wedge R) \wedge \operatorname{tr}(R \wedge R) - 2 \operatorname{tr}(R \wedge R \wedge R \wedge R)]. \quad (32.9.22)$$

Da R eine 2-Form ist, wäre $p_2(R)$ eine 8-Form in einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit, d.h. $p_2(R) = 0$. Dennoch wird dieser Ausdruck von $p_2(R)$ für die Konstruktion der Euler-Klasse herangezogen (s.u.), indem man $p_2(R)$ in diesem Kontext nur als Matrix und nicht als Differentialform betrachtet.

Bei der Definition der Pontrjagin-Klassen in 32.9.7 waren wir, dem Standard folgend, von einem reellem k -dimensionalen Vektorbündel E zu einem komplexifizierten k -dimensionalen Vektorbündel $E^{\mathbb{C}}$ mit der komplexen Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}$ über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M übergegangen und hatten die Pontrjagin-Klassen dann als die entsprechenden Chern-Klassen auf $E^{\mathbb{C}}$ erklärt, also

$$p_j(\mathcal{F}_E) := (-1)^j c_{2j}(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{C}}}).$$

Nun sind die charakteristischen Klassen als Elemente der de-Rham-Kohomologie-Klassen $H^{4j}(M, \mathbb{R})$ auch lineare Räume und daher können wir die Basisklassen linearen Transformationen unterwerfen. Eine in der Literatur (Eguchi u. a. (1980), S. 312 ff., Nash u. Sen (1983), S. 220 ff.) diskutierte und manchmal hilfreiche Formulierung alternativer Pontrjagin-Klassen ist die folgende Konstruktion. Man beginnt hier mit einem komplexen k -dimensionalen Vektorbündel E über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M , das sich auch als ein reelles $2k$ -dimensionales Vektorbündel $E^{\mathbb{R}}$ über M auffassen läßt. Dann kann man $\tilde{p}_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{R}}})$ folgendermaßen definieren:

Definition 32.9.10

$$\tilde{p}_j(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{R}}}) := \begin{cases} \sum_{l=0}^{2j} (-1)^{\frac{l}{2}} c_l(\mathcal{F}_E) \wedge (-1)^{\frac{2j-l}{2}} c_{2j-l}(\mathcal{F}_E) \in H^{4j}(M, \mathbb{R}), \\ 0 \end{cases} \quad \text{für } 4j > m, 2j > k. \tag{32.9.23}$$

Das bedeutet Folgendes: man geht vom komplexen k -dimensionalen E zum reellen $2k$ -dimensionalen $E^{\mathbb{R}}$ über, komplexifiziert die beiden k -dimensionalen Teile von $E^{\mathbb{R}}$ wieder in ein $E \oplus E$, wendet das Splitting-Prinzip an und summiert alle Paarprodukte von Chern-Klassen auf, die im Wedge-Produkt gerade eine $2j$ -Form ergeben. Dies ergibt also:

$$\tilde{p}_0(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{R}}}) = c_0(\mathcal{F}_E) \wedge c_0(\mathcal{F}_E) = 1, \tag{32.9.24}$$

$$\tilde{p}_1(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{R}}}) = -2c_2(\mathcal{F}_E) + c_1(\mathcal{F}_E) \wedge c_1(\mathcal{F}_E) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 [\text{tr}(\mathcal{F}_E \wedge \mathcal{F}_E)], \tag{32.9.25}$$

... = ...

$$\tilde{p}_k(\mathcal{F}_{E^{\mathbb{R}}}) = c_k(\mathcal{F}_E) \wedge c_k(\mathcal{F}_E) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2k} \det(\mathcal{F}_E) \wedge \det(\mathcal{F}_E). \tag{32.9.26}$$

Wozu ist das Ganze gut? Wir werden diese Form der Pontrjagin-Klassen im folgenden beim Beweis der Ganzzahligkeit der Chern-, Pontrjagin- und Euler-Zahlen als hilfreich erkennen.

32.10 \hat{A} -Klassen

Die \hat{A} -Klassen heißen auch \hat{A} -Geschlecht (A -Dach-Geschlecht), oder Dirac-Geschlecht, und wurden neben anderen Charakteristischen Klassen von Hirzebruch eingeführt. Sie tauchen im Atiyah-Singer-Indexsatz für euklidische Dirac-Operatoren auf Spinbündeln auf und sind daher besonders für Physiker interessant.

Analog zu den multiplikativen Charakteristischen Klassen der Chern-Klasse definiert man zunächst multiplikative Charakteristische Klassen zur Pontrjagin-Klasse.

Definition 32.10.1 (Multiplikative Klassen) Sei p ein Element der kommutativen, graduierten Algebra $R = \bigoplus_j R^j$ über einem Körper \mathbb{K} mit dem Einselement 1, und sei $g(x)$ eine formale Potenzreihe über \mathbb{K} , d.h.

$$p \in R, \quad p := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} p_j,$$

$$f_R : R \rightarrow R, \quad f_R(p) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p))), \quad (32.10.1)$$

$$\text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ und } \log(1+y) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{y^l}{l}. \quad (32.10.2)$$

Seien $p = p(\mathcal{F})$ die totale Pontrjagin-Klasse eines reellen Vektorbündels oder Prinzipalbündels E vom Rang k über der Basismannigfaltigkeit M , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $R^j = H^{4j}(M, \mathbb{R})$, $R = H^{4*}(M, \mathbb{R})$, dann heißt

$$\tilde{f}_E(p) := \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))) . \quad (32.10.3)$$

die multiplikative Klasse von E bezüglich g .

Multiplikativ heißen die Klassen $\tilde{f}_E(p)$ weil ebenso wie in 32.7.19 gilt:

$$\tilde{f}_{E_1 \oplus E_2}(p) = \tilde{f}_{E_1}(c) \wedge \tilde{f}_{E_2}(c) . \quad (32.10.4)$$

Die von Bär (2011) (S. 20 ff.) stammende obige kunstvolle Definition und Konstruktion der multiplikativen Klasse $\tilde{f}_E(p)$ bezüglich g eignet sich nun, wie wir sogleich sehen werden, sehr gut für die Reihenentwicklung in \mathcal{F} . Andererseits verbirgt diese Definition die ebenso bedeutsame Spektraldarstellung von $\tilde{f}_E(p)$, die zunächst aufgezeigt werden soll.

Lemma 32.10.2 Seien die λ_j mit $j \in 1, \dots, [\frac{k}{2}]$ die Eigenwerte von $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{E^c}$. Dann gilt für multiplikative Klasse $\tilde{f}_E(p)$ bezüglich g die folgende Spektraldarstellung:

$$\tilde{f}_E(p) = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} g(\lambda_j^2) . \quad (32.10.5)$$

Beweis: Für die totale Pontrjagin-Klasse p gilt (32.9.15):

$$p = \prod_{j=1}^{[\frac{k}{2}]} (1 + \lambda_j^2) \quad \Rightarrow$$

$$\log(p) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \log(1 + \lambda_j^2) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{1}{l} (\lambda_j^2)^l .$$

Nach Definition (32.7.5) gilt für den l -ten Term von Λ_g , hier als $\Lambda_{g,l}$ bezeichnet, in Bezug auf den l -ten Term von g , hier als g_l bezeichnet:

$$\Lambda_{g,l} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot g_l \quad \Rightarrow$$

$$\Lambda_{\log(g),l} = (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\log(g)}(\log(p)) &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \cdot l \cdot (\log(g))_l (-1)^{l+1} \frac{1}{l} (\lambda_j^2)^l \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{\infty} (\log(g))_l (\lambda_j^2)^l = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \log(g(\lambda_j^2)) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_E(p) = e^{\Lambda_{\log(g)}(\log(p))} = e^{\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \log(g(\lambda_j^2))} = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} e^{\log(g(\lambda_j^2))} = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} g(\lambda_j^2) . \quad \square$$

Die totale \hat{A} -Klasse wird nun als multiplikative Charakteristische Klasse aus der totalen Pontrjagin-Klasse abgeleitet. Als Potenzreihe $g(x)$ dient hier die folgende Funktion:

$$g(x) := \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})} . \quad (32.10.6)$$

Mit dem obigen Lemma folgt sofort die Spektraldarstellung von $\hat{A}(\mathcal{F})$:

$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\lambda_j}{\sinh(\frac{\lambda_j}{2})} . \quad (32.10.7)$$

Nun zur Reihenentwicklung. Man stellt $g(x)$ als Potenzreihe dar und findet für die ersten Glieder:

$$\sinh\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^5 + \frac{1}{7!}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^7 + \dots , \quad (32.10.8)$$

$$\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{5!}\left(\frac{x^2}{16}\right) + \frac{1}{7!}\left(\frac{x^3}{64}\right) + \dots .$$

Mit

$$1 + y := \frac{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})}{(\frac{\sqrt{x}}{2})} = 1 + \frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{(1+y)} = 1 - y + y^2 - y^3 \pm \dots \quad (32.10.9)$$

folgt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sinh(\frac{\sqrt{x}}{2})} = \frac{1}{(1+y)} \\ &= 1 - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots] \\ &\quad + [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots]^2 \\ &\quad - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots]^3 \pm \dots \\ &= 1 - [\frac{1}{3!}(\frac{x}{4}) + \frac{1}{5!}(\frac{x^2}{16}) + \frac{1}{7!}(\frac{x^3}{64}) + \dots] \\ &\quad + [(\frac{1}{3! \cdot 4})^2 x^2 + \frac{2}{3!5! \cdot 64} x^3 + \dots] \\ &\quad - [(\frac{1}{3! \cdot 4})^3 x^3 + \dots] \pm \dots \\ &= 1 - \frac{1}{24}x + (\frac{-1}{5! \cdot 16} + \frac{1}{3!3! \cdot 16})x^2 - (\frac{1}{7! \cdot 64} - \frac{2}{3!5! \cdot 64} + \frac{1}{3!3!3! \cdot 64})x^3 \pm \dots \\ &= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{-3!3! + 5!}{3!3!5! \cdot 16}x^2 - (\frac{3!3!3!5! - 2 \cdot 3!3!7! + 5!7!}{3!3!3!5!7! \cdot 64})x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{84}{3!3!5! \cdot 16}x^2 - \frac{267840}{3!3!3!5!7! \cdot 64}x^3 \pm \dots \\ &= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \dots \\ &= 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{5760}x^2 - \frac{31}{967680}x^3 \pm \dots \end{aligned}$$

Nun muß $\log(g(x))$ als Potenzreihe bestimmt werden:

$$\log(g(x)) = \log(1+z) = \frac{z^1}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \log\left(1 + \left(-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \dots\right)\right) \\
&= \left[-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \dots\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \dots\right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{24}x + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{31}{2!2!2!4!7!}x^3 \pm \dots\right]^3 \mp \dots \\
&= -\frac{1}{24}x + \left(\frac{-1}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} + \frac{7}{2!3!5! \cdot 4}\right)x^2 \\
&\quad + \left(-\frac{31}{2!2!2!4!7!} + \frac{7}{4 \cdot 6 \cdot 2!3!5! \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}\right)x^3 + \dots \\
&= -\frac{1}{24}x + \left(\frac{-5+7}{2!3!5! \cdot 4}\right)x^2 + \left(\frac{-93+147-70}{2!2!2!4!7! \cdot 3}\right)x^3 + \dots \\
&= -\frac{1}{24}x + \frac{1}{3!5! \cdot 4}x^2 - \frac{1}{2!3!7! \cdot 3}x^3 + \dots \\
&= -\frac{1}{24}x + \frac{1}{2880}x^2 - \frac{1}{181440}x^3 + \dots
\end{aligned}$$

Mit 32.7.4 angewandt auf $H^{4*}(M, \mathbb{R})$ ergibt sich für Λ_g :

$$\Lambda_g : H^{4*}(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^{4*}(M, \mathbb{R}), \quad \Lambda_g|_{H^{4j}} := (-1)^{j+1} \cdot j \cdot g_j, \quad (32.10.10)$$

also in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\log(g)}|_{H^0(M, \mathbb{R})} &= 0, \quad \Lambda_{\log(g)}|_{H^{4 \cdot 1}(M, \mathbb{R})} = -\frac{1}{24}, \\
\Lambda_{\log(g)}|_{H^{4 \cdot 2}(M, \mathbb{R})} &= -\frac{1}{3!5! \cdot 2} = -\frac{1}{1440}, \\
\Lambda_{\log(g)}|_{H^{4 \cdot 3}(M, \mathbb{R})} &= -\frac{1}{2!3!7!} = -\frac{1}{60480}.
\end{aligned}$$

Die aus der Pontrjagin-Klasse $p(\mathcal{F}_E)$ abgeleitete multiplikative Charakteristische Klasse $\hat{A}(\mathcal{F}) := \tilde{f}_E(p)$ ergibt sich dann mit den Termen bis zur dritten Ordnung zu:

$$\begin{aligned}
\log(p(\mathcal{F})) &= \log(p_0(\mathcal{F}) + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + p_3(\mathcal{F}) + \dots) \\
&= \log(1 + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + p_3(\mathcal{F}) + \dots) \\
&= [p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + p_3(\mathcal{F}) + \dots] \\
&\quad - \frac{1}{2}[p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + p_3(\mathcal{F}) + \dots]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}[p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + p_3(\mathcal{F}) + \dots]^3 \\
& = p_1(\mathcal{F}) + [p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
& \quad + [p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F}))) & = -\frac{1}{24}p_1(\mathcal{F}) - \frac{1}{3!5! \cdot 2}[p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
& \quad - \frac{1}{2!3!7!}[p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\mathcal{F}) & = \exp(\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))) \\
& = 1 + \Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F}))) + \frac{1}{2!}[\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))]^2 \\
& \quad + \frac{1}{3!}[\Lambda_{\log(g)}(\log(p(\mathcal{F})))]^3 + \dots
\end{aligned} \tag{32.10.11}$$

Geordnet nach Potenzen führt das zu:

$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \hat{A}(\mathcal{F})_0 + \hat{A}(\mathcal{F})_1 + \hat{A}(\mathcal{F})_2 + \hat{A}(\mathcal{F})_3 + \dots , \quad \text{mit} \tag{32.10.12}$$

$$\hat{A}(\mathcal{F})_0 = 1 , \tag{32.10.13}$$

$$\hat{A}(\mathcal{F})_1 = -\frac{1}{24}p_1(\mathcal{F}) , \tag{32.10.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\mathcal{F})_2 & = -\frac{1}{3!5! \cdot 2}(p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) + \frac{1}{2! \cdot 24 \cdot 24}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \\
& = \frac{1}{3!5! \cdot 2 \cdot 4}[-4p_2(\mathcal{F}) + (\frac{1}{3!5! \cdot 4} + \frac{1}{2! \cdot 24 \cdot 24})p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
& = \frac{1}{3!5! \cdot 2 \cdot 4}[-4p_2(\mathcal{F}) + \frac{2+5}{3!5! \cdot 2 \cdot 4}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
& = \frac{1}{5760}[-4p_2(\mathcal{F}) + 7p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] ,
\end{aligned} \tag{32.10.15}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\mathcal{F})_3 & = -\frac{1}{2!3!7!}[p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
& \quad + \frac{1}{3!5! \cdot 2 \cdot 24}[p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{3! \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24} [p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
 = & \frac{1}{3 \cdot 2!3!7! \cdot 4 \cdot 4} [-48(p_3(\mathcal{F}) - p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{3}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) \\
 & + 84(p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - \frac{1}{2}p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})) \\
 & - 35(p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}))] \\
 = & \frac{1}{3 \cdot 2!3!7! \cdot 4 \cdot 4} [-48p_3(\mathcal{F}) + 132p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 93p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
 = & \frac{1}{2!3!7! \cdot 4 \cdot 4} [-16p_3(\mathcal{F}) + 44p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 31p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] \\
 = & \frac{1}{967680} [-16p_3(\mathcal{F}) + 44p_1(\mathcal{F}) \wedge p_2(\mathcal{F}) - 31p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F}) \wedge p_1(\mathcal{F})] .
 \end{aligned} \tag{32.10.16}$$

32.11 Euler-Klasse

Sei M eine $2l$ -dimensionale orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, also $m := \dim(M) = 2l$ und sei T_pM der entsprechende Tangentialraum der Dimension $k = \dim(T_pM) = 2l$ am Punkt $p \in M$. Man betrachtet das reelle Vektorbündel $(E_M, M, \pi, T_pM, SO(2l))$ als Rahmenbündel, d.h. man führt das übliche symmetrische Skalarprodukt auf der Faser $F = T_pM = \mathbb{R}^{2l}$ ein und als Struktur-Liegruppe die orthogonale Gruppe $O(2l)$. Wegen der Orientierbarkeit kann man die Struktur-Liegruppe auf die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2l)$ einschränken. Seien also $p \in M$, $\{e_a\}$ eine Orthonormalbasis des Tangentialraums T_pM und $\{\theta^a\}$ die entsprechende duale Basis des Kotangentialraums T_p^*M , und $R_{ab} = \frac{1}{2}R_{abcd}\theta^c \wedge \theta^d$ die Cartansche Krümmungs-2-Form (15.9.3). Damit ist dann die Krümmungs-2-Form $\mathcal{F}_E := R$ eine schiefsymmetrische reelle Matrix aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2l)$.

In 32.9.10 hatten wir gesehen, daß jede reelle schiefsymmetrische Matrix A der Dimension $2l$ unitär äquivalent zu folgender Diagonalmatrix ist:

$$A \simeq \begin{pmatrix} -i\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i\lambda_1 & & & \vdots \\ \vdots & & -i\lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & i\lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_j \in \mathbb{R} . \tag{32.11.1}$$

Dies ist auch unitär äquivalent zu der folgende reellen Darstellung

$$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & -\lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (32.11.2)$$

Also ist

$$\det(A) = \prod_{i=1}^l \lambda_i^2. \quad (32.11.3)$$

Dies legt es nahe, als grundlegende Struktur die Quadratwurzel von $\det(A)$ zu betrachten.

Definition 32.11.1 Sei A eine reelle schiefsymmetrische Matrix der Dimension $2l$ mit den Eigenwerten $\{\mp\lambda_i \mid i = 1, \dots, l\}$, dann heißt die Quadratwurzel von $\det(A)$ die Pfaffsche Determinante $Pf(A)$:

$$Pf(A) := (\det(A))^{\frac{1}{2}} = (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i. \quad (32.11.4)$$

Hierbei ist der Faktor $(-1)^l$ ein frei wählbarer Phasenfaktor.

Lemma 32.11.2

$$Pf(A) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) A_{\pi(1)\pi(2)} A_{\pi(3)\pi(4)} \cdots A_{\pi(2l-1)\pi(2l)}. \quad (32.11.5)$$

Beweis: Da $\det(A)$ invariant unter unitären Transformationen ist, folgt das gleiche auch für $Pf(A)$. Also kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A die Form von 32.11.2 hat. Dann gibt es 2^l Permutationen im obigen Ausdruck für $Pf(A)$, die A_{ij} in A_{ji} überführen und $l!$ Permutationen, welche die Indexpaare vertauschen. Also folgt

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) A_{\pi(1)\pi(2)} A_{\pi(3)\pi(4)} \cdots A_{\pi(2l-1)\pi(2l)} &= (-1)^l A_{12} A_{34} \cdots A_{2l-1, 2l} \\ &= (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i = Pf(A). \quad \square \end{aligned}$$

Jetzt wird die Euler-Klasse als die Quadratwurzel der Pontrjagin-Klasse $p_l(\mathcal{F}_E)$ definiert:

Definition 32.11.4 Sei M eine $2l$ -dimensionale orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, also $m := \dim(M) = 2l$ und sei $T_p M$ der entsprechende Tangentialraum der Dimension $k = \dim(T_p M) = 2l$ am Punkt $p \in M$ und sei $(E_M, M, \pi, T_p M, SO(2l))$ das reelle Rahmenbündel, dessen Cartansche Krümmungs-2-Form R eine $\mathfrak{so}(2l)$ -Matrix ist, dann ist die Eulerklasse $e(R)$ die Wurzel der Pontrjagin-Klasse $p_l(R)$, d.h.

$$e(R) \wedge e(R) := p_l(R) = \det\left(\frac{1}{2\pi}R\right) \Leftrightarrow \quad (32.11.6)$$

$$e(R) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l Pf(R) . \quad (32.11.7)$$

Für ungeradzahlig-dimensionale Mannigfaltigkeiten wird $e(R) = 0$ definiert.

Für eine 2-dimensionale, orientierbare, randlose Riemannsche Mannigfaltigkeit M ergibt sich also:

$$e(R) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) Pf(R) = \frac{(-1)^1}{(4\pi)^{1 \cdot 1}} \epsilon^{ab} R_{ab} = -\frac{1}{2\pi} R_{12} . \quad (32.11.8)$$

Und für eine 4-dimensionale, orientierbare, randlose Riemannsche Mannigfaltigkeit M ergibt sich:

$$\begin{aligned} e(R) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 Pf(R) = \frac{(-1)^2}{(4\pi)^{2 \cdot 2}} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) R_{\pi(1)\pi(2)} R_{\pi(3)\pi(4)} \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \epsilon^{abcd} R_{ab} \wedge R_{cd} . \end{aligned} \quad (32.11.9)$$

32.12 Nieh-Yan-Klasse

Im Jahr 1982 haben die chinesischen Physiker Nieh und Yan eine neue topologische Invariante in Riemann-Cartan-Räumen, also Räumen mit Krümmung und Torsion, vorgestellt (Nieh u. Yan (1982), Nieh (2007)). Der Gedanke ist eigentlich recht einfach: das Integral einer exakten m -Form in einem m -dimensionalen Riemann-Cartan Raum hängt nur von den Randwerten ab. Seien R_{ab} die Krümmungs-2-Form und T_a die Torsions-2-Form. Mit Cartan-1 (15.9.4) und Bianchi-1 (15.9.6) folgt:

$$\begin{aligned} d(T_a \wedge \theta^a) &= dT_a \wedge \theta^a + d\theta^a \wedge T_a \\ &= (R_{ab} \wedge \theta^b - \omega_{ab} \wedge T^b) \wedge \theta^a + (T^a \wedge T_a - \omega_b^a \wedge \theta^b \wedge T_a) \\ &= -R_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b - \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge T^b - \omega_{ab} \wedge \theta^b \wedge T^a + T^a \wedge T_a \\ &= -R_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b - \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge T^b + \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge T^b + T^a \wedge T_a \\ &= -R_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b + T^a \wedge T_a . \end{aligned} \quad (32.12.1)$$

Damit ist $-R_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b + T^a \wedge T_a$ die topologische Nieh-Yan-Invariante.

32.13 Charakteristische Zahlen 1: Chern-, Pontrjagin-, Euler-Zahlen

Aus den charakteristischen Klassen können durch Integration über die zugrunde liegende kompakte Mannigfaltigkeit *charakteristischen Zahlen* gewonnen werden. Daß diese Zahlen sogar ganzzahlig sind, ist aber alles andere als trivial. Physiker sprechen hier gelegentlich von *topologischen Ladungen*. Wir wollen dies anhand der Chern-Zahlen, der Pontrjagin-Zahlen und der Euler-Zahlen vorführen. Der zugrunde liegende Gedanke ist naheliegend:

sei M eine $2l$ -dimensionale, orientierbare, kompakte, randlose Riemannsche Mannigfaltigkeit, also $m := \dim(M) = 2l$ und sei $T_p M$ der entsprechende Tangentialraum der Dimension $k = \dim(T_p M) = 2l$ am Punkt $p \in M$ und sei $(E_M, M, \pi, T_p M, SO(2l))$ das reelle Rahmenbündel, dessen Cartansche Krümmungs-2-Form R eine $\mathfrak{so}(2l)$ -Matrix ist, dann kann man die höchste charakteristische Klasse mit Index $\frac{k}{2} = l$, die ja gerade eine k -Form enthält, über M integrieren und erhält eine topologische Invariante.

Wir beginnen mit den Euler-Zahlen, die wir ja bereits unter dem Namen Euler-Charakteristik kennengelernt haben. Den verallgemeinerten Gauß-Bonnet-Satz (23.1.2) kann man mittels der Euler-Klasse und der ganzzahligen Euler-Charakteristik $\chi(M)$ auch folgendermaßen formulieren:

Lemma 32.13.1

$$\int_M e(R) = \chi(M) \in \mathbb{Z}. \quad (32.13.1)$$

Beweis: In 23.1.2 wurde der Gauß-Bonnet-Satz in $2l$ Dimensionen mit der Gaußschen Krümmung K_G (15.15.5), dem Volumen $V(S^{2l})$ der $2l$ -dimensionalen Sphäre (23.1.1) und der Euler-Charakteristik $\chi(M)$ in folgender Form bewiesen:

$$\begin{aligned} & \int_M \frac{1}{2^l(2l)!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_{2l}} \sum_{\nu_1 \dots \nu_{2l}} R_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \cdots R_{\mu_{2l-1} \mu_{2l} \nu_{2l-1} \nu_{2l}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{2l}} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_{2l}} \frac{1}{\det(g)} dx^{\nu_1} \cdots dx^{\nu_{2l}} \\ &= \frac{1}{2} V(S^{2l}) \chi(M). \end{aligned}$$

Wir gehen jetzt mittels der m -Beine e_a^μ und e_μ^a vom holonomen Koordinatensystem $\{x_\mu\}$ mit den 1-Formen $\{dx^\mu\}$ zu einem nichtholonomen orthogonalen Koordinatensystem (Rahmenfeld) e_a mit den 1-Formen θ^a über:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \theta^a \otimes \theta^b = \delta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b.$$

Mit den Krümmungskomponenten $R_{a_1 a_2 b_1 b_2}$ bzgl. der nichtholonomen Basis lautet der Gauß-Bonnet-Satz nun:

$$\int_M \frac{1}{2^l(2l)!} \sum_{a_1 \dots a_{2l}} \sum_{b_1 \dots b_{2l}} R_{a_1 a_2 b_1 b_2} \cdots R_{a_{2l-1} a_{2l} b_{2l-1} b_{2l}} \epsilon^{a_1 \dots a_{2l}} \epsilon^{b_1 \dots b_{2l}} d\theta^{b_1} \cdots d\theta^{b_{2l}}$$

$$= \frac{1}{2} V(S^{2l}) \chi(M).$$

Nun gehen wir zu den Krümmungs-2-Formen über mittels

$$R_{a_1 a_2} := \frac{1}{2} \sum_{b_1 b_2} \epsilon^{b_1 b_2} R_{a_1 a_2 b_1 b_2} d\theta^{b_1} d\theta^{b_2} = \frac{1}{2} R_{a_1 a_2 b_1 b_2} d\theta^{b_1} \wedge d\theta^{b_2} \quad \text{etc.}$$

und erhalten

$$\int_M \frac{1}{(2l)!} \sum_{a_1 \dots a_{2l}} \epsilon^{a_1 \dots a_{2l}} R_{a_1 a_2} \cdot \dots \cdot R_{a_{2l-1} a_{2l}} = \frac{1}{2} \frac{\pi^l 2^{2l+1} l!}{(2l)!} \chi(M) \Rightarrow$$

$$(-1)^l \int_M \frac{(-1)^l}{\pi^l 2^{2l} (l)!} \sum_{a_1 \dots a_{2l}} \epsilon^{a_1 \dots a_{2l}} R_{a_1 a_2} \cdot \dots \cdot R_{a_{2l-1} a_{2l}} = \chi(M) \Rightarrow$$

$$(-1)^l \int_M \frac{(-1)^l}{(2\pi)^l 2^l (l)!} \sum_{a_1 \dots a_{2l}} \epsilon^{a_1 \dots a_{2l}} R_{a_1 a_2} \cdot \dots \cdot R_{a_{2l-1} a_{2l}} = \chi(M) \Rightarrow$$

$$(-1)^l \int_M e(R) = \chi(M),$$

wobei wir den Phasenfaktor $(-1)^l$ der Pfaffschen Determinanten durch eine Umkehrung der Orientierung von M eliminieren können. \square

Wegen der Ganzzahligkeit der Euler-Charakteristik $\chi(M)$ ist also auch die Euler-Zahl $\int_M e(R)$ ganzzahlig.

Nun ist

$$e(R) \wedge e(R) = p_l(R) = \tilde{p}_l(R_{T_p M^{\mathbb{R}}}) = c_l(R_{T_p M}) \wedge c_l(R_{T_p M}).$$

Wir wählen das positive Vorzeichen und setzen $e(R) = c_l(R)$. Damit sind auch die Chernzahlen ganzzahlig:

$$\int_M c_l(R) = \chi(M) \in \mathbb{Z}. \quad (32.13.2)$$

Nun lassen sich die Pontrjagin-Klassenelemente $p_l(R)$ ja als ganzzahlige Linearkomponenten der Chern-Klassenelemente darstellen, also sind auch die Pontrjagin-Zahlen $P_l(M)$ ganzzahlig:

$$P_l(M) := \int_M p_l(R) \in \mathbb{Z}. \quad (32.13.3)$$

32.14 Charakteristische Zahlen 2: Nieh-Yan-Zahlen

Analog zu den Chern-, Pontrjagin- und Euler-Zahlen kann man jetzt auch aus der Nieh-Yan-Klasse eine charakteristische Zahl ableiten. Bei der Herleitung der Euler-Zahlen konnten wir uns auf den verallgemeinerten Gauß-Bonnet-Satz (23.1.2) stützen. Dieser ist im Zusammenhang mit der Torsion aber nicht von Nutzen. Ein Beweis zu den Nieh-Yan-Zahlen findet sich in Kürze bei Nieh u. Yan (1982), Nieh (2007), etwas klarer bei Chandía u. Zanelli (1997), und hoffentlich noch klarer und ausführlicher hier :-)

Der Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Feststellung, daß $SO(n)/SO(n-1)$ gerade gleich der Sphäre S^n ist, wobei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ voraussetzt wird.

Weiter geht in die folgenden Beweise ein, daß die Torsion von S^n gleich Null ist, d.h. $T^a = 0$, $a \in \{1, \dots, n\}$, denn in orthogonalen hypersphärischen Koordinaten $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ (s.u.) gilt mit 15.6.2:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^b} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^c} \right) = \omega_{bc}^a \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^a} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{bc}^a = \omega_{cb}^a \quad \Rightarrow \quad T^a = 0. \quad (32.14.1)$$

Lemma 32.14.1

$$S^n = SO(n)/SO(n-1). \quad (32.14.2)$$

Beweis: Seien $a^n \in SO(n)$ und $a^{n-1} \in SO(n-1)$. Mit $a^n (a^n)^T = \mathbb{1}$ folgt:

$$a^n / a^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_{1n}^n \\ \vdots & & & \vdots & a_{2n}^n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{(n-1)n}^n \\ -a_{1n}^n & & & -a_{(n-1)n}^n & a_{nn}^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{in}^n)^2 = 1. \quad \square$$

Und das ist gerade die Definitionsgleichung für S^n mit den Koordinaten $\{a_{in}^n \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Im nächsten Schritt soll die Cartansche Zusammenhangsform ω_b^a (siehe 15.9.1) von S^n bestimmt werden. Da S^n keine Torsion hat kann hierzu 15.9.4 mit $T^a = 0$ verwendet werden.

Noch ein Wort zur Nomenklatur: da wir $\{\theta^a\}$ an einem Punkt $p \in S^n$ als Basis der 1-Formen $\Omega^1(S^n)|_p$ verwenden, sollen die diversen Winkel der Sphäre mit $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ bezeichnet werden, wobei gelte $0 \leq \varphi^1 \leq 2\pi$

und $0 \leq \varphi^a \leq \pi$ für $a > 1$. Wir orientieren uns an Freedman u. Van Proeyen (2012), S. 488 (in unseren Bezeichnungen).

Der Fall von S^2 ist ja vertraut:

$$x^1 = \sin \varphi^2 \sin \varphi^1, \quad x^2 = \sin \varphi^2 \cos \varphi^1, \quad x^3 = \cos \varphi^2; \quad (32.14.3)$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= (\cos \varphi^2 \sin \varphi^1 d\varphi^2 + \sin \varphi^2 \cos \varphi^1 d\varphi^1)^2 \\ &\quad + (\cos \varphi^2 \cos \varphi^1 d\varphi^2 - \sin \varphi^2 \sin \varphi^1 d\varphi^1)^2 \\ &\quad + (-\sin \varphi^2 d\varphi^2)^2 \\ &= (\cos \varphi^2)^2 (d\varphi^2)^2 + (\sin \varphi^2)^2 (d\varphi^1)^2 + (\sin \varphi^2)^2 (d\varphi^2)^2 \\ &= (d\varphi^2)^2 + (\sin \varphi^2)^2 (d\varphi^1)^2, \end{aligned} \quad (32.14.4)$$

bzw. in den nichtholonomen 1-Formen θ^1 und θ^2 :

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= \theta^2 \otimes \theta^2 + \theta^1 \otimes \theta^1 \\ \text{mit } \theta^2 &:= d\varphi^2 \quad \text{und} \quad \theta^1 := (\sin \varphi^2) d\varphi^1. \end{aligned} \quad (32.14.5)$$

Für den Zusammenhang ω^1_2 ergibt sich mittels der 1. Cartanschen Strukturgleichung 15.9.4 mit $T^1 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= d\theta^1 + \omega^1_2 \wedge \theta^2 = \cos \varphi^2 d\varphi^2 \wedge d\varphi^1 + \omega^1_2 \wedge d\varphi^2 \quad \Rightarrow \\ \omega^{12} &= \omega^1_2 = (\cos \varphi^2) d\varphi^1. \end{aligned} \quad (32.14.6)$$

$$\begin{aligned} R^{12} &= d\omega^{12} + \omega^1_c \wedge \omega^{c2} = d\omega^{12} \\ &= -(\sin \varphi^2) d\varphi^2 \wedge d\varphi^1 = (\sin \varphi^2) d\varphi^1 \wedge d\varphi^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned} \quad (32.14.7)$$

Damit ergibt sich die Gaußsche Krümmung K_G von S^2 wenig überraschend zu:

$$K_G := R^{12}_{12} = 1. \quad (32.14.8)$$

Nun soll die Verallgemeinerung von S^2 auf S^n gezeigt werden. Die Koordinaten $\{x^a_{(n)}\}$ mit $1 \leq a \leq n+1$ der Sphäre S^n werden ausgehend von der Sphäre S^2 wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} x^1_{(2)} &:= \sin \varphi^2 \sin \varphi^1, \quad x^2_{(2)} := \sin \varphi^2 \cos \varphi^1, \quad x^3_{(2)} := \cos \varphi^2; \\ x^a_{(n)} &:= \sin \varphi^n x^a_{(n-1)} \quad \text{für } 1 \leq a \leq n, \\ x^{n+1}_{(n)} &:= \cos \varphi^n, \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (32.14.9)$$

$$0 \leq \varphi^1 \leq 2\pi \quad \text{und} \quad 0 \leq \varphi^a \leq \pi \quad \text{für } 1 < a \leq n+1.$$

Lemma 32.14.3 Für S^n gilt mit den obigen Koordinaten:

$$(ds)_{(n)}^2 = (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds)_{(n-1)}^2, \quad (32.14.10)$$

$$\theta_{(n)}^n = d\varphi^n, \quad \theta_{(n)}^a = (\sin \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \quad \text{mit } 1 \leq a \leq n-1, \quad (32.14.11)$$

Für die $n \times n$ dimensionale Matrix $\omega_{(n)}^{AB}$ der Zusammenhangs-1-Formen gilt:

$$\omega_{(n)}^{AB} = \begin{pmatrix} \omega_{(n-1)}^{ab} & \cos \varphi^n \theta_{(n-1)}^a \\ -\cos \varphi^n \theta_{(n-1)}^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{cases} A, B \in \{1, \dots, n\}, \\ a, b \in \{1, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (32.14.12)$$

Beweis: Der Fall mit $n = 2$ wurde ja bereits oben gezeigt. Für den n -dimensionalen Fall gilt jetzt:

$$\begin{cases} S^n : & \sum_{a=1}^n x_{(n)}^a + (x_{(n)}^{n+1})^2 = 1, \quad \text{mit } 1 \leq a \leq n. \\ S^{n-1} : & \sum_{a=1}^n x_{(n-1)}^a = 1, \end{cases}$$

$$x_{(n)}^{n+1} = \cos \varphi^n, \quad x_{(n)}^a = \sin \varphi^n x_{(n-1)}^a,$$

$$dx_{(n)}^{n+1} = (-\sin \varphi^n) d\varphi^n,$$

$$dx_{(n)}^a = (\cos \varphi^n) d\varphi^n x_{(n-1)}^a + (\sin \varphi^n) dx_{(n-1)}^a.$$

$$\begin{aligned} (ds_{(n)})^2 &= \sum_{a=1}^n dx_{(n)}^a + (dx_{(n)}^{n+1})^2 \\ &= \sum_{a=1}^n [(\cos \varphi^n) d\varphi^n x_{(n-1)}^a + (\sin \varphi^n) dx_{(n-1)}^a]^2 + [(\sin \varphi^n) d\varphi^n]^2 \\ &= (\cos \varphi^n)^2 (d\varphi^n)^2 \sum_{a=1}^n (x_{(n-1)}^a)^2 + (\sin \varphi^n)^2 \sum_{a=1}^n (dx_{(n-1)}^a)^2 \\ &\quad + (\cos \varphi^n)(\sin \varphi^n) d\varphi^n \sum_{a=1}^n 2x_{(n-1)}^a dx_{(n-1)}^a \\ &\quad + (\sin \varphi^n)^2 (d\varphi^n)^2 \\ &= ((\cos \varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2) (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds_{(n-1)})^2 \\ &\quad + (\cos \varphi^n)(\sin \varphi^n) d\varphi^n \sum_{a=1}^n d(x_{(n-1)}^a)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds_{(n-1)})^2 \\
&\quad + (\cos \varphi^n)(\sin \varphi^n) d\varphi^n d \sum_{a=1}^n (x_{(n-1)}^a)^2 \\
&= (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds_{(n-1)})^2 + (\cos \varphi^n)(\sin \varphi^n) d\varphi^n d(1) \\
&= (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds_{(n-1)})^2 .
\end{aligned}$$

Mit

$$(ds_{(n)})^2 = \sum_{A=1}^n \theta_{(n)}^A \otimes \theta_{(n)}^A \quad \text{und} \quad (ds_{(n-1)})^2 = \sum_{a=1}^{n-1} \theta_{(n-1)}^a \otimes \theta_{(n-1)}^a$$

folgt sofort für die nichtholonomen 1-Formen $\theta_{(n)}^n$ und $\theta_{(n)}^a$:

$$\theta_{(n)}^n = d\varphi^n, \quad \theta_{(n)}^a = (\sin \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \quad \text{mit } 1 \leq a \leq n-1.$$

Und mit der 1. Cartanschen Strukturgleichung 15.9.4 mit $T^a = 0$ folgt ähnlich wie im obigen Fall bei S^2 :

$$0 = d\theta_{(n)}^a + \omega_{(n)}^a{}_b \wedge \theta_{(n)}^b.$$

Sei $1 \leq a, b \leq n-1$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= (\cos \varphi^n) d\varphi^n \wedge \theta_{(n-1)}^a + (\sin \varphi^n) d\theta_{(n-1)}^a \\
&\quad + \omega_{(n)}^a{}_b \wedge (\sin \varphi^n) \theta_{(n-1)}^b + \omega_{(n)}^a{}_n \wedge d\varphi^n.
\end{aligned}$$

Jetzt müssen die $d\varphi^n$ -Terme gleich Null sein, d.h.

$$0 = -(\cos \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \wedge d\varphi^n + \omega_{(n)}^a{}_n \wedge d\varphi^n \quad \Rightarrow$$

$$\omega_{(n)}^a{}_n = (\cos \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a.$$

Dann müssen aber auch die restlichen Terme gleich Null sein, d.h.

$$0 = (\sin \varphi^n) d\theta_{(n-1)}^a + \omega_{(n)}^a{}_b \wedge (\sin \varphi^n) \theta_{(n-1)}^b \quad \Rightarrow$$

$$0 = d\theta_{(n-1)}^a + \omega_{(n)}^a{}_b \wedge \theta_{(n-1)}^b.$$

Nun ist dies aber gerade gleich der 1. Cartanschen Strukturformel für $\omega_{(n-1)}^a{}_b$ bei Torsionsfreiheit, also folgt

$$\omega_{(n)}^a{}_b = \omega_{(n-1)}^a{}_b.$$

□

Aus der Zusammenhangs-1-Form $\omega_{(n)}^{AB}$ soll jetzt mit der 2. Cartanschen Strukturgleichung die Krümmungs-2-Form R^{AB} bestimmt werden.

Lemma 32.14.5 *S^n ist ein sog. 'maximal symmetrischer Raum', d.h. es gilt für die Krümmung:*

$$R_{(n)}^{AB} = d\omega_{(n)}^{AB} + \omega_{(n)C}^A \wedge \omega_{(n)B}^C = \theta_{(n)}^A \wedge \theta_{(n)}^B. \quad (32.14.13)$$

Beweis: Der Beweis geschieht mittels vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ist durch 32.14.7 gegeben. Jetzt gelte die Behauptung also für $(n-1)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} R_{(n)}^{AB} &= d\omega_{(n)}^{AB} + \omega_{(n)C}^A \wedge \omega_{(n)B}^C \\ &= \begin{pmatrix} R_{(n-1)}^{ab} - (\cos^2 \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \wedge \theta_{(n-1)}^b & R_{(n-1)}^{an} \\ -R_{(n-1)}^{an} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei gilt wegen der Induktionsannahme für $(n-1)$:

$$\begin{aligned} R_{(n-1)}^{ab} - (\cos^2 \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \wedge \theta_{(n-1)}^b &= \theta_{(n-1)}^a \wedge \theta_{(n-1)}^b - (\cos^2 \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \wedge \theta_{(n-1)}^b \\ &= (\sin^2 \varphi^n) \theta_{(n-1)}^a \wedge \theta_{(n-1)}^b = \theta_n^a \wedge \theta_n^b. \end{aligned}$$

Für $R_{(n-1)}^{an}$ folgt:

$$\begin{aligned} R_{(n-1)}^{an} &= (-\sin \varphi^n) d\varphi^n \wedge \theta_{(n-1)}^a + (\cos \varphi^n) d\theta_{(n-1)}^a \\ &\quad + \omega_{(n-1)c}^a \wedge \omega_{(n-1)}^{cn} + \omega_{(n)n}^a \wedge \omega_{(n)}^{nn} \\ &= -\theta_{(n)}^n \wedge \theta_{(n)}^a + (\cos \varphi^n) d\theta_{(n-1)}^a + \omega_{(n-1)c}^a \wedge \omega_{(n-1)}^{cn} \\ &= \theta_{(n)}^a \wedge \theta_{(n)}^n + (\cos \varphi^n) d\theta_{(n-1)}^a + \omega_{(n-1)c}^a \wedge (\cos \varphi^n) \theta_{(n-1)}^c \\ &= \theta_{(n)}^a \wedge \theta_{(n)}^n + (\cos \varphi^n) T^a = \theta_{(n)}^a \wedge \theta_{(n)}^n. \quad \square \end{aligned}$$

Soweit so gut.

Nun gibt es aber ein Problem: in allen Originalarbeiten zu den Nieh-Yan Invarianten, beginnend mit Nieh u. Yan (1982), taucht unter dem schlichten Verweis auf die Geometrie und Topologie des kosmologischen de Sitter Modells die $n \times n$ dimensionale Matrix $\bar{\omega}_{(n)}^{AB}$ der Zusammenhangs-1-Formen in folgender Form auf:

$$\bar{\omega}_{(5)}^{AB} = \begin{pmatrix} \omega_{(5-1)}^{ab} & \frac{1}{L} \theta_{(5-1)}^a \\ -\frac{1}{L} \theta_{(5-1)}^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{cases} A, B \in \{1, \dots, 5\}, \\ a, b \in \{1, \dots, 4\}, \end{cases} \quad (32.14.14)$$

wobei L der Radius des de Sitter Kosmos sei.

Problematisch ist der Verweis auf die Zusammenhangsform des kosmologischen de Sitter Modells, da die dort zugrunde liegenden Mannigfaltigkeiten $SO(1, 4)$ und $SO(1, 3)$ als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten ja nicht kompakt und damit topologisch doch sehr verschieden von den Riemannschen Mannigfaltigkeiten $SO(5)$ und $SO(4)$ sind. Eine sehr schöne Beschreibung der de Sitter Raumzeit findet sich z.B. in Hawking u. Ellis (1973), S. 124 ff.

Wenn wir uns aber an die Methode der konformen Transformationen erinnern (siehe z.B. Nakahara (2003), S. 274 ff.), dann können wir die obige S^n Zusammenhangs-1-Form $\omega_{(n)}^{AB}$ aus 32.14.12 in eine zu 32.14.14 ähnliche Form transformieren.

Definition 32.14.7 Seien M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und $f : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus, dann heißt f eine Isometrie, wenn gilt:

$$f^* g_{f(p)} = g_p . \quad (32.14.15)$$

Sei $\sigma \in \mathcal{F}(M)$, d.h. σ sei eine C^∞ -Funktion auf M , dann heißt f eine konforme Transformation, wenn gilt:

$$f^* g_{f(p)} = e^{2\sigma} g_p . \quad (32.14.16)$$

Man sieht also sofort, daß konforme Transformationen Verallgemeinerungen von Isometrien sind. Das Schöne an konformen Transformationen ist, daß sie alle Winkel erhalten und damit zwar die Skalen auf der Mannigfaltigkeit ändern, aber die Gestalt erhalten. Seien $X, Y \in T_p M$, dann folgt mit 15.10.1:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{g_p(X, Y)}{[g_p(X, X)g_p(Y, Y)]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \\ \cos \varphi' &= \frac{g_{f(p)}(f_* X, f_* Y)}{[g_{f(p)}(f_* X, f_* X)g_{f(p)}(f_* Y, f_* Y)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{f^* g_{f(p)}(X, Y)}{[(f^* g_{f(p)}(X, X))(f^* g_{f(p)}(Y, Y))]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{e^{2\sigma} g_p(X, Y)}{[(e^{2\sigma} g_p(X, X))(e^{2\sigma} g_p(Y, Y))]^{\frac{1}{2}}} = \cos \varphi . \end{aligned}$$

Sei S^2 wie oben durch sphärische Koordinaten beschrieben:

$$x^1 = \sin \varphi^2 \sin \varphi^1 , \quad x^2 = \sin \varphi^2 \cos \varphi^1 , \quad x^3 = \cos \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = 1 ,$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= (d\varphi^2)^2 + (\sin \varphi^2)^2 (d\varphi^1)^2 , \end{aligned}$$

dann entspricht der Transformation $(d\tilde{s})^2 = r^2 (ds)^2$ gerade der Übergang zu $\sum_{i=1}^3 (\tilde{x}^i)^2 = r^2$, also zu einer Kugel mit geändertem Radius.

Lemma 32.14.8 Sei S^n wie oben eine n -dimensionale Sphäre, dann stellt

$$\tilde{\varphi}^n := \log\left(\tan \frac{\varphi^n}{2}\right) \quad (32.14.17)$$

eine konforme Transformation dar und führt zu folgender $n \times n$ dimensionalen Matrix $\tilde{\omega}_{(n)}^{AB}$ der Zusammenhangs-1-Formen:

$$\tilde{\omega}_{(n)}^{AB} = \begin{pmatrix} \omega_{(n-1)}^{ab} & -\tilde{\theta}_{(n-1)}^a \\ +\tilde{\theta}_{(n-1)}^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{cases} A, B \in \{1, \dots, n\}, \\ a, b \in \{1, \dots, n-1\}. \end{cases} \quad (32.14.18)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} d\tilde{\varphi}^n &= \left[\frac{d}{d\varphi^n} \log\left(\tan \frac{\varphi^n}{2}\right) \right] d\varphi^n = \left[\frac{1}{\tan \frac{\varphi^n}{2}} \frac{d}{d\varphi^n} \frac{\sin \frac{\varphi^n}{2}}{\cos \frac{\varphi^n}{2}} \right] d\varphi^n \\ &= \left[\frac{\cos \frac{\varphi^n}{2}}{\sin \frac{\varphi^n}{2}} \frac{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi^n}{2} - (-1) \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi^n}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi^n}{2}} \right] d\varphi^n \\ &= \left[\frac{1}{2 \sin \frac{\varphi^n}{2} \cos \frac{\varphi^n}{2}} \right] d\varphi^n = \left[\frac{1}{\sin \varphi^n} \right] d\varphi^n. \end{aligned}$$

$$(ds_{(n)})^2 = \sum_{a=1}^n dx_{(n)}^a + (dx_{(n)}^{n+1})^2 = (d\varphi^n)^2 + (\sin \varphi^n)^2 (ds_{(n-1)})^2 \quad \Rightarrow$$

$$(ds_{(n)})^2 = (\sin \varphi^n)^2 [d\tilde{\varphi}^n + (ds_{(n-1)})^2]$$

$$(d\tilde{s}_{(n)})^2 = [d\tilde{\varphi}^n + (ds_{(n-1)})^2].$$

Dies zeigt, daß die Transformation von φ^n nach $\tilde{\varphi}^n$ tatsächlich eine konforme Transformation ist.

Mit

$$(d\tilde{s}_{(n)})^2 = \sum_{A=1}^n \theta_{(n)}^A \otimes \theta_{(n)}^A \quad \text{und} \quad (ds_{(n-1)})^2 = \sum_{a=1}^{n-1} \theta_{(n-1)}^a \otimes \theta_{(n-1)}^a$$

folgt sofort für die nichtholonomen 1-Formen $\tilde{\theta}_{(n)}^n$ und $\tilde{\theta}_{(n)}^a$:

$$\tilde{\theta}_{(n)}^n = d\tilde{\varphi}^n, \quad \tilde{\theta}_{(n)}^a = \tilde{\theta}_{(n-1)}^a \quad \text{mit } 1 \leq a \leq n-1.$$

Weiter geht es wie oben mit der 1. Cartanschen Strukturgleichung 15.9.4 mit $T_{(n)}^a = 0$:

$$0 = d\tilde{\theta}_{(n)}^a + \tilde{\omega}_{(n)}^a{}_b \wedge \tilde{\theta}_{(n)}^b \quad \text{mit } 1 \leq a, b \leq n.$$

Für $a = n$, $b \in \{1, \dots, n\}$ folgt wegen der Antisymmetrie von $\tilde{\omega}_{(n)b}^a$, d.h. speziell wegen $\tilde{\omega}_{(n)n}^n = 0$, daß der Indexbereich von b eingeschränkt werden kann auf $b \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$0 = d\tilde{\theta}_{(n)}^n + \tilde{\omega}_{(n)b}^n \wedge \theta_{(n)}^b = dd\tilde{\varphi}^n + \tilde{\omega}_{(n)b}^n \wedge \theta_{(n)}^b = \tilde{\omega}_{(n)b}^n \wedge \theta_{(n)}^b \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{\omega}_{(n)b}^n = -\tilde{\omega}_{(n)n}^b \sim \theta_{(n)}^b, \quad \text{wir wählen: } \tilde{\omega}_{(n)n}^b = -\theta_{(n)}^b.$$

Für $a, b \in \{1, \dots, n-1\}$ folgt:

$$d\tilde{\theta}_{(n)}^a + \tilde{\omega}_{(n)b}^a \wedge \tilde{\theta}_{(n)}^b = d\tilde{\theta}_{(n-1)}^a + \tilde{\omega}_{(n)b}^a \wedge \tilde{\theta}_{(n-1)}^b \quad \Rightarrow \quad \omega_{(n)b}^a = \omega_{(n-1)b}^a. \quad \square$$

Etwas in diesem Beweis ist höchst bemerkenswert und die Grundlage für das Weitere: Wir haben im obigen Beweis davon Gebrauch gemacht, daß die Torsion von $SO(n)$ verschwindet:

$$T_{(n)}^A := d\tilde{\theta}_{(n)}^A + \tilde{\omega}_{(n)B}^A \wedge \tilde{\theta}_{(n)}^B = 0 \quad \text{mit } 1 \leq A, B \leq n.$$

Die Einbettung von $SO(n-1)$ in $SO(n)$ kann nun aber sehr wohl eine Torsion besitzen! Und diese benennen wir hier als $T_{(n-1)}^a$:

$$T_{(n-1)}^a := d\tilde{\theta}_{(n)}^a + \tilde{\omega}_{(n)b}^a \wedge \tilde{\theta}_{(n)}^b = d\tilde{\theta}_{(n-1)}^a + \tilde{\omega}_{(n-1)b}^a \wedge \tilde{\theta}_{(n-1)}^b \quad \text{mit } 1 \leq a, b \leq n-1.$$

Aus der Zusammenhangs-1-Form $\tilde{\omega}_{(n)}^{AB}$ folgt für die Krümmungs-2-Form $\tilde{R}_{(n)}^{AB}$:

$$\tilde{R}_{(n)}^{AB} = d\tilde{\omega}_{(n)}^{AB} + \tilde{\omega}_{(n)C}^A \wedge \tilde{\omega}_{(n)B}^C = \begin{pmatrix} R_{(n-1)}^{ab} - \tilde{\theta}_{(n-1)}^a \wedge \tilde{\theta}_{(n-1)}^b & -\tilde{T}_{(n-1)}^a \\ \tilde{T}_{(n-1)}^b & 0 \end{pmatrix}. \quad (32.14.19)$$

Wir spezialisieren die Betrachtung jetzt auf die Einbettung von $SO(4)$ in $SO(5)$, also $n = 5$. Die Pontrjagin-Klassen \tilde{p}_1 von $SO(5)$ und $SO(4)$ sind definiert als (32.9.25):

$$\tilde{p}_1(\tilde{R}_{(5)}^{AB}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 (\tilde{R}_{(5)}^{AB} \wedge \tilde{R}_{(5)BA}) \quad \text{und} \quad \tilde{p}_1(\tilde{R}_{(4)}^{ab}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 (\tilde{R}_{(4)}^{ab} \wedge \tilde{R}_{(4)ba}).$$

Für $\tilde{R}_{(5)}^{AB} \wedge \tilde{R}_{(5)BA}$ ergibt sich (mit $\langle \tilde{\theta}^a | \tilde{e}_b \rangle = \delta^a_b$):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{(5)}^{AB} \wedge \tilde{R}_{(5)BA} &= (R_{(4)}^{ab} - \tilde{\theta}_{(4)}^a \wedge \tilde{\theta}_{(4)}^b) \wedge (R_{(4)ba} - \tilde{e}_{(4)b} \wedge \tilde{e}_{(4)a}) \\ &\quad - \tilde{T}_{(4)}^a \tilde{T}_{(4)a} - \tilde{T}_{(4)}^b \tilde{T}_{(4)b} \\ &= R_{(4)}^{ab} \wedge R_{(4)ba} - R_{(4)}^{ab} \tilde{e}_{(4)b} \wedge \tilde{e}_{(4)a} - \tilde{\theta}_{(4)}^a \wedge \tilde{\theta}_{(4)}^b R_{(4)ba} - 2\tilde{T}_{(4)}^a \tilde{T}_{(4)a} \\ &= R_{(4)}^{ab} \wedge R_{(4)ba} - 2(R_{(4)ab} \tilde{\theta}_{(4)}^b \wedge \tilde{\theta}_{(4)}^a + \tilde{T}_{(4)}^a \tilde{T}_{(4)a}) \\ &= R_{(4)}^{ab} \wedge R_{(4)ba} - 2(\tilde{T}_{(4)}^a \tilde{T}_{(4)a} - R_{(4)ab} \tilde{\theta}_{(4)}^a \wedge \tilde{\theta}_{(4)}^b). \end{aligned} \quad (32.14.20)$$

$$\begin{aligned}
N(M) &:= \int_M (\tilde{T}_{(4)}^a \tilde{T}_{(4)a} - R_{(4)ab} \tilde{\theta}_{(4)}^a \wedge \tilde{\theta}_{(4)}^b) = -\frac{1}{2} \left(\int_M \tilde{R}_{(5)}^{AB} \wedge \tilde{R}_{(5)BA} - \int_M R_{(4)}^{ab} \wedge R_{(4)ba} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{i} \right)^2 \left(\int_M \tilde{p}_1(\tilde{R}_{(5)}^{AB}) - \int_M \tilde{p}_1(\tilde{R}_{(4)}^{ab}) \right) \\
&= (2\pi^2)(P_1(SO(5)) - P_1(SO(4))) \in (2\pi^2)\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{32.14.21}$$

Also ist das Spektrum der Nieh-Yan-Zahlen gleich einer reellen Konstanten mal der Differenz zweier Pontrjagin-Zahlen, d.h. gleich einer reellen Konstanten mal einer ganzen Zahl.

Zum Ende dieses Kapitels über Charakteristische Klassen und Charakteristische Zahlen sei noch der Schlußsatz aus einem Festvortrag von Nieh (Nieh (2007)) zum 85. Geburtstag von Chen Ning Yang (31.1) im Jahr 2007 zitiert:

„Torsion is a geometric property not well investigated in mathematics.. It is physicists' search for an extension of Einstein's general theory of relativity that torsion naturally appears. The properties of the torsional topological invariant remains to be studied.”

33 Die Indexsätze von Atiyah und Singer

33.1 Friedrich E. P. Hirzebruch (1927 - 2012)

Friedrich Hirzebruch war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker in der zweiten Hälfte des 20. Jh. Er wurde bekannt für seine grundlegenden Beiträge in der algebraischen Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

Hirzebruch wurde 1927 in Hamm in Nordrhein-Westfalen geboren. Hirzebruchs Vater arbeitete als Rektor und als ein sehr inspirierender Mathematik-Lehrer an einem Gymnasium und brachte seinen Sohn schon in frühen Jahren mit der Schönheit der Mathematik in Berührung. Im Jahr 1945 wurde er in den letzten Wochen des Krieges noch von der Deutschen Wehrmacht in eine Luftabwehr-Batterie einberufen, überstand aber glücklicherweise die letzten Kriegsmonate unbeschadet. Von 1945 bis 1950 studierte er Mathematik, Physik und Mathematische Logik an der Universität in

Münster und an der ETH Zürich. In Zürich wurde er im Jahr 1950 bei Behnke und Hopf promoviert. Das Thema seiner Dissertation war: *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen*. Im Jahr 1952 heirateten er und Inge Spitzley und hatten gemeinsam drei Kinder, von denen die beiden älteren Töchter dann auch Mathematik studierten.

Von 1952 bis 1954 forschte Hirzebruch in Princeton am Institute for Advanced Study. Dort arbeitete er u.a. mit Kodaira und Bott zusammen und dort entstand sein *Signatur-satz* und darauf aufbauend der heute sog. *Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz*, eine Vorstufe zu den *Atiyah-Singer-Indexsätzen*. Anschließend übernahm er eine Assistenzprofessur in Princeton, bis er dann 1956 einem Ruf als Ordinarius an die Universität Bonn folgte, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1993 arbeitete. In diesen Jahren nahm er auch zahlreiche kurze Gastprofessuren weltweit an.

Gleich zu Beginn seiner Bonner Zeit erschien im Jahr 1956 Hirzebruchs bis heute berühmtes Buch *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie* und er startete mit großem Enthusiasmus seine bald ebenso berühmten *Bonner Mathematische Arbeitstagungen*, zu denen er die internationale Mathematiker-Elite nach Bonn holen

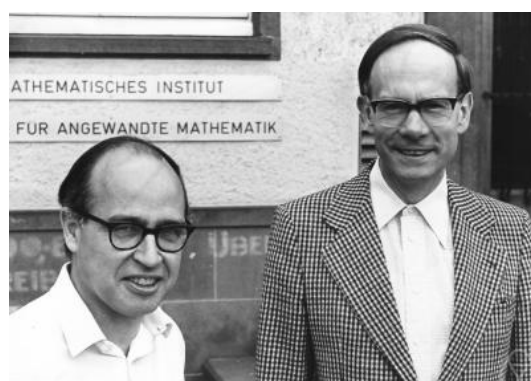


Abbildung 33.1: Atiyah & Hirzebruch, K. Jacobs (1977), CC-BY-SA-2.0 de. (Math. Inst. Oberwolfach) [http://de.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Hirzebruch]

konnte. Im Jahr 1969 gründete er den *Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik* an der Universität Bonn, der dann im Jahr 1980 in das *Max-Planck-Institut für Mathematik* in Bonn überging.

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge waren:

- Signatursatz und Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz,
- komplexe Manifoldigkeiten,
- zusammen mit Atiyah die topologische K-Theorie,
- algebraische Flächen,
- Singularitäten in der Topologie,
- und, und, und ...

Hirzebruch war neben seinen Forschungen und seiner bedeutsamen wissenschaftlichen Organisationsarbeit auch ein engagierter und inspirierender Lehrer, so daß aus seinem Institut viele bedeutende Mathematiker hervorgingen. Es seien an dieser Stelle nur drei Hirzebruch-Schüler gesondert erwähnt:

- Don Zagier, der Hirzebruch als Direktor des Max-Planck Institus für Mathematik in Bonn nachfolgte.
- Bernhelm Booß-Bavnbek, der eine schöne Einführung zum Atiyah-Singer-Indexsatz publiziert hat (Booß (1977), bzw. auf englisch Booss u. Bleecker (1985), und deutlich erweitert und aktualisiert in Booss u. Bleecker (2013).
- Winfried Scharlau, dem wir ein wunderbares Buch über Hirzebruch und seine Zeit verdanken (Scharlau (2017)). In dieser Biographie berichtet Scharlau u.a. auf S. 351, daß Hirzebruchs letzte Publikation den Titel trug „Why do I like Chern, and why do I like Chern classes?“, erschienen zu Cherns 100. Geburtstag.

Hirzebruchs Ehrungen waren zahlreich, u.a. Wolf-Preis für Mathematik 1988, Albert-Einstein-Medaille 1999, Stefan-Banach-Medaille 1999, u.v.a.

[Quellen: en.wikipedia: Friedrich_Hirzebruch, und insb. der sehr schöne Nachruf von Atiyah & Zagier Atiyah u. Zagier (2014)].

33.2 Sir Michael Atiyah (1929-2019)

Atiyah ist einer der einflußreichsten Mathematiker des 20. Jh. und besonders interessiert am Dialog zwischen der Mathematik und der theoretischen Physik. Siehe dazu etwa den neueren Artikel von Atiyah mit Dijkgraaf und Hitchin 'Geometry and Physics': Atiyah u. a. (2010).

Atiyah wurde in London geboren, verbrachte jedoch seine Schulzeit in Khartoum in Sudan und in Kairo in Ägypten. Zum Studium der Mathematik kehrte er nach England zurück und wurde bei Hodge in Cambridge promoviert mit einer Arbeit zum Thema: *Some Applications of Topological Methods in Algebraic Geometry*. Er heiratete 1955 Lily Brown und hat mit ihr drei Söhne. Es folgten Aufenthalte am 'Institute for Advanced Study' in Princeton, dann erneut an der 'Cambridge University' und schließlich eine Professur an der 'University of Oxford'. Atiyah engagierte sich auch gesellschaftspolitisch in der 'Pugwash Conferences on Science and World Affairs'.

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge sind der *Atiyah-Bott Fixpunktsatz*, der *Atiyah-Singer-Indexsatz* (der uns hier interessieren soll), zusammen mit Friedrich Hirzebruch die *topologische K-Theorie*, zusammen mit Lars Gårding *hyperbolische Differentialgleichungen*, zusammen mit Jones *Yang-Mills Theorien*, zusammen mit Witten *M-Theorie* und *topologische Quantenfeld-Theorien*, und, und, und ... - siehe auch: Michael Atiyah, „Collected Works“ in 6 Bänden (Atiyah (1988), Atiyah (2005)):

- Vol. I: frühe Arbeiten, beginnend mit Atiyahs erster Publikation 1952 in seinem zweiten Jahr als Undergraduate-Student, und Arbeiten zu allgemeinen Themen.
- Vol. II: frühe Arbeiten zur K-Theory, und die gemeinsamen Arbeiten mit Hirzebruch et al.
- Vol. III und IV: die vielen Arbeiten von 1963-84 auf dem Gebiet der Indexsätze elliptischer Operatoren, zusammen mit Hirzebruch, Singer, Bott, Patodi, Gårding.
- Vol. V: von 1977 an verschoben sich Atiyahs Interessen in Richtung Eichtheorien und Verbindungen zwischen Geometrie und Physik.
- Vol. VI: die Arbeiten von 1987-2002 behandeln die Themen Skyrmionen (stabile Wirbel eines Feldes als topologisches Modell für Elementarteilchen), "Atiyah's Axiome" für topologische Quantenfeld-Theorien, Monopole, Knoten, K-Theorie, and M-Theorie.

Atiyah selbst nennt als die Mathematiker, die ihn am meisten beeinflußt haben: Riemann, Hamilton, ganz besonders Weyl, und in der Gegenwart Penrose, Hörmander,



Abbildung 33.2: M. Atiyah
G. Greuel (2007), CC-BY-SA-2.0 de.
(Math. Inst. Oberwolfach)
[http://de.wikipedia.org/wiki/Michael_Francis_Atiyah]

Connes und Bismut. Atiyah erhielt zahlreiche Preise, darunter 1966 die Fields-Medaille und 2004 zusammen mit Singer den Abel-Preis.

Siobhan Roberts hat im Jahr 2016 für das Quanta-Magazine ein sehr schönes und eindrückliches Interview mit Michael Atiyah veröffentlicht: Roberts (2016).

[Quelle: en.wikipedia: Michael_Atiyah].

33.3 Isadore M. Singer (1924-2021)

Isadore Manuel Singer war ein bedeutender US-amerikanischer Mathematiker auf dem Gebiet der Analysis, der sich immer für die Verbindungen der modernen Differentialgeometrie zur theoretischen Physik interessiert hat.

Er wurde 1924 in Detroit geboren, studierte zunächst Physik an der 'University of Michigan' und wurde nach der Unterbrechung durch den 2. Weltkrieg 1950 bei Irving Segal an der 'University of Chicago' promoviert mit einer Arbeit zum Thema: *Lie-Algebren unbeschränkter Operatoren*. Er heiratete 1961 Sheila Ruff, mit der er fünf Kinder hatte. Singer arbeitete nach seiner Promotion am 'Massachusetts Institute of Technology' (MIT), dann folgten Aufenthalte an verschiedenen Universitäten in den USA, u.a. am 'Institute for Advanced Study' in Princeton, bis er 1983 ans 'MIT' zurückkehrte. Singer engagierte sich in der 'National Academy of Sciences', der 'American Academy of Arts and Sciences' und der 'American Mathematical Society' (AMS). Sehr schön ist das MIT-Interview mit Isadore Singer über sein Leben: MIT150 (2010).



Abbildung 33.3: I. Singer

G.M. Bergman (1977), CC BY-SA 3.0.

(Math. Inst. Oberwolfach)

[http://de.wikipedia.org/wiki/Isadore_M._Singer,]

Seine wichtigsten mathematischen Beiträge sind der *Atiyah-Singer-Indexsatz*, der *Atiyah-Singer-Patodi Indexsatz für berandete Mannigfaltigkeiten* und die *Theorie der analytischen Torsion* (auf der Basis der Eigenwerte des Laplaceoperators).

Singer erhielt zahlreiche Preise, darunter 1988 die Wigner-Medaille und 2004 zusammen mit Atiyah den Abelpreis. Eindrücklich ist auch das Interview mit Atiyah und Singer anlässlich der Verleihung des Abel-Preises im Jahr 2004 in Oslo: Raussen u. Skau (2004).

Peter Woit (Woit (2021)) schreibt in seinem Nachruf auf Isadore Singer:

„Atiyah, Bott and Singer struck me each in their own way as wonderfully warm and enthusiastic personalities, and I believe this influenced the atmosphere among mathematicians working in their fields. ...

A mathematical high point of this career was his work during the early 1960s with Atiyah that led to the Atiyah-Singer index theorem. A crucial part of this story was Atiyah in 1962 asking Singer why the A-roof genus was integral. Singer realized that this was because it counts the number of solutions of an equation, and that the equation was the Dirac equation.”

Auch Daniel S. Freed, ein ehemaliger Doktorand von Isadore Singer, hat einen schönen persönlichen Nachruf auf seinen Lehrer im Quanta-Magazine verfaßt: Freed (2021).

[Quelle: en.wikipedia: Isadore_Singer]

33.4 Atiyah-Singer-Indexsatz für Vektorbündel

Die Fragestellung des Index eines elliptischen, partiellen Differentialoperators (EPDO) geht auf den russischen Mathematiker Israel Gel'fand zurück, der im Jahr 1960 herausgefunden hatte, daß der sog. *analytische Index* eines EPDO eine Homotopie-Invariante ist.

Im Rahmen der Funktionalanalysis von Fredholm-Operatoren zeigt man, daß Fredholm-Operatoren einen wohldefinierten *analytischen Index* besitzen. Dieser Index eines Fredholm-Operators F ist gerade die Dimension des Lösungsraums der homogenen Gleichung ($Fy = 0$) minus der Dimension des Raums der Nebenbedingungen einer inhomogenen Gleichung ($Fy = g$) - siehe Schiekel (2019), Anhang: Kapitel *Fredholm-Operatoren*:

$$\text{ind}(F) = \dim(\ker(F)) - \dim(\text{coker}) = \dim(\ker(F)) - \dim(F^\dagger) .$$

In der Theorie der EPDO, d.h. der elliptischen Pseudodifferential-Operatoren (E Ψ DO), zeigt man, daß E Ψ DOs auf kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand Fredholm-Operatoren sind, und daß damit also ihr analytischer Index eine Homotopie-Invariante ist (siehe wiederum Schiekel (2019), Anhang: Kapitel *Fredholm-Operatoren*).

Gel'fand stellte also die Frage: kann man diesen analytischen Index auch *geometrisch-topologisch* tiefer verstehen?

Hirzebruch hatte bereits 1953 mit dem *Hirzebruch-Signatur-Satz* und 1954 mit dem *Hirzebruch-Riemann-Roch-Satz* grundlegende Arbeiten zu geometrisch-topologischen Invarianten gelegt. Dabei benutzte Hirzebruch bereits die *Kobordismus-Theorie* und die Theorie der E Ψ DO. Daß sich aber diese Homotopie-Invariante des analytischen Indexes eines jeden E Ψ DO als Verallgemeinerung des Gauß-Bonnet-Satzes als ein Integral über Charakteristische Klassen, d.h. geometrische Strukturen, schreiben läßt, ist das große Verdienst von Atiyah und Singer, wobei Hirzebruch, Segal, Bott, Patodi, Gilkey et al., ebenfalls ganz wesentliche Beiträge auf diesem Gebiet geleistet haben.

Wir wollen hier nur den einfachsten Atiyah-Singer-Indexsatz für elliptische Komplexe auf kompakten Mannigfaltigkeiten *ohne Rand* vorstellen. Der ursprüngliche Beweis von Atiyah und Singer aus dem Jahr 1963 benutze die *Kobordismus-Theorie* nach Hirzebruch, ihr erster veröffentlichter Beweis im Jahr 1965 die *topologische K-Theorie*. Diese beiden Beweise konstruieren aus dem Hauptsymbol des E Ψ DO ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit und untersuchen Charakteristische Klassen dieses Vektorbündels. Beide Beweise sind sehr aufwendig und finden sich in Atiyahs *Collected Works* (Atiyah (1988), Bd. III und IV). Leichter zugänglich als diese Originalarbeiten ist jedoch die Darstellung von Gilkey (1995), S. 273 ff.

Gilkey schlug im Jahr 1973 einen neuen Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes auf Basis einer Entwicklung des sog. *Wärmeleitungskerns* (engl. *heat-kernel*) vor, d.h. des Integralkerns einer Lösung der Wärmeleitungs-PDO. Der Vorschlag wurde noch im gleichen Jahr 1973 von Atiyah, Bott und Patodi durchgeführt. Siehe hierzu die Darstellung des Autors in Schiekel (2017), S. 349 ff., und Gilkey (1995), S. 57 ff. Dieser Beweis ist

deutlich kürzer als der K-Theorie Beweis, hat aber den Nachteil, daß die Koeffizienten der vorkommenden Potenzreihen nur bis auf eine endliche Anzahl freier Konstanten bestimmt sind. Um diese freien Konstanten festzulegen, muß man dann Beispiele berechnen, deren Ergebnisse bereits bekannt sind.

Deutlich kürzer und einfacher ist der von Physikern gefundene Beweis eines Atiyah-Singer-Indexsatzes für euklidische chirale Dirac-Operatoren auf Spinbündeln mittels eines *supersymmetrischen Pfadintegrals*. Dieser Pfadintegral-Beweis wurde nach Vorarbeiten von Witten von Alvarez-Gaumé und unabhängig und gleichzeitig auch von Friedan & Windey entdeckt (siehe wiederum Schiek (2019)). Inspiriert durch den supersymmetrischen Pfadintegral-Beweis legte Getzler dann im Jahr 1983 einen sehr kurzen und eleganten Beweis auf der Basis einer supersymmetrischen Wärmeleitungs-PDO vor. Die Methode von Getzler ist sehr schön in Roe (1998), S. 151 ff. beschrieben. Die umfassendste moderne mathematische Darstellung der Getzler-Methode und vieler ihrer Anwendungen findet sich im Buch von Berline, Getzler und Vergne (Berline u. a. (2004)). Erwähnenswert ist sicherlich noch, daß der Pfadintegral-Beweis und der Getzler-Beweis sich zunächst nicht auf allgemeine EΨDOs beziehen, sondern nur auf euklidische Dirac-Operatoren auf Spinbündeln. Man kann aber zeigen, daß sich die Gültigkeit dieses Dirac-Operatoren-Indexsatzes aufgrund des Auftretens von Dirac-Operatoren in einer Poincaré-Dualität zwischen der K-Theorie und der K-Homologie auf alle EΨDOs ausdehnen läßt (Roe (1998), S. 166).

Wir hatten im Rahmen der Hodge-Theorie (Kapitel 25.2) den *de Rham Komplex* kennengelernt, eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, orientierbaren, differenzierbaren, randlosen, m-dimensionalen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M (siehe: 25.2.1, 25.2.2, 25.2.3):

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0, \quad (33.4.1)$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M) \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M) \xleftarrow{d_1^\dagger} \dots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M) \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M) \xleftarrow{d_n^\dagger} 0. \quad (33.4.2)$$

$$\Delta_r : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M), \quad \Delta_r := d_{r-1}^\dagger d_r + d_r^\dagger d_{r-1}. \quad (33.4.3)$$

Diesen *de Rham Komplex* kann man nun weiter zu einem *elliptischen Komplex* verallgemeinern - siehe Schiek (2019), Anhang: Kapitel „*Elliptische Komplexe und deren Hodge-Zerlegung*“. Über M gebe es also ein Vektorbündel \mathcal{V} , bestehend aus n komplexen k -dimensionalen Vektorräumen und auf diesem Vektorbündel \mathcal{V} gebe es vektorwertige Matrix-EΨDOs P_i der Ordnung d :

$$\mathcal{V} := \{V_i = V_i(M) \mid 0 \leq i \leq n\} \quad (33.4.4)$$

$$\mathcal{P} := \{P_i \mid P_i : C^\infty(V_i) \rightarrow C^\infty(V_{i+1}), 0 \leq i \leq n, \quad P_i = 0 \quad \text{für } i < 0 \text{ und } i \geq n\}. \quad (33.4.5)$$

Dann wird ein *elliptischer Komplex* $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ als der folgende Komplex definiert:

$$0 \xrightarrow{P_0} C^\infty(V_1) \xrightarrow{P_1} C^\infty(V_2) \xrightarrow{P_2} \dots \xrightarrow{P_{n-2}} C^\infty(V_{n-1}) \xrightarrow{P_{n-1}} C^\infty(V_n) \xrightarrow{P_n} 0, \quad (33.4.6)$$

$$0 \xleftarrow{P_0^\dagger} C^\infty(V_1) \xleftarrow{P_1^\dagger} C^\infty(V_2) \xleftarrow{P_2^\dagger} \dots \xleftarrow{P_{n-2}^\dagger} C^\infty(V_{n-1}) \xleftarrow{P_{n-1}^\dagger} C^\infty(V_n) \xleftarrow{P_n^\dagger} 0, \quad (33.4.7)$$

mit Δ_i als verallgemeinertem Laplace-Operator der Ordnung $2d$:

$$\Delta_i : C^\infty(V_i) \rightarrow C^\infty(V_i), \quad \Delta_i := P_{i-1}P_{i-1}^\dagger + P_i^\dagger P_i. \quad (33.4.8)$$

Daß dieser verallgemeinerte Laplace-Operator Δ_i in einem elliptischen Komplex $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ tatsächlich auch ein elliptischer Ψ DO und damit ein Fredholm-Operator ist wird in Schiekel (2019), Anhang: Kapitel „Fredholm-Operatoren“ gezeigt.

Weiter kann man für den elliptischen Komplex $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ Kohomologie-Vektorräume definieren:

$$H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V}) := \ker(P_{i+1}) / \text{Im}(P_i) \quad (33.4.9)$$

und zeigen, daß die Kohomologie-Vektorräume $H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ isomorph zu den Vektorräumen der entsprechenden harmonischen Formen $\text{Harm}^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})$, d.h. zu $\ker(\Delta_i)$, sind.

Definition 33.4.1 *Der analytische Index eines elliptischen Komplexes wird definiert als:*

$$\text{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V}) := \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{P}, \mathcal{V})) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(\ker(\Delta_i)). \quad (33.4.10)$$

Dieser analytische Index ist trotz seiner vergleichsweise einfachen Definition üblicherweise sehr schwierig zu berechnen - aber immerhin ist er klarerweise eine natürliche Zahl!

Für den Index eines Fredholm-Operators A gilt (siehe wiederum Anhang *Fredholm-Operatoren* in Schiekel (2019)):

$$\text{ind}(A) := \dim(\ker(A)) - \dim(\text{coker}(A)) = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A^\dagger)). \quad (33.4.11)$$

Wie hängt nun der analytische $\text{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ eines elliptischen Komplexes mit der Fredholm-Index Definition zusammen? Hierzu betrachtet man den kurzen elliptischen Komplex

$$0 \xrightarrow{i=P_{-1}} C^\infty(V_1) \xrightarrow{P=P_0} C^\infty(V_2) \xrightarrow{P_1} 0, \quad \Rightarrow \quad (33.4.12)$$

$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V}) &= (-1)^0 \dim(H^0(\mathcal{P}, \mathcal{V})) + (-1)^1 \dim(H^1(\mathcal{P}, \mathcal{V})) \\ &= \{\dim(\ker(P)) - \dim(\text{Im}(i))\} - \{\dim(\ker(P_1)) - \dim(\text{Im}(P))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dim(\ker(P)) - \{\dim(C^\infty(V_2)) - \dim(\operatorname{Im}(P))\} \\
&= \dim(\ker(P)) - \dim(\operatorname{coker}(P)) .
\end{aligned} \tag{33.4.13}$$

Hieraus sieht man, daß die Definition des analytischen $\operatorname{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V})$ tatsächlich eine Verallgemeinerung der Fredholm-Index Definition auf elliptische Komplexe ist.

Der jetzt zitierte Atiyah-Singer-Indexsatz (Shanahan (1978), S. 18) gilt für die soeben eingeführten elliptische Komplexe $(\mathcal{P}, \mathcal{V})$.

Satz 33.4.2

$$\text{analytischer Index} = \text{topologischer Index} . \tag{33.4.14}$$

$$\operatorname{ind}(\mathcal{P}, \mathcal{V}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_M \left[\operatorname{ch}(\oplus_r (-1)^r \mathcal{F}_{V_r}) \frac{Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})}{e(\mathcal{F}_{TM})} \right]_{\text{vol}} . \tag{33.4.15}$$

Hierbei bedeutet die Bezeichnungsweise $[\bullet]_{\text{vol}}$, daß von der Form in $[\bullet]$ nur der Volumenanteil zu nehmen und über diesen zu integrieren ist. Häufig findet man in der Literatur Darstellungen, in denen als Argumente in Chern-Charakter, Todd-Klasse und Euler-Klasse nur der jeweilige Raum angegeben wird und nicht die entsprechende Krümmungs-2-Form, d.h. man findet die Schreibweise $Td(TM^{\mathbb{C}})$ anstelle von $Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})$.

Zunächst fällt einem an dieser Formel für den Atiyah-Singer-Indexsatz auf, daß der topologische Index auf der rechten Seite eine rationale Zahl zu sein scheint, obwohl der analytische Index auf der linken Seite eine ganze Zahl ist. Weiter stellt sich die Frage, wie diese Formel im Fall von $e(\mathcal{F}_{TM}) = 0$ zu verstehen ist, denn z.B. für einen Torus T^m verschwindet die Krümmung und damit auch $e(\mathcal{F}_{TM})$ - siehe 15.12.3 und 15.12.10. Die genauere Betrachtung der Konstruktion für den Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes zeigt nun, daß tatsächlich auch der topologische Index ganzzahlig ist und daß sich die Division $\operatorname{ch}(\oplus_r (-1)^r \mathcal{F}_{V_r})/e(\mathcal{F}_{TM})$ bei verschwindender Eulerklasse analytisch ausführen läßt (Shanahan (1978), S. 17-19).

33.5 Atiyah-Singer-Indexsatz für de Rham Komplex

Wir hatten im Rahmen der Hodge-Theorie (Kapitel 25.2) den *de Rham Komplex* kennengelernt, eine Verallgemeinerung des Laplace-Operators von Funktionenräumen auf Räume von Differentialformen über *kompakten, orientierbaren, differenzierbaren, randlosen, m-dimensionalen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten M (siehe: 25.2.1, 25.2.2, 25.2.3). Damit wir den Atiyah-Singer-Indexsatz auf diesen elliptischen Komplex anwenden können, müssen zunächst die Differentialformen komplexifiziert werden:

$$0 \rightarrow \Omega^0(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \Omega^{n-1}(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_n} 0 , \tag{33.5.1}$$

$$0 \leftarrow \Omega^0(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_0^\dagger} \Omega^1(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_1^\dagger} \dots \xleftarrow{d_{n-2}^\dagger} \Omega^{n-1}(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_{n-1}^\dagger} \Omega^n(M)^{\mathbb{C}} \xleftarrow{d_n^\dagger} 0. \quad (33.5.2)$$

$$\Delta_r : \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}, \quad \Delta_r := d_{r-1}^\dagger d_{r-1} + d_r^\dagger d_r. \quad (33.5.3)$$

Den analytischen Index dieses Komplexes kennen wir bereits, es ist gerade die Euler-Charakteristik (33.4.10 und 24.0.22):

$$\begin{aligned} \text{ind}(d, \Omega^*(M)^{\mathbb{C}}) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(H^i(d, \Omega^*(M)^{\mathbb{C}})) \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \dim(H^i(d, \Omega^*(M))) = \chi(M). \end{aligned} \quad (33.5.4)$$

Jetzt soll der topologische Index des de Rham Komplexes nach 33.4.15 bestimmt werden. Sei die Dimension der Mannigfaltigkeit M geradzahlig, d.h. $m = 2l$. Im Folgenden schreiben wir anstelle von $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ jetzt $\wedge^r(T^*M)^{\mathbb{C}}$, weil dann der Übergang von $(T^*M)^{\mathbb{C}}$ nach $(TM)^{\mathbb{C}}$ klarer ersichtlich ist. Damit schreibt sich der topologische Index des de Rham Komplexes als:

$$(-1)^{l(l+1)} \int_M \left[ch \left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^{\mathbb{C}}} \right) \frac{Td(\mathcal{F}_{TM^{\mathbb{C}}})}{e(\mathcal{F}_{TM})} \right]_{\text{vol}}. \quad (33.5.5)$$

Für den ersten Faktor mit dem Chern-Charakter findet man wegen der Additivität der Chern-Charaktere:

$$\begin{aligned} ch \left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^{\mathbb{C}}} \right) \\ = 1 - ch(\mathcal{F}_{\wedge^1(T^*M)^{\mathbb{C}}}) + ch(\mathcal{F}_{\wedge^2(T^*M)^{\mathbb{C}}}) - \dots + (-1)^m ch(\mathcal{F}_{\wedge^m(T^*M)^{\mathbb{C}}}). \end{aligned} \quad (33.5.6)$$

Nun ist der Chern-Charakter definiert als (32.6.1)

$$ch(\mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}}) := \text{tr} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}}\right) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j(\mathcal{F}_{(T^*M)^{\mathbb{C}}})}, \quad (33.5.7)$$

wenn $\frac{i}{2\pi} \mathcal{F}$ diagonalisiert ist mit den Eigenwerten λ_j , $1 \leq j \leq m$.

Wir hatten in 32.5.14 gesehen, daß man die totale Chern-Klasse eines Vektorbündels auch als die Chern-Klasse eines Whitney-Summen-Bündels von k komplexen Linienbündeln interpretieren kann (Splitting-Prinzip) und daß für den Eigenwert eines komplexen Linienbündels L und den Eigenwert des dualen komplexen Linienbündels L^* gilt (32.5.15):

$$\lambda_1(\mathcal{F}_{L^*}) = -\lambda_1(\mathcal{F}_L).$$

Damit können wir in 33.5.7 von $\lambda_j(\mathcal{F}_{(T^*M)^c})$ bzgl. des Kotangentialbündel übergehen zu $\lambda_j(\mathcal{F}_{(TM)^c})$ bzgl. des Tangentialbündels

$$\lambda_j(\mathcal{F}_{(T^*M)^c}) = -\lambda_j(\mathcal{F}_{(TM)^c}), \quad (33.5.8)$$

und erhalten

$$ch(\mathcal{F}_{(T^*M)^c}) = \sum_{j=1}^m e^{-\lambda_j}(\mathcal{F}_{(TM)^c}). \quad (33.5.9)$$

Daraus folgt für 33.5.6

$$\begin{aligned} ch\left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^c}\right) &= 1 - \sum_{j=1}^m e^{-\lambda_j}(\mathcal{F}_{(TM)^c}) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^m e^{-\lambda_j} \wedge e^{-\lambda_k}(\mathcal{F}_{(TM)^c}) - \dots \\ &\quad + (-1)^m e^{-\lambda_1} \wedge e^{-\lambda_2} \wedge \dots \wedge e^{-\lambda_m}(\mathcal{F}_{(TM)^c}) \\ &= \prod_{j=1}^m (1 - e^{-\lambda_j})(\mathcal{F}_{(TM)^c}). \end{aligned} \quad (33.5.10)$$

Das ursprüngliche Vektorbündel TM ist ein reelles Vektorbündel und damit ist die ursprüngliche Krümmungs-2-Form \mathcal{F}_{TM} eine schiefsymmetrische reelle Matrix aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(k)$. TM wurde nur deshalb zu TM^c komplexifiziert, damit man den Atiyah-Singer-Indexsatz anwenden kann. Dabei bleibt aber \mathcal{F}_{TM^c} weiterhin schiefsymmetrisch und deswegen treten alle Eigenwerte paarweise als $\pm\lambda_j$ auf (siehe 32.9.7). Also können wir den obigen Chern-Charakter auch schreiben als:

$$ch\left(\bigoplus_{r=0}^m (-1)^r \mathcal{F}_{\wedge^r(T^*M)^c}\right) = \prod_{j=1}^{m/2} (1 - e^{-\lambda_j})(1 - e^{+\lambda_j})(\mathcal{F}_{(TM)^c}). \quad (33.5.11)$$

Für den zweiten Faktor von 33.5.5 mit der Todd-Klasse gilt mit 32.8.7:

$$Td(\mathcal{F}_{TM^c}) = \prod_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{1 - e^{-\lambda_j}}(\mathcal{F}_{TM^c}) = \prod_{j=1}^{m/2} \frac{(+\lambda_j)(-\lambda_j)}{(1 - e^{-\lambda_j})(1 - e^{+\lambda_j})}(\mathcal{F}_{TM^c}). \quad (33.5.12)$$

Für den dritten Faktor, die Euler-Klasse ergibt sich:

$$e(\mathcal{F}_{TM}) = \prod_{j=1}^{m/2} \lambda_j(\mathcal{F}_{TM^c}). \quad (33.5.13)$$

Jetzt setzen wir das Obige in 33.5.4 und 33.5.5 ein und erhalten als schönes Ergebnis einen verallgemeinerten Gauß-Bonnet-Satz:

$$\chi(M) = \int_M \prod_{j=1}^{m/2} \lambda_j(\mathcal{F}_{TM^c})|_{\text{vol}} = \int_M e(\mathcal{F}_{TM}). \quad (33.5.14)$$

Als Beispiele sollen eine 2-dimensionale und eine 4-dimensionale, orientierbare, randlose, differenzierbare Mannigfaltigkeit M betrachtet werden. Mit 32.11.8 und 32.11.9 ergeben sich:

$$m = 2: \quad \chi(M) = \frac{-1}{2\pi} \int_M R_{12}, \quad (33.5.15)$$

$$m = 4: \quad \chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \epsilon^{abcd} R_{ab} \wedge R_{cd}. \quad (33.5.16)$$

Der 2-dimensionale Fall ist gerade der klassische Gauß-Bonnet-Satz!

33.6 Atiyah-Singer-Indexsatz für Spinbündel

Sei ein euklidischer Dirac-Operator \hat{H} auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit M gegeben als (29.7.11, 29.7.15):

$$\hat{H} = i\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu) = i\hbar c \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^a{}^b \Sigma_{ab} \right). \quad (33.6.1)$$

Der euklidische Dirac-Operator \hat{H} ist selbstadjungiert und daher auch ein Fredholm-Operator. Damit folgt für den analytischen Index trivialerweise:

$$\text{index}(\hat{H}) = \dim(\ker(\hat{H})) - \dim(\ker(\hat{H}^\dagger)) = 0. \quad (33.6.2)$$

Als nächstes kann man den *chiralen* Teil \hat{D} dieses Dirac-Operators betrachten:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{D}^\dagger \\ \hat{D} & 0 \end{pmatrix}. \quad (33.6.3)$$

$$\text{index}(\hat{D}) := \nu_+ - \nu_- = \dim(\ker(\hat{D})) - \dim(\ker(\hat{D}^\dagger)). \quad (33.6.4)$$

Für diesen analytischen Index ergibt sich mit der \hat{A} -Klasse (32.10) der topologische Index zu (Nakahara (2003), S. 470):

Satz 33.6.1

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TM) = \int_M \left[\hat{A}(TM) \right]_{\text{vol}}. \quad (33.6.5)$$

Der Beweis dieses Satzes mittels eines supersymmetrischen Feynman-Pfadintegrals wird im nächsten Kapitel vorgestellt, und dürfte besonders für Physiker interessant sein.

33.7 Atiyah-Singer-Indexsatz für Spinbündel mit assoziiertem Vektorbündel

Sei wieder wie oben ein euklidischer Dirac-Operator \hat{H} auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit M gegeben (29.7.11, 29.7.15), aber diesmal möge das Spinorfeld zu der Darstellung einer Symmetriegruppe G gehören, z.B. $(U1)$, oder $SU(2)$, oder etc. Dann wird ein solcher Spinor mathematisch als Schnitt des Produktbündels $S(M) \otimes E$ beschrieben, wobei $S(M)$ das Spinorbündel S über der Mannigfaltigkeit M ist und E das assoziierte Vektorbündel über dem Prinzipalbündel $P(M, G)$. Wiederum betrachtet man den *chiralen* Teil dieses Dirac-Operators:

$$\hat{H}_E = i\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + \Omega_\mu - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu) = i\hbar c \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu}^{ab} \Sigma_{ab} - i \frac{q}{\hbar c} A_\mu) . \quad (33.7.1)$$

Hierfür ergibt sich mit der \hat{A} -Klasse (32.10) und dem Chern Charakter 32.6 der topologische Index zu (Nakahara (2003), S. 471):

Satz 33.7.1

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TM, E) = \int_M \left[\hat{A}(TM) \cdot \text{ch}(E) \right]_{\text{vol}} . \quad (33.7.2)$$

Besonders in der Festkörperphysik verwendet man zur Beschreibung der Periodizität eines Kristallgitters *periodische Randbedingungen* (Born-von-Kármán-Modell), und damit wird die zugrunde liegende $2l$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M zu einem Torus T^{2l} .

Lemma 33.7.2 Sei $M = T^{2l} = S^1 \times \dots \times S^1$, dann ist

$$\hat{A}(TM) = 1 . \quad (33.7.3)$$

Beweis: Da die \hat{A} -Klassen multiplikative charakteristische Klassen mit der \wedge -Multiplikation sind gilt:

$$\hat{A}(TM) = \hat{A}\left(\bigoplus_1^{2l} TS^1\right) = \prod_1^{2l} \hat{A}(TS^1) . \quad (33.7.4)$$

Die Mannigfaltigkeit TS^1 ist 1-dimensional und habe die Krümmung R . Damit folgt aus der Definition der \hat{A} -Klassen (32.10.12, 32.10.13, 32.10.14) über die Pontrjagin-Klassen (32.9.20, 32.9.21)

$$p_0(R) = 1 \quad \text{und}$$

$$p_1(R) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(R \wedge R) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\hat{A}(TS^1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{A}(TM) . \quad \square$$

Damit ergibt sich der Index für Spinbündel auf einer Mannigfaltigkeit $M = T^{2l}$ mit assoziiertem Vektorbündel zu

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TM, E) = \int_M [ch(E)]_{\text{vol}} . \quad (33.7.5)$$

Wie bereits oben definiert bedeutet die Bezeichnungsweise $[\bullet]_{\text{vol}}$, daß von der Form in $[\bullet]$ nur der Volumenanteil zu nehmen und im Anschluß über diesen zu integrieren ist.

Für ein Prinzipalbündel $P(T^2, U(1))$ mit der Gruppe $G = U(1)$ und einem abelschen Eichpotential \mathcal{A} , (d.h. einer lokalen \mathfrak{g} -wertigen Zusammenhang-1-Form), mit der Feldstärke $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ folgt aus 32.6.5:

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TM, E) = ch_1(\mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi} \int_{T^2} \mathcal{F} . \quad (33.7.6)$$

Die Physiker verwenden hier den Feldstärketensor F mit $\mathcal{F} =: iF$ und damit ergibt sich:

$$\text{ind}(\mathcal{P}, TM, E) = \nu_+ - \nu_- = -\frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F . \quad (33.7.7)$$

34 Funktionalableitung

Wir haben hier zur Erleichterung der Leser und Leserinnen den Abschnitt zur Funktionalableitung aus der Veröffentlichung des Autors Schiekel (2017), S. 359 ff., auch in dieses Manuskript eingefügt.

34.1 Funktionalableitung oder Fréchet-Ableitung

Die Funktionalableitung oder Fréchet-Ableitung eines Operators entspricht seiner Linearisierung. Seien \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 zwei Hilbert-Räume mit den jeweiligen Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. (Zur Definition der Fréchet-Ableitung genügen bereits normierte Räume.) Sei $F : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ eine im allgemeinen nichtlineare Abbildung von $\Omega \subseteq \mathcal{H}_1$ nach \mathcal{H}_2 und seien die Vektoren $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$ und $(|\phi\rangle + |\psi\rangle)$ alle Elemente aus Ω . Wenn es nun eine lineare, stetige Abbildung $DF(|\phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ gibt, so daß diese eine Tangente an die Abbildung F an der Stelle $|\phi\rangle$ ist, dann heißt F differenzierbar bei $|\phi\rangle$ und $DF(|\phi\rangle)$ die Ableitung von F an der Stelle $|\phi\rangle$.

Definition 34.1.1 *Wenn also ein $DF(|\phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ existiert, welches linear ist (bzw. kürzer gesagt $DF : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$), welches stetig ist und für welches der folgende Grenzwert existiert*

$$\lim_{\|\psi\rangle\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|F(|\phi\rangle + |\psi\rangle) - F(|\phi\rangle) - DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle\|_2}{\|\psi\rangle\|_1} = 0, \quad (34.1.1)$$

bzw. mit $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ für alle $\|\psi\rangle\|_1 < \delta$:

$$\|F(|\phi\rangle + |\psi\rangle) - F(|\phi\rangle) - DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle\|_2 \leq \|\psi\rangle\|_1 \epsilon(\|\psi\rangle\|_1). \quad (34.1.2)$$

dann heißt dieses $DF(|\phi\rangle)$ die Ableitung von F an der Stelle $|\phi\rangle$.

Wenn F differenzierbar ist, dann ist F auch stetig, denn aus 34.1.2 folgt:

$$\begin{aligned} \|F(|\phi\rangle + |\psi\rangle) - F(|\phi\rangle)\|_2 &\leq \|\psi\rangle\|_1 \epsilon(\|\psi\rangle\|_1) + \|DF(|\phi\rangle)\| \cdot \|\psi\rangle\|_1, \\ \lim_{\|\psi\rangle\|_1 \rightarrow 0} \|F(|\phi\rangle + |\psi\rangle) - F(|\phi\rangle)\|_2 &= 0. \end{aligned} \quad (34.1.3)$$

Wenn F differenzierbar ist, dann existiert die folgenden Richtungsableitung von F in Richtung $|\psi\rangle$ und ist mit der Ableitung aus 34.1.1 identisch:

$$DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle = \left. \frac{d}{dt}(F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle)) \right|_{t=0}. \quad (34.1.4)$$

Beweis: Wir setzen in der obigen Definition von 34.1.1 $|\psi\rangle \rightarrow t|\psi\rangle$:

$$\lim_{t\|\psi\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) - F(|\phi\rangle) - tDF(|\phi\rangle)|\psi\rangle\|_2}{t\|\psi\|_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{t} (F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) - F(|\phi\rangle)) - DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle \right\|_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left\| \frac{d}{dt} (F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle)) \Big|_{t=0} - DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle \right\|_2 = 0 \Rightarrow$$

$$DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle = \frac{d}{dt} (F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle)) \Big|_{t=0}. \quad \square$$

Die Ableitung $DF(|\phi\rangle)$ an der Stelle $|\phi\rangle$ ist definitionsgemäß linear in Bezug auf das Argument $|\psi\rangle$, die Richtung, (und nicht etwa in Bezug auf die Stelle $|\phi\rangle$,) also:

$$DF(|\phi\rangle)(\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle) = \alpha_1 DF(|\phi\rangle)|\psi_1\rangle + \alpha_2 DF(|\phi\rangle)|\psi_2\rangle.$$

Bei fixierter Richtung $|\psi_1\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$ ist $DF(\cdot)|\psi_1\rangle$ wieder eine Abbildung von $\Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ und wir können also die Ableitung von $DF(\cdot)|\psi_1\rangle$ bestimmen, welche dann die 2. Ableitung von F ist. Wenn also ein $D^2F(|\phi\rangle) : \Omega \times \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ existiert, welches linear und stetig ist und für welches der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{\|\psi_2\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|DF(|\phi\rangle + |\psi_2\rangle)|\psi_1\rangle - DF(|\phi\rangle)|\psi_1\rangle - D^2F(|\phi\rangle)|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\|_2}{\|\psi_2\|_1} = 0, \quad (34.1.5)$$

dann heißt dieses $D^2F(|\phi\rangle)$ die 2. Ableitung von F an der Stelle $|\phi\rangle$.

Folgerung:

Wenn F linear ist, also $F(\alpha_1|\phi\rangle + \alpha_2|\psi\rangle) = \alpha_1F(|\phi\rangle) + \alpha_2F(|\psi\rangle)$, dann können wir $F(|\phi\rangle) = F|\phi\rangle$ schreiben. Und weiter folgt aus 34.1.1 sofort, daß $F(|\psi\rangle) = F|\psi\rangle = DF(|\phi\rangle)|\psi\rangle$ für alle $|\phi\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$, d.h. $DF(|\phi\rangle) = F$ ist unabhängig von der Stelle $|\phi\rangle \in \Omega \subseteq \mathcal{H}_1$.

Für die zweite Ableitung eines linearen Operators F folgt wegen $DF(|\phi\rangle + |\psi_2\rangle) = DF(|\phi\rangle)$ mit 34.1.5, daß D^2F ein Null-Operator ist.

Besonders häufig kommt der Fall vor, daß $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}$ ist, daß also F ein nichtlineares Funktional auf \mathcal{H}_1 ist. Dann ist DF ein lineares Funktional auf \mathcal{H}_1 und wird häufig als δF bezeichnet, als Differential von F , also $\delta F : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1^* = \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathbb{R})$. Entsprechend wird $\delta F(|\phi\rangle)$ mit $\delta F(|\phi\rangle) : \Omega \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ als das Differential von F an der Stelle $|\phi\rangle$ bezeichnet.

Da $\delta F(|\phi\rangle)$ nun ein Element aus \mathcal{H}_1^* ist, dem Dualraum von \mathcal{H}_1 , kann man für $\delta F(|\phi\rangle)$ auch die folgende Dirac-Schreibweise einführen:

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta \phi} \mid := \delta F(|\phi\rangle) \right\rangle, \quad (34.1.6)$$

und damit schreibt sich die Ableitung von F an der Stelle $|\phi\rangle$ in Richtung $|\psi\rangle$ als

$$\delta F(|\phi\rangle) \mid \psi\rangle = \frac{d}{dt} F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) = \left\langle \frac{\delta F}{\delta \phi} \mid \psi\rangle \right\rangle, \quad (34.1.7)$$

oder wenn wir von \mathcal{H}_1 auf $L^2(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$, den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, übergehen

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta \phi} \mid \psi\rangle \right\rangle = \int dx \left\langle \frac{\delta F}{\delta \phi} \mid x\rangle \langle x \mid \psi\rangle = \int dx \frac{\delta F}{\delta \phi}(x) \psi(x). \quad (34.1.8)$$

Beispiel (1): sei $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^n$ und $|x\rangle := |x_1, \dots, x_n\rangle$, dann folgt

$$\begin{aligned} \delta F(|x_1, \dots, x_n\rangle) \mid y_1, \dots, y_n\rangle &= \frac{d}{dt} F(|x_1 + ty_1, \dots, x_n + ty_n\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(|\dots, x_i + ty_i, \dots\rangle)}{\partial (x_i + ty_i)} \Big|_{t=0} y_i \\ &= \left\langle \vec{\nabla} F(|x_1, \dots, x_n\rangle) \mid y_1, \dots, y_n\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\delta F(|x_1, \dots, x_n\rangle) = \vec{\nabla} F(|x_1, \dots, x_n\rangle). \quad (34.1.9)$$

□

Also ist im Falle des \mathbb{R}^n das Differential von F an der Stelle $|x\rangle$ gerade der Gradient von F nach $|x\rangle$.

Beispiel (2):

$$F_y(|\phi\rangle) := \langle y \mid \phi\rangle = \phi(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta F_y(|\phi\rangle) \mid \psi\rangle &= \left\langle \frac{\delta F_y}{\delta \phi} \mid \psi\rangle \right\rangle = \int dx \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x) \psi(x) = \frac{d}{dt} F_y(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\phi(y) + t\psi(y)) \Big|_{t=0} = \psi(y) = \int dx \delta(x - y) \psi(x) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \phi(y)}{\delta \phi}(x) = \delta(x - y). \quad (34.1.10)$$

□

Beispiel (3):

$$F_y(|\phi\rangle) := g(\phi(y)) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta F_y(|\phi\rangle) |\psi\rangle &= \left\langle \frac{\delta F_y}{\delta \phi} \mid \psi \right\rangle = \int dx \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x) \psi(x) = \left. \frac{d}{dt} F_y(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} g(\phi(y) + t\psi(y)) \right|_{t=0} = g'(\phi(y)) \psi(y) \end{aligned}$$

$$= \int dx \delta(x - y) g'(\phi(y)) \psi(y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta g(\phi(y))}{\delta \phi}(x) = g'(\phi(x)) \delta(x - y) . \quad (34.1.11)$$

□

Beispiel (4):

$$F_y(|\phi\rangle) := \langle y \mid \phi' \rangle = \phi'(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int dx \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x) \psi(x) &= \left. \frac{d}{dt} F_y(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\phi'(y) + t\psi'(y)) \right|_{t=0} = \psi'(y) = \int dx \delta(x - y) \psi'(x) \end{aligned}$$

$$= - \int dx \delta'(x - y) \psi(x) ,$$

$$(\text{sofern } \delta(x - y) \psi(x) = 0 \text{ f\"ur } x \in \text{Rand}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta \phi'(y)}{\delta \phi}(x) = -\delta'(x - y) . \quad (34.1.12)$$

□

Beispiel (5):

$$F_y(|\phi\rangle) := \langle y \mid \phi'' \rangle = \phi''(y) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int dx \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x) \psi(x) &= \left. \frac{d}{dt} F_y(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\phi''(y) + t\psi''(y)) \right|_{t=0} = \psi''(y) = \int dx \delta(x - y) \psi''(x) \end{aligned}$$

$$= \int dx \delta''(x - y) \psi(x) ,$$

$$(\text{sofern } \delta(x - y) \psi'(x) = \delta'(x - y) \psi(x) = 0$$

$$\text{für } x \in \text{Rand}) \Rightarrow$$

$$\frac{\delta \phi''(y)}{\delta \phi}(x) = \delta''(x - y) . \quad (34.1.13)$$

□

Beispiel (6):

$$F(|\phi\rangle) := \int dx \phi^n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\int dx \frac{\delta F}{\delta \phi}(x) \psi(x) = \left. \frac{d}{dt} F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int dx (\phi(x) + t\psi(x))^n \right|_{t=0}$$

$$= \int dx n (\phi(x) + t\psi(x))^{n-1} \Big|_{t=0} \psi(x)$$

$$= \int dx n \phi^{n-1}(x) \psi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx \phi^n(x) = n \phi^{n-1}(x) . \quad (34.1.14)$$

□

Beispiel (7):

$$F(|\phi\rangle) := \int dx \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^n = \int dx (\phi'(x))^n \quad \Rightarrow$$

$$\int dx \frac{\delta F}{\delta \phi}(x) \psi(x) = \left. \frac{d}{dt} F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int dx ((\phi(x) + t\psi(x))')^n \right|_{t=0}$$

$$= \int dx n ((\phi'(x) + t\psi'(x)))^{n-1} \frac{d}{dx} \psi(x) \Big|_{t=0}$$

$$= \int dx n (\phi'(x))^{n-1} \frac{d}{dx} \psi(x) = - \int dx n \frac{d}{dx} (\phi'(x))^{n-1} \psi(x) ,$$

$$(\text{sofern } (\phi'(x))^{n-1} \psi(x) \text{ für } x \in \text{Rand verschwindet}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx (\phi'(x))^n = -n \frac{d}{dx} (\phi'(x))^{n-1} . \quad (34.1.15)$$

□

Beispiel (8):

$$\begin{aligned}
 F(|\phi\rangle) &:= \int dx g(\phi(x)) \quad \Rightarrow \\
 \int dx \frac{\delta F}{\delta \phi}(x) \psi(x) &= \frac{d}{dt} F(|\phi\rangle + t|\psi\rangle) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int dx g(\phi(x) + t\psi(x)) \Big|_{t=0} \\
 &= \int dx g'(\phi(x) + t\psi(x)) \psi(x) \Big|_{t=0} \\
 &= \int dx g'(\phi(x)) \psi(x) \quad \Rightarrow \\
 \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx g(\phi(x)) &= g'(\phi(x)) . \tag{34.1.16}
 \end{aligned}$$

□

Beispiel (9): Wirkungsfunktional:

$$\mathcal{S}(r) := \int dt \mathcal{L}(r(t), \dot{r}(t)) := \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 - V(r(t)) \right] \quad \Rightarrow$$

mit 34.1.15 und 34.1.16 folgt:

$$\frac{\delta \mathcal{S}(r)}{\delta r}(t) = -m \frac{d}{dt} \left(\frac{dr(t)}{dt} \right) - \frac{dV(r(t))}{dr} = -m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \frac{dV(r(t))}{dr} . \tag{34.1.17}$$

Eine Nullstelle der Funktionalableitung des Wirkungsfunktionals $\mathcal{S}(r)$, also $\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta r}(t) = 0$, führt also gerade auf die Bewegungsgleichung $m \dot{r}^2(t) = -dV/dr$. Für die zweite Funktionalableitung von \mathcal{S} ergibt sich mit 34.1.13 und 34.1.11:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 \mathcal{S}(r)}{\delta r(t_1) \delta r(t_2)} &= \frac{\delta}{\delta r(t_1)} \left[-m \frac{d^2 r(t_2)}{dt_2^2} - \frac{dV(r(t_2))}{dr} \right] \\
 &= -m \delta''(t_1 - t_2) - \frac{d^2 V(r(t_2))}{dr^2} \delta(t_1 - t_2) \\
 &= \left(-m \frac{d^2}{dt_1^2} - \frac{d^2 V(r(t_1))}{dr^2} \right) \delta(t_1 - t_2) \tag{34.1.18}
 \end{aligned}$$

$$:= \mathcal{S}_{loc}^{(2)}(r(t_1)) \delta(t_1 - t_2) . \tag{34.1.19}$$

Damit ergibt sich für die quadratischen Fluktuationen der Wirkung (wiederum unter der Voraussetzung, daß $r(t) = 0$ auf dem Rand):

$$\int dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 \mathcal{S}(r)}{\delta r(t_1) \delta r(t_2)} r(t_1) r(t_2) = \int dt_1 dt_2 r(t_2) \mathcal{S}_{loc}^{(2)}(r(t_1)) \delta(t_1 - t_2) r(t_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \int dt r(t) \mathcal{S}_{loc}^{(2)}(r(t)) r(t) \\
&= \int dt \left[-m r(t) \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - \frac{d^2 V(r(t))}{dr^2} r(t)^2 \right] \\
&= \int dt \left[m \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 - \frac{d^2 V(r(t))}{dr^2} r(t)^2 \right]. \quad (34.1.20) \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel (10): Integralkern:

$$\begin{aligned}
F_y(|\phi\rangle) &:= \int dx K(y, x) \phi(x) \quad \Rightarrow \\
\int dx \frac{\delta F_y}{\delta \phi}(x) \psi(x) &= \frac{d}{dt} F_y(|\phi\rangle + t |\psi\rangle) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \int dx K(y, x) (\phi(x) + t \psi(x)) \Big|_{t=0} \\
&= \int dx K(y, x) \psi(x) \quad \Rightarrow \\
\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \int dx K(y, x) \phi(x) &= K(y, x). \quad (34.1.21) \quad \square
\end{aligned}$$

Für Funktionalableitungen gilt auch eine Produktregel. Seien F und G Abbildungen mit $F : \Omega_1 \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \Omega_2 \subseteq \mathcal{H}_2$ und $G : \Omega_2 \subseteq \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ und seien $|\phi\rangle, |\psi_1\rangle \in \Omega_1$ und $F|\phi\rangle, |\psi_2\rangle \in \Omega_2$. Sei weiter $G \circ F : \Omega_1 \subseteq \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_3$ die Produktabbildung von F und G , dann gilt:

$$\frac{\delta(G \circ F)}{\delta \phi} |\psi_1\rangle = \frac{\delta G}{\delta(F|\phi\rangle)} \frac{\delta F}{\delta \phi} |\psi_1\rangle \quad \text{oder} \quad \frac{\delta(G \circ F)}{\delta \phi} = \frac{\delta G}{\delta(F(\phi))} \frac{\delta F}{\delta \phi}. \quad (34.1.22)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(G \circ F)}{\delta \phi} |\psi_1\rangle &= \frac{d}{dt} G(F(|\phi\rangle + t |\psi_1\rangle)) \Big|_{t=0} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} G(F(|\phi\rangle + t |\psi_1\rangle)) \Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Weil G und F stetig sind folgt

$$\frac{\delta(G \circ F)}{\delta \phi} |\psi_1\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} G(F(|\phi\rangle) + t \frac{\delta F}{\delta \phi} |\psi_1\rangle) \Big|_{t=0}$$

und mit

$$|\psi_2\rangle := \frac{\delta F}{\delta\phi} |\psi_1\rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{\delta(G \circ F)}{\delta\phi} |\psi_1\rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} G(F(|\phi\rangle) + t |\psi_2\rangle) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\delta(G)}{\delta F(|\phi\rangle)} |\psi_2\rangle = \frac{\delta(G)}{\delta F(|\phi\rangle)} \frac{\delta F}{\delta\phi} |\psi_1\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

34.2 Funktional-Differentialgleichungen

Seien F , $\frac{\delta F}{\delta\phi}$ und f Abbildungen von $\Omega_1 \subseteq L^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktionalableitung schreibt sich dann:

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}(\psi) = \delta F(|\phi\rangle) |\psi\rangle = \left\langle \frac{\delta F}{\delta\phi} \mid \psi \right\rangle.$$

Eine Möglichkeit, eine Funktional-Differentialgleichung 1. Ordnung zu definieren, ist die folgende:

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta\phi} \mid \psi \right\rangle = \langle f \mid \psi \rangle. \quad (34.2.1)$$

Wenn wir jetzt als Urbildraum den Raum \mathbb{R}^n anstelle von L^2 nehmen, wird unsere Funktional-Differentialgleichung zu einem n -dimensionalen System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\phi, \psi \in \mathbb{R}^n, \quad F, \frac{\delta F}{\delta\phi}, f_1, \dots, f_n : \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mit $\{e_i\}_{i \in \langle 1, n \rangle}$ bezeichnen wir eine Basis in \mathbb{R}^n , mit $\{e^j\}_{j \in \langle 1, n \rangle}$ eine Basis im Dualraum, der ja ebenfalls \mathbb{R}^n ist. Seien also:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi^i e_i, \quad f = \sum_{j=1}^n f_j e^j, \quad \frac{\delta F}{\delta\phi} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta F}{\delta\phi} \right)_j e^j \Rightarrow$$

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}(e_i) = \left\langle \frac{\delta F}{\delta\phi} \mid e_i \right\rangle = \frac{d}{dt} F(\phi^1, \dots, \phi^i + t, \dots, \phi^n) = \frac{\partial F(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial \phi^i}.$$

Damit wird aus der Funktional-Differentialgleichung 34.2.1

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta\phi} \mid e_i \right\rangle = \langle f \mid e_i \rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial \phi^i} = f_i(\phi^1, \dots, \phi^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (34.2.2)$$

ein n -dimensionales System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Ganz entsprechend können wir eine Funktional-Differentialgleichung 34.2.1 mit Funktionalen von $L^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als ein ∞ -dimensionales System gekoppelter partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ansehen.

Beispiel: Sei $f_i(\phi^1, \dots, \phi^n) = \mu F(\phi^1, \dots, \phi^n)$, dann folgt:

$$\frac{\partial F(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial \phi^i} = \mu F(\phi^1, \dots, \phi^n) . \quad (34.2.3)$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz der Trennung der Variablen. Dadurch faktorisieren wir das Funktional F :

$$F(\phi^1, \dots, \phi^n) = F_1(\phi^1) \cdots F_n(\phi^n) ,$$

und wir erhalten das entkoppelte System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F_i(\phi^i)}{\partial \phi^i} = \mu F_i(\phi^i)$$

mit der Lösung

$$F_i(\phi^i) = e^{\mu \phi^i} \quad \Rightarrow$$

$$F(\phi^1, \dots, \phi^n) = \prod_{i=1}^n F_i(\phi^i) = \prod_{i=1}^n e^{\mu \phi^i} = e^{\mu \sum_{i=1}^n \phi^i} , \quad (34.2.4)$$

bzw. in L^2 anstelle von \mathbb{R}^n :

$$F(\phi) = e^{\mu \int dx \phi(x)} . \quad (34.2.5)$$

□

A PGF/TikZ-Braids

Das Zeichnen von Zöpfen (engl. braids) geschah in dieser Arbeit mit den Paketen

```
\usepackage{tikz}
\usepackage{braids},
```

aus T_EXlive 2017. In dieser T_EXlive-Version befindet sich das Braids-Paket von Andrew Stacey in der Version 1.0 mit einer äußerst knappen Dokumentation und noch einigen Fehlern. In der Version 2.0 des Braids-Pakets scheinen einige Dinge etwas leichter zu gehen, aber leider stand diese Version zu Beginn des Jahres 2022 auf dem OpenSUSE-System des Autors noch nicht zur Verfügung. So braucht ein Anwender also etwas Mühe und einige Intuition, um die gewünschten Zöpfe zu zeichnen. Daher soll hier der Code für die 3 Zopfbilder dieser Arbeit dokumentiert werden :-)

Die Version 2.0 des Braids-Pakets aus T_EX Live 2021 enthält einen Kompatibilitätsmodus für die Version 1.0, dieser ändert aber manchmal die Skalierung von 'height', so daß dann doch noch Handarbeit erforderlich ist. Diese Skalenanpassung ist im Folgenden bereits berücksichtigt.

1. Zöpfe a b ab ba :

```
\begin{tikzpicture}
\node[font=\large] at (0.0,-1.3) {\(a=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (1.0,0.0)
1 s_2;
\node[font=\large] at (3.0,-1.3) {\(b=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=20pt, line width=1pt] at (4.0,0.0)
s_1 s_2^{-1};
\node[font=\large] at (6.0,-1.3) {\(ab=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=20pt, line width=1pt] at (7.0,0.0)
s_2 s_1 s_2^{-1};
\node[font=\large] at (9.0,-1.3) {\(ba=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=15pt, line width=1pt] at (10.0,0.0)
s_1 s_2^{-1} 1 s_2;
\end{tikzpicture}
```

2. Zöpfe b b^{-1} $bb^{-1} = e$:

```
\begin{tikzpicture}
\node[font=\large] at (0.0,-1.3) {\(b=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (1.0,0.0)
s_1 s_2^{-1};
\node[font=\large] at (3.0,-1.3) {\(b^{-1}=\)};
\braid[number of strands=3, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (4.0,0.0)
s_2 s_1^{-1};
\node[font=\large] at (6.5,-1.3) {\(bb^{-1}=\)};
\end{tikzpicture}
```

```

\braided[number of strands=3, width=10pt, height=15pt, line width=1pt] at (7.5,0.0)
s_1 s_2^{-1} s_2 s_1^{-1};
\node[font=\large] at (8.8,-1.3) {\(\simeq\)};
\braided[number of strands=5, width=10pt, height=15pt, style strands={1}{line
width=1pt}, style strands={2}{line width=1pt}, style strands={3}{line width=1pt},
style strands={4}{white}, style strands={5}{white}] at (9.5,0.0)
1 1 1 s_4;
\node[font=\large] at (11.0,-1.5) {\(=e\)};
\end{tikzpicture}

```

3. Zopf-Relationen:

```

\begin{tikzpicture}
\braided[number of strands=2, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (0.0,0.0)s_1
s_1^{-1};
\node[font=\large] at (1.0,-1.3) {\(\simeq\)};
\braided[number of strands=4, width=10pt, height=20pt, line width=1pt, style
strands={1}{line width=1pt},
style strands={2}{line width=1pt}, style strands={3}{white}, style strands={4}{white}]
at (1.5,0.0) 1 1 s_3;
\braided[number of strands=4, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (4.0,0.0)
s_1 s_3;
\node[font=\large] at (5.8,-1.3) {\(\simeq\)};
\braided[number of strands=4, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (6.5,0.0)
s_3 s_1;
\braided[number of strands=3, width=10pt, height=20pt, line width=1pt] at (10.0,0.0)
s_1 s_2 s_1;
\node[font=\large] at (11.3,-1.3) {\(\simeq\)};
\braided[number of strands=3, width=10pt, height=20pt, line width=1pt] at (12.0,0.0)
s_2 s_1 s_2;
\end{tikzpicture}

```

4. Zöpfe $a = \sigma_1 \sigma_2$ und a^3 :

```

\begin{tikzpicture}
\node[font=\large] at (0.0,-1.4) {\(a=\)};
\braided[number of strands=3, width=10pt, height=30pt, line width=1pt] at (1.0,0.0)
s_1 s_2;
\node[font=\large] at (3.0,-1.3) {\(a^3=\)};
\braided[number of strands=3, width=10pt, height=10pt, line width=1pt] at (4.0,0.0)
s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2;
\end{tikzpicture}

```

B LyX- und L^AT_EX-Formatierungen

Der Latex-Begleiter von Goosens u. a. (2000) ist immer eine unschätzbare Hilfe. Vielen Dank!

B.1 LyX Document settings

```
Document class:
  book (KOMA-Script)
  version=last,fontsize=12pt,BCOR15mm,headinclude,
  footinclude=false,headings=normal,titlepage=false,
  captions=nooneline,numbers=noendperiod,
Fonts:
  Base Size: 12,
Text Layout:
  Vertical space: MedSkip,
Page Layout:
  Format: A4,
  Orientation: Portrait,
  Page style: headings,
  Two-sided document,
Language:
  German (old spelling),
  Quote style: „outer" and ‚inner‘,
  Encoding: other: Western European (ISO 8859-1),
Numbering & TOC:
  Part/Chapter/Section/Subsection/Subsubsection: Yes, Yes,
Bibliography: Natbib, Natbib style: Author-year,
  Default style: plainnat, Processor: bibtex8,
  Subdivided bibliography,
PDF properties:
  usual hyperref support,
  Title:
    Festkörperphysik und Topologie - eine Einführung
  Author: Bernhard Schiekel
  Subject: Eine Einführung in topologische Fragen des Festkörperphysik:
    2-D-Quanten-Hall, etc.%
  Keywords: Morse Theorie, Van Hove Singularitäten,
    geometrische Phasen in QM, 2D-Quanten-Hall
Additional Options:
  colorlinks=false
```

```

    backref=page,pdftex,plainpages=false,pdfpagelabels,bookmarks,
    pdfpagemode=None,pdfstartview=FitH, allbordercolors={0 0 0}
Hyperlinks: Backreferences: page
Bookmarks: Generate bookmarks (toc)
Float Placement:
    Bottom of page/Here if possible/Ignore LATEX rules.

```

B.2 *L^AT_EX* preamble

```

\pdfoutput=1
\usepackage{eurosym}
\usepackage{array}
% ae-Fonts obsolete, stattdessen lmodern
\usepackage{lmodern}
% cbfonts muss installiert sein
% greek-fontenc muss installiert sein
% babel-greek muss installiert sein
% wrapfig muss installiert sein
% bibtopic muss installiert sein
%
% KOMA-script book - TOC-Anpassungen
% tocloft nicht kompatibel mit KOMA-script! \RedeclareSectionCommand[tocnumwidth=3.2em]
%
\usepackage{mathtools} %fuer prescript
\usepackage{amssymb} %zusaetzl. Formelumgebungen
\usepackage{amsmath,nccmath} %zusaetzl. math. Symb. / fleqn
\usepackage{mathrsfs} %zusaetzl. math. Symb.
\usepackage{bbm} %math. Einheitsoperator
\usepackage{slashed} %slash notation for Dirac-Operators
\usepackage{exscale} %groessere mathematische Zeichen
\usepackage{relsize} %groessere mathematische Zeichen
%
% eigene TEX defeqq-, eqqdef-, eqdef-, und eqexcl-Kommandos
\newcommand*\defeqq{%
\mathrel{\vcenter{\offinterlineskip %
\hbox{.}\vskip-.80ex\hbox{.}}}\joinrel \hskip 3pt =}
%
\newcommand*\eqqdef{%
=\hskip 3pt \joinrel\mathrel{\vcenter{\offinterlineskip %
\hbox{.}\vskip-.80ex\hbox{.}}}}
%
\newcommand\{eqdef}\{ensuremath{\stackrel{\mathrm{def}}{=}}\}
\newcommand\{eqexcl}\{ensuremath{\stackrel{\mathrm{!}}{=}}\}
%
% eigene Operatornamen
\newcommand\{diag}\{operatorname{diag}\}

```



```

\newcommand{\id}{\operatorname{id}}
\newcommand{\ind}{\operatorname{ind}}
\newcommand{\sgn}{\operatorname{sgn}}
\newcommand{\card}{\operatorname{card}}
\newcommand{\supp}{\operatorname{supp}}
\newcommand{\vol}{\operatorname{vol}}
\newcommand{\im}{\operatorname{im}}
\newcommand{\tr}{\operatorname{tr}}
\newcommand{\coker}{\operatorname{coker}}
\newcommand{\vspan}{\operatorname{vspan}}
%
% Variable fuer eigene Einrueckungen mit \settowidth
\newlength{\meineEinrueck}
%
% Hier ntheorem u. a. wegen des Schlusspunktes (DIN)
\usepackage[amsmath,thmmarks,standard,hyperref]{ntheorem}
\theoremseparator{}
\theoremsymbol{}
\renewcommand{\qedsymbol}{\ensuremath{\mathbf{\Box}}}
\theoremstyle{plain}
\renewtheorem{Satz}{Satz}[section]
\renewtheorem{Lemma}{Satz}{Lemma}
\renewtheorem{Definition}[Satz]{Definition}
\renewtheorem{Korollar}[Satz]{Korollar}
\renewtheorem{Anmerkung}[Satz]{Anmerkung}
\theoremstyle{nonumberplain}
\theorembodyfont{\normalfont}
\theoremsymbol{\ensuremath{\Box}}
\theoremseparator{:}
\renewtheorem{Beweis}[Satz]{Beweis}
\renewtheorem{Beispiel}[Satz]{Beispiel}
%
\usepackage[format=plain%,
,justification=centering%,
,indentation=0cm]{caption}%
%
\usepackage[]{}{subfig}
%
% Formel-Satz (mit AMSmath)
% \mathindent7mm      %eigenstaendige Formel bei fleqn einruecken
\parindent0em        %keine Paragraphen Einrueckung
\setlength{\jot}{4mm} %Abstand in mehrzeiligen Formeln
\numberwithin{equation}{section} %Formelnummerierung in Sections
\allowdisplaybreaks %Seitenumbruch in Formeln erlauben
\renewcommand{\arraystretch}{1} %Array-Zeilenabstand vergrössern
%
% Header fuer 2-teilige Druckausgabe

```

```

\usepackage {titling}
%
% Satzspiegelberechnung book (koma-script)
% siehe: scrguide.pdf,
% in Optionen der Dokumentenklasse
%
% Kopf- und Fusszeilen mit sclayer-scrpage
% scrpage2 ist seit 2020 obsolet
% \usepackage[] {scrpage2}
\usepackage [] {sclayer-scrpage}
\pagestyle {scrheadings}
\clearscrheadfoot
\let\ps@plain=\ps@empty % Kapitelseite ohne Seitenzahl
\ihead {}
\chead {\headmark}
\ohead {\pagemark}
\ifoot {}
\cfoot {}
\ofoot {}
%
% Kommutative Diagramme mit xymatrix aus Xy-pic
\usepackage [all] {xy}
%
% TikZ-Braids
\usepackage {tikz}
\usepackage {braids}
%
%\usepackage [pdftex] {graphicx}
\usepackage {graphicx}
%
% Mehrfache toc für Druckausgabe
% separate toc für appendix
\usepackage {appendix}
% tocstyle ist seit 2020 obsolet
% \usepackage {tocstyle}
\usepackage {tocbasic}
\usepackage {minitoc}
%\usepackage {titletoc}
%
\usepackage {bookmark}
%
% \usepackage [backref=page%Rueckverweise in Bibl.
% ,pdftex
% ,plainpages=false% Seitenanker=format. SeitenNr.
% ,pdfpagelabels% AcroRead4.0 zeigt log. SeiteNr.
% ,%colorlinks% Links und Anker nicht faerben
% ,bookmarks% erstellt Lesezeichen

```

```

% ,pdfpagemode=None
% ,pdfstartview=FitH
% ,allbordercolors={0 0 0}
% ]{hyperref}
%
% \hypersetup{pdftitle={Festkörperphysik und Topologie - eine Einführung}%
% ,pdfsubject={Eine Einführung in topologische Fragen des Festkörperphysik:
% 2-D-Quanten-Hall, etc.%
% ,pdfkeywords={Morse Theorie, Van Hove Singularitäten%
% ,geometrische Phasen in QM, 2D-Quanten-Hall}%
% ,pdfauthor={Bernhard Schiekel}%
% }
%
% Format der Rueckverweise im Literaturverzeichnis
\renewcommand*{\backref}[1]{- zitiert auf S. #1.}
%
```

B.3 Einstellungen am Dokumentbeginn und Ende

Dokumentbeginn:

```

% neue Satzspiegelberechnung, siehe scrguide.pdf,
% Optionen in Dokumentenklasse-Def.
\typearea[current]{15}
%
% Title
% 1. Hyperref-Spezialität:
% \renewcommand{\thepage}{Title} ist nötig, damit beim Indizieren mit
% hyperref bei der Titelseite und der Folgeseite nicht zweimal die
% gleiche Seitennummer in \page auftritt.
% 2. In der Präambel wird der Seitenstil plain auf empty undefiniert,
% um auf Leerseiten keine headings zu haben
% 3. Bei den Optionen für scnbook wird notitlepage gewählt und die
% Titelei von Hand gestaltet.
%-----
\begingroup
\renewcommand{\thepage}{Title}
\setcounter{page}{1}
\title{\vspace{2cm}Festkörperphysik und Topologie - eine Einführung\\[4ex]
\\ \ }
\author{\\ \textbf{Bernhard Schiekel}}
\date{ }
\maketitle
\endgroup
%-----
%-----
```

```
\begingroup
  \hypersetup{hidelinks}
  \tableofcontents
\endgroup
```

Dokumentende:

Bibliography -> Processor: bibtex8

BibiT_EX style: natdin

In Bibtex-Eintraegen mit Sonderzeichen in URLs, wie z.B. %, {, }, ~, #, müssen diese mit \ maskiert werden, sonst gibt es Konflikte mit Bibtex und/oder mit der Option 'backref' des Packets 'hyperref',
(Fehlermeldung: „Paragraph ended before \BR@@lbibitem was complete“).

Literaturverzeichnis

[Mat 2023]

NOACK, Kai (Hrsg.): *Mathe-Zitate*. <https://www.matheretter.de/mathe-zitate>.
Version: 2023 - zitiert auf S. 16.

[Abramowitz u. Stegun 1970]

ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions*.
Dover Publications, New York, USA, 1970 - zitiert auf S. 136.

[Alvarez-Gaumé u. Ginsparg 1985]

ALVAREZ-GAUMÉ, Luis ; GINSPARG, Paul: The structure of gauge and gravitational anomalies. In: *Annals of Physics*, 161, S. 423-490 (1985) - zitiert auf S. 740.

[Arminjon u. Reifler 2010]

ARMINJON, Mayeul ; REIFLER, Frank: Basic quantum mechanics for three Dirac equations in a curved spacetime. In: *Braz. J. Phys.* 40 (2010), Nr. 2. <https://www.scielo.br/j/bjp/a/HsjktYSpQJ5hVkcqBNynDVZv/?lang=en> - zitiert auf S. 678, 684.

[Arminjon u. Reifler 2013]

ARMINJON, Mayeul ; REIFLER, Frank: Equivalent forms of Dirac equations in curved space-times and generalized de Broglie relations. In: *Brazilian Journal of Physics* 43 (2013), 64–77. <https://arxiv.org/pdf/1103.3201> - zitiert auf S. 678, 684.

[Artin 1925]

ARTIN, Emil: Theorie der Zöpfe. (1925), 47–72. <https://fr.art1lib.org/book/12698088/9e0ef6> - zitiert auf S. 169, 171, 173, 175.

[Artin 1947]

ARTIN, Emil: Theory of braids. In: *Annals of Mathematics* 48 (1947), Nr. 1, 101–126. <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/artinbraids.pdf> - zitiert auf S. 172.

[Atiyah u. a. 1964]

ATIYAH, M.F. ; BOTT, R. ; SHAPIRO, A.: Clifford Modules. In: *Topology* Vol. 3, Sup. 1 (1964), 3–38. <https://pdfs.semanticscholar.org/ebc4/604dc6b4146550cef71f7f9ea4193338febf.pdf> - zitiert auf S. 614, 630.

[Atiyah 1988]

ATIYAH, Michael: *Collected Works, Vol. I-V*. Oxford University Press, Oxford, GB, 1988 - zitiert auf S. 791, 794.

[Atiyah 2005]

ATIYAH, Michael: *Collected Works, Vol. VI*. Oxford University Press, Oxford, GB, 2005 - zitiert auf S. 791.

[Atiyah u. a. 2010]

ATIYAH, Michael ; DIJKGRAAF, Robbert ; HITCHIN, Nigel: Geometry and physics. In: *Phil. Trans. R. Soc. A* 368 (2010), 913–926. <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/368/1914/913.full.html> - zitiert auf S. 791.

[Atiyah u. Zagier 2014]

ATIYAH, Michael ; ZAGIER, Don: Friedrich Hirzebruch (1927-2012). In: *Notices of the American Mathematical Society*, 61, 706-727 (2014) (2014). <http://www.ams.org/notices/201407/rnoti-p706.pdf> - zitiert auf S. 790.

[Audin 2008]

AUDIN, Michèle: Homage to Henri Cartan (1904-2008). In: *Notices of the AMS*, 56, 614-615 (2008). <http://www.ams.org/notices/200905/rtx090500614p.pdf> - zitiert auf S. 323.

[Baader 2008]

BAADER, Sebastian: Differentialtopologie - Vorlesungs-Script. (2008). <https://www.mitschriften.ethz.ch/main.php?page=3&scrid=1&pid=51&oid=73&eid=1> - zitiert auf S. 513.

[Bär 2010]

BÄR, Christian: *Elementare Differential-Geometrie*. de Gruyter, Berlin, 2010 - zitiert auf S. 372, 417.

[Bär 2011]

BÄR, Christian: Charakteristische Klassen, Crashkurs, MPI für Gravitationsphysik, Oktober 2006. (2011). <http://geometrie.math.uni-potsdam.de/documents/baer/skripte/charakteristisch.pdf> - zitiert auf S. 740, 755, 770.

[Bargmann 1932]

BARGMANN, V.: Phys.-math. Kl. In: *Sitzungsber. d. Preuß. Akad.* (1932), S. 346 - zitiert auf S. 678, 684.

[Barut u. Raczka 1986]

BARUT, Asim O. ; RACZKA, Ryszard: *Theory of Group Representations and Applications*. 2. revised edition. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Singapur, 1986. – mit einer 35 Seiten umfassenden Bibliographie. - zitiert auf S. 537, 587.

[Bassani u. Pattavicini 1975]

BASSANI, F. ; PATTAVICINI, G. P.: *Electronic States and Optical Transitions in Solids*. Pergamon Press, Ltd., 1975 - zitiert auf S. 38.

[Berline u. a. 2004]

BERLINE, Nicole ; GETZLER, Ezra ; VERGNE, Michèle: *Heat Kernels and Dirac Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 2004 - zitiert auf S. 795.

[Berry 1984]

BERRY, M. V.: Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* (1984), Nr. 392, 45–57. <https://www.academia.edu/download/34752305/berr83.pdf> - zitiert auf S. 53, 73.

- [Birman u. Brendle 2005]
Kapitel 2. In: BIRMAN, Joan ; BRENDLE, Tara E.: *Braids: A Survey*. Elsevier Science, 19–103 - zitiert auf S. 175.
- [Blaschke u. Reichardt 1960]
BLASCHKE, Wilhelm ; REICHARDT, Hans: *Einführung in die Differentialgeometrie*. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 1960 - zitiert auf S. 369.
- [Bleecker 1981]
BLEECKER, David: *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., USA, 1981 - zitiert auf S. 704.
- [Bohm 2018]
BOHM, David ; DÜRR, Hans-Peter (Hrsg.): *Fragmentierung und Ganzheit*. 3. Driediger Verlag. – 231–266 S. <http://www.driediger.de/physik-und-transzendenz> - zitiert auf S. 65.
- [Booß 1977]
BOOSS, Bernhelm: *Topologie und Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1977 - zitiert auf S. 790.
- [Booss u. Bleecker 1985]
BOOSS, Bernhelm ; BLEECKER, David: *Topology and analysis: the Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physic*. Springer, New York, USA, 1985 - zitiert auf S. 790.
- [Booss u. Bleecker 2013]
BOOSS, Bernhelm ; BLEECKER, David: *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics*. International Press of Boston inc, Boston, NJ, USA, 2013 - zitiert auf S. 790.
- [Born u. Fock 1928]
BORN, M. ; FOCK, V.: Beweis des Adiabatenansatzes. In: *Zeitschrift für Physik A* 51 (1928), Nr. 3-4, S. 165–180 - zitiert auf S. 75.
- [Bott u. Tu 1982]
BOTT, Raoul ; TU, Loring W.: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer Verlag, New York, USA, 1982 - zitiert auf S. 513, 740, 753, 762.
- [Bröcker u. tom Dieck 1985]
BRÖCKER, Theodore ; DIECK, Tammo tom: *Representations of Compact Lie Groups*. Springer Verlag, New York, USA, 1985 - zitiert auf S. 537, 548.
- [Bronstein u. Semendjajew 1971]
BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1971 - zitiert auf S. 47, 157.
- [Bross 2013]
BROSS, Helmut: From Graphite to Graphene: The Confinement of the Fermi Surface to the Line KH. In: *ISRN Condensed Matter Physics* (2013), Article ID 327913. <https://downloads.hindawi.com/archive/2013/327913.pdf> - zitiert auf S. 153.

- [Brown 2012]
BROWN, Kevin: *Essays on Geometry*. print on demand by the author <http://mathpages.com/home/kmath343/kmath343.htm> - zitiert auf S. 242.
- [do Carmo 1976]
CARMO, Manfredo P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1976 - zitiert auf S. 373.
- [Cartan 1938]
CARTAN, Élie ; MERCIER, André (Hrsg.): *Leçons sur la théorie des spineurs*. Hermann & Cie, Paris, 1938 - zitiert auf S. 323.
- [Cartan 1966]
CARTAN, Élie ; MERCIER, André (Hrsg.): *Theory of Spinors*. Hermann, Paris & Cie (1966), Dover Pub. Inc., New York (1981), 1966 - zitiert auf S. 323.
- [Chandía u. Zanelli 1997]
CHANDÍA, Osvaldo ; ZANELLI, Jorge: Topological Invariants, Instantons and Chiral Anomaly on Spaces with Torsion. In: *Phys. Rev. D* 55 (1997), 7580. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9702025> - zitiert auf S. 780.
- [Chern 1944]
CHERN, Shiing-Shen: A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. In: *Annals of Math*, 45, 747-752 (1944) - zitiert auf S. 738.
- [Chern u. Chevalley 1952]
CHERN, Shiing-Shen ; CHEVALLEY, Claude: Élie Cartan and his mathematical work. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 58, p. 217-250. (1952). <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183516693> - zitiert auf S. 323, 738.
- [Chhim 2017]
CHHIM, Rithivong: *Morse Theory and Applikations*, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Guanajuato, Gto, México, Magisterarb., 2017 - zitiert auf S. 486.
- [Choquet-Bruhat u. DeWitt-Morette 1989]
CHOQUET-BRUHAT, Yvonne ; DEWITT-MORETTE, Cécile: *Analysis, Manifolds and Physics, Part II: 92 Applications*. North-Holland (Elsevier Science Pub. Inc.), Amsterdam, Niederlande, 1989 - zitiert auf S. 614, 618.
- [Choquet-Bruhat u. a. 1978]
CHOQUET-BRUHAT, Yvonne ; DEWITT-MORETTE, Cécile ; DILLARD-BLEICK, Margaret: *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland (Elsevier Science Pub. Inc.), Amsterdam, Niederlande, 1978 - zitiert auf S. 310, 379, 386, 704, 705.
- [Coquereaux 2009]
COQUEREAUX, R.: Clifford algebras, spinors and fundamental interactions: Twenty Years After. In: *Advances in Applied Clifford Algebras* (2009), December, Nr. 19, 673. <https://arxiv.org/pdf/math-ph/0509040.pdf> - zitiert auf S. 636.
- [Deimling 1985]

- DEIMLING, Klaus: *Nonlinear Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1985 - zitiert auf S. 379.
- [Dieudonné 1979]
DIEUDONNÉ, Jean: The Tragedy of Grassmann. In: *Linear and Multilinear Algebra* (1979), Nr. 8, S. 1–14 - zitiert auf S. 608.
- [Dirac 1931]
DIRAC, Paul A. M.: Quantised Singularities in the Electromagnetic Field. In: *Proc. R. Soc. A 133* (1931), 60–72. http://www.ifsc.usp.br/~laf/quantica2/dirac_monopole_original_paper_1931.pdf - zitiert auf S. 53.
- [Dirac 1970]
DIRAC, Paul A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. 4. ed., rev., repr. Clarendon Press, Oxford, GB, 1970 - zitiert auf S. 652.
- [Dirac 1975]
DIRAC, Paul A. M.: *General theory of relativity*. New York : Wiley, 1975, 1975 - zitiert auf S. 653.
- [Dirac 2003]
DIRAC, Paul A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics (at Yeshiva University, 1964)*. Dover Publications Inc., 2003 - zitiert auf S. 652.
- [Eguchi u. a. 1980]
EGUCHI, Tohru ; GILKEY, Peter B. ; HANSON, Andrew J.: Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry. In: *Physics Reports 66* (1980), Nr. 6, 213–393. https://www.researchgate.net/profile/Andrew_Hanson8/publication/234195796_Gravitation_Gauge_Theories_And_Differential_Geometry/links/5aac2feb458515e3e3e5c6af/Gravitation-Gauge-Theories-And-Differential-Geometry.pdf - zitiert auf S. 740, 769.
- [Eilenberg u. Steenrod 1952]
EILENBERG, S. ; STEENROD, N.: *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, Princeton, NJ., USA, 1952 - zitiert auf S. 415.
- [Eppstein 2013]
EPPSTEIN, David: Twenty Proofs of Euler's Formula: $V-E+F=2$. In: *Theory Group, ICS, UC Irvine, Online* (2013). <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> - zitiert auf S. 271.
- [Eschenburg u. Jost 2007]
ESCHENBURG, Jost-Hinrich ; JOST, Jürgen: *Differentialgeometrie und Minimalflächen*. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 2007 - zitiert auf S. 247, 267, 269, 277, 288, 290, 291, 303, 341, 366, 369, 492, 711.
- [Eschrig 2011]
ESCHRIG, Helmut: *Topology and Geometry for Physics*. Springer Verlag, Heidelberg, 2011 - zitiert auf S. 137, 486.

- [Evans 1998]
EVANS, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1998 - zitiert auf S. 298, 698.
- [Farmelo 2009]
FARMELO, Graham: *The Strangest Man - The hidden life of Paul Dirac, Quantum Genius*. Faber and Faber Ltd., London, GB, 2009 - zitiert auf S. 636, 651, 653.
- [Fick 1972]
FICK, Eugen: *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*. 2. Aufl. Akad. Verlagsgesellschaft, 1972 - zitiert auf S. 90, 107.
- [Fischer u. Kaul 2001]
FISCHER, H. ; KAUL, H.: *Mathematik für Physiker, Band 1*. Teubner GmbH, Stuttgart, 2001 - zitiert auf S. 585.
- [Flanders 1989]
FLANDERS, Harley: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1989 - zitiert auf S. 16, 235.
- [Fock 1929]
FOCK, V. A.: Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons. In: *Z. Phys.* 57 (1929), S. 261–277 - zitiert auf S. 678.
- [Frankel 2004]
FRANKEL, Theodore: *The Geometry of Physics - an Introduction*. 2.Ed. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 2004 - zitiert auf S. 16, 17, 235, 267, 277, 302.
- [Freed 2021]
FREED, Daniel S.: Isadore Singer Transcended Mathematical Boundaries. In: *Quanta Magazine* (2021). <https://www.quantamagazine.org/isadore-singer-bridged-math-and-physics-20210304> - zitiert auf S. 793.
- [Freedman u. Van Proeyen 2012]
FREEDMAN, Daniel Z. ; VAN PROEYEN, Antoine: *Supergravity*. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 2012 - zitiert auf S. 17, 298, 317, 569, 639, 641, 650, 668, 780.
- [Friedrich 1997]
FRIEDRICH, Thomas: *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*. Vieweg Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1997 - zitiert auf S. 614, 641.
- [Fritzsche 2003]
FRITZSCHE, Klaus: *Clifford-Algebren und Spin-Mannigfaltigkeiten*. http://www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsche/lect_mgf.html#mgf03. Version: 2003 - zitiert auf S. 614, 625.
- [Fulton 1995]
FULTON, William: *Algebraic Topology - A First Course*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, (NY), USA, 1995 - zitiert auf S. 405.
- [Gallier 2014]
GALLIER, Jean: Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the

- Quaternions: The Pin and Spin Groups. (2014). <https://arxiv.org/pdf/0805.0311.pdf> - zitiert auf S. 614, 621.
- [Gauß 2013]
GAUSS, Carl F.: *Die Originalarbeiten von Gauß*. Digitalisierungszentrum der Universität Göttingen. <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/dms/load/toc/?PPN=PPN235957348>. Version: 2013 - zitiert auf S. 277.
- [Geim u. Novoselov 2007]
GEIM, A. K. ; NOVOSELOV, K. S.: The Rise of Graphene. In: *Nature Materials* 6 (2007), 183–191. <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0702595> - zitiert auf S. 144.
- [Gilkey 1995]
GILKEY, Peter B.: *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*. 2. Ed. CRC Press, Boca Raton, USA, 1995 - zitiert auf S. 523, 740, 761, 794.
- [González u. a. 1993]
GONZÁLEZ, J. ; GUINEA, F. ; VOZMEDIANO, M.A.H.: The Electronic Spectrum of Fullerenes from the Dirac Equation. In: *Nuclear Physics B* 406 (1993), Nr. 3, 771–794. <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9208004> - zitiert auf S. 145, 152.
- [Goosens u. a. 2000]
GOOSENS, Michael ; MITTELBACH, Frank ; SAMARIN, Alexander: *Der Latex-Begleiter*. Addison-Wesley, München, 2000 - zitiert auf S. 815.
- [Gourgoulhon 2007]
GOURGOULHON, Éric: *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*. arxiv.org - preprint <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035> - zitiert auf S. 352.
- [Greiner 1989]
GREINER, Walter: *Quantenmechanik Teil 1*. 4. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1989 (Theoretische Physik 4) - zitiert auf S. 135.
- [Guilini u. a. 2003]
GUILINI, Domenico ; KIEFER, Claus ; LÄMMERZahl, Claus: *Quantum Gravity - From Theory To Experimental Search*. Springer Verlag, Berlin, 2003 - zitiert auf S. 692.
- [Guillemin u. Pollack 1974]
GUILLEMIN, Victor ; POLLACK, Alan: *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, USA, 1974 - zitiert auf S. 379, 380, 382, 383, 389, 484, 509.
- [Hall 2003]
HALL, Brian C.: *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*. Springer Verlag Inc., New York, USA, 2003 - zitiert auf S. 537, 553, 579, 589.
- [Hassani 1999]
HASSANI, Sadri: *Mathematical Physics, A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer, New York, USA, 1999 - zitiert auf S. 537, 541.
- [Hatcher 2001]
HATCHER, Allen: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, GB

- <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html> - zitiert auf S. 437, 458, 469, 479.
- [Hausner u. Schwartz 1968]
HAUSNER, Melvin ; SCHWARTZ, Jacob T.: *Lie Groups; Lie Algebras*. Gordon and Breach, New York, USA, 1968 - zitiert auf S. 405.
- [Hawking u. Ellis 1973]
HAWKING, S. W. ; ELLIS, G. F. R.: Cambridge University Press, 1973 - zitiert auf S. 785.
- [Hehl u. a. 1976]
HEHL, Friedrich W. ; HEYDE, Paul von d. ; KERLICK, G. D.: General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. In: *Rev. Mod. Phys.*, 48, 393-416 (1976) - zitiert auf S. 317.
- [Hirzebruch 1978]
HIRZEBRUCH, Friedrich: *Topological Methods in Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1978 - zitiert auf S. 740, 755.
- [Hormozi u. a. 2007]
HORMOZI, L. ; ZIKOS, G. ; BONESTEEL, N. E. ; SIMON, S. H.: Topological Quantum Compiling. In: *Phys. Rev. B* (2007), Nr. 75, 165310. <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0610111> - zitiert auf S. 230.
- [Jost 1995]
JOST, Jürgen: *Riemannian Geometry and Geometrical Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1995 - zitiert auf S. 723.
- [Jost 2009]
JOST, Jürgen: *Geometry and Physics*. Springer Verlag, 2009 - zitiert auf S. 614, 636, 641, 645.
- [Kalka u. Soff 1997]
KALKA, Harald ; SOFF, Gerhard: *Supersymmetrie*. Teubner, Stuttgart, 1997 - zitiert auf S. 608.
- [Kassel u. Turaev 2008]
KASSEL, C. ; TURAEV, V.: *Braid Groups*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, USA, 2008 - zitiert auf S. 172, 177.
- [Kato 1950]
KATO, T.: On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 5 (1950), Nr. 6, 435-439. <https://journals.jps.jp/doi/pdf/10.1143/JPSJ.12.570> - zitiert auf S. 75.
- [Katok u. Hasselblatt 2009]
KATOK, Anatole ; HASSELBLATT, Boris: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. 10. printing. Cambridge University Press, New York, USA, 2009 - zitiert auf S. 389.
- [Katsnelson 2007]
KATSNELSON, Mikhail I.: Graphene: carbon in two dimensions. In: *materialstoday* 10

- (2007), Nr. 1-2, 20–27. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1369702106717886> - zitiert auf S. 144.
- [Kittel 1969]
KITTEL, Charles: *Einführung in die Festkörperphysik*. 2. Oldenbourg, 1969 - zitiert auf S. 35.
- [von Klitzing u. a. 1980]
KLITZING, K. von ; DORDA, G. ; PEPPER, M.: New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. In: *Physical Review Letters* 45 (1980), Nr. 6, 494–497. <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.45.494> - zitiert auf S. 85, 129, 167.
- [Knapp 1986]
KNAPP, Anthony W.: *Representation Theory of Semisimple Groups - An Overview Based On Examples*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1986 - zitiert auf S. 588.
- [Kobayashi u. Nomizu 1969]
KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry*. Bd. II. Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1969 - zitiert auf S. 740.
- [Koecher 1992]
KOECHER, Max: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, 1992 - zitiert auf S. 752.
- [Kofink 1949]
KOFINK, W.: Zur Mathematik der Diracmatrizen: die Bargmannsche Hermitisierungsmatrix A und die Paulische Transpositionsmatrix B. In: *Mathematische Zeitschrift* (1949), Nr. 51, S. 702–711 - zitiert auf S. 678, 684.
- [Kosterlitz u. Thouless 1973]
KOSTERLITZ, J. M. ; THOULESS, D. J.: Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. In: *J. Phys. C: Solid State Phys.* 6 (1973), Nr. 7, 1181–1203. <https://www.physics.uci.edu/~taborek/publications/other/jcv6i7p1181.pdf> - zitiert auf S. 127.
- [Kosterlitz 2019]
KOSTERLITZ, J. M.: David Thouless obituary. In: *The Guardian* 19.04.2019 (2019). <https://www.theguardian.com/science/2019/apr/19/david-thouless-obituary> - zitiert auf S. 128.
- [Kragh 1990]
KRAGH, Helge: *Dirac : a scientific biography*. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1990 - zitiert auf S. 653.
- [Kriegl 2006]
KRIEGL, Andreas: *Algebraic Topology*. <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/alg-top.pdf>. Version: 2006 - zitiert auf S. 437, 470.
- [Kubo 1957]

- KUBO, Ryogo: Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. In: *J. Phys. Soc. Jpn.* 12 (1957), S. 570–586 - zitiert auf S. 108, 119.
- [Landau u. Lifschitz 1963]
LANDAU, L.D. ; LIFSCHITZ, E.M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie*. 6. Akademie Verlag GmbH, 1963 - zitiert auf S. 730.
- [Laughlin 1983]
LAUGHLIN, R. B.: Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. In: *Physical Review Letters* 50 (1983), Nr. 18, 1395–1398. <http://gtw1x.jpkc.fudan.edu.cn/reference/FQHE-T.pdf> - zitiert auf S. 180, 181, 196.
- [Lawson u. Michelsohn 1989]
LAWSON, Jr. H. B. ; MICHELSON, Marie-Louise: *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1989 - zitiert auf S. 614.
- [Lechner 2021]
LECHNER, Gandalf: Zopfgruppen, die Yang-Baxter-Gleichung und Unterfaktoren. (2021), 1–16. <https://publications.mfo.de/handle/mfo/3872> - zitiert auf S. 172.
- [Lee 2012]
LEE, John M.: Simply Connected Spaces. (2012). <http://www.math.washington.edu/~lee/Courses/441-2012/simplyconn.pdf?v2> - zitiert auf S. 404.
- [Leinaas u. Myrheim 1977]
LEINAAS, J. M. ; MYRHEIM, J.: On the Theory of Identical Particles. In: *Il Nuovo Cimento B* 37 (1977), Nr. 1, 1–23. <https://www.ifi.unicamp.br/~cabrera/teaching/referencia.pdf> - zitiert auf S. 171.
- [Lewis 2009]
LEWIS, Clinton L.: Explicit gauge covariant Euler-Lagrange equation. In: *American Journal of Physics* (2009), Nr. 77, 839–843. <https://arxiv.org/pdf/0907.2301> - zitiert auf S. 688.
- [Lounesto 2001]
LOUNESTO, Pertti: *Clifford Algebras and Spinors*. 2.ed. University Press, Cambridge, 2001. – 1.ed. 1997 - zitiert auf S. 630.
- [Mania 2012]
MANIA, Hubert: *Gauß - Eine Biographie*. Rowohlt Verlag, Reinbeck bei Hamburg, 2012 - zitiert auf S. 277.
- [Milnor 1963]
MILNOR, John W.: *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1963 - zitiert auf S. 484, 486, 489, 491, 497.
- [Milnor 1965]
MILNOR, John W.: *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, Princeton, NJ., USA, 1965 - zitiert auf S. 379, 382, 484.

[Milnor 1999]

MILNOR, John W.: *Dynamics in one complex variable*. Vieweg, 1999 - zitiert auf S. 485.

[Milnor u. Stasheff 1974]

MILNOR, John W. ; STASHEFF, James D.: *Characteristic Classes*. Princeton University Press, Princeton, NJ. USA, 1974 - zitiert auf S. 485, 740.

[Misner u. a. 1973]

MISNER, Charles W. ; THORNE, Kip S. ; WHEELER, John A.: *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA., USA, 1973 - zitiert auf S. 17, 299, 569, 601.

[MIT150 2010]

MIT150, Celebration: Interview with Isadore M. Singer. (2010). <https://infinite.mit.edu/video/isadore-m-singer> - zitiert auf S. 793.

[Moore u. Seiberg 1989]

MOORE, G. ; SEIBERG, N.: Classical and quantum conformal field theory. In: *Comm. Math. Phys.* 123 (1989), 171–254. <https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-123/issue-2/Classical-and-quantum-conformal-field-theory/cmp/1104178762.pdf> - zitiert auf S. 214.

[Munkres 1966]

MUNKRES, James R.: *Elementary Differential Topology*. Princeton Univ. Press, Princeton, USA, 1966 - zitiert auf S. 372, 417.

[Naik 2011]

NAIK, Vipul: Homology of torus. (2011). https://topospaces.subwiki.org/wiki/Homology_of_torus - zitiert auf S. 39.

[Nakahara 2003]

NAKAHARA, Mikio: *Geometry, Topology and Physics*. Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL., USA, 2003 - zitiert auf S. 16, 17, 53, 70, 235, 298, 299, 310, 394, 400, 415, 422, 438, 513, 523, 608, 678, 679, 698, 704, 711, 723, 740, 742, 785, 800, 801.

[Nash u. Sen 1983]

NASH, Charles ; SEN, Siddharta: *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, Inc., New York, 1983 - zitiert auf S. 394, 415, 740, 769.

[Nayak u. a. 2008]

NAYAK, Chetan ; SIMON, Stephen H. ; STERN, Ady ; FREEDMAN, Michael ; DAS SARMA, Sankar: Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation. In: *Rev. Mod. Phys.* (2008), Nr. 80, 1083. <https://arxiv.org/pdf/0707.1889.pdf?fname=cm&font=TypeI> - zitiert auf S. 230.

[Neto u. a. 2009]

NETO, A. H. C. ; GUINEA, F. ; PERES, N. M. ; NOVOSELOV, K. S. ; GEIM, A. K.: The electronic properties of graphene. In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (2009), 109. <https://arxiv.org/pdf/0709.1163> - zitiert auf S. 163.

[Nicolaescu 2012]

NICOLAESCU, Liviu: *An Invitation to Morse Theory*. 2. printing. Springer Science+Business Media, Inc., New York, (NY), USA, 2012 - zitiert auf S. 486.

[Nieh 2007]

NIEH, H.T.: A Torsional Topological Invariant. In: *International Journal of Modern Physics A* 22 (2007), Nr. 29, 5237–5244. <https://arxiv.org/pdf/1309.0915.pdf> - zitiert auf S. 777, 780, 788.

[Nieh u. Yan 1982]

NIEH, H.T. ; YAN, M.L.: An identity in Riemann-Cartan geometry. In: *J. Math. Phys.* 23 (1982), Nr. 3, S. 373–374 - zitiert auf S. 777, 780, 784.

[Novoselov u. a. 2004]

NOVOSELOV, K.S. ; GEIM, A.K. ; MOROZOV, S.V. ; JIANG, D. ; ZHANG, Y. ; DUBONOS, S.V. ; GRIGORIEVA, I.V. ; FIRSOV, A.A.: Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. In: *Science* 306 (2004), 666–669. https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0410550.pdf?origin=publication_detail - zitiert auf S. 143, 144.

[O'Connor u. Robertson 2013]

O'CONNOR, J.J. ; ROBERTSON, E.F.: The MacTutor History of Mathematics archive: Élie Cartan. (2013). <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cartan.html> - zitiert auf S. 323.

[O'Connor u. Robertson 2019]

O'CONNOR, J.J. ; ROBERTSON, E.F.: The MacTutor History of Mathematics archive: William Kingdon Clifford. (2019). <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Clifford.html> - zitiert auf S. 614.

[Pauli 1936]

PAULI, W.: Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac. In: *Annales de l'I. H. P.* 6 (1936), Nr. 2, 109–136. http://www.numdam.org/item/AIHP_1936__6_2_109_0.pdf - zitiert auf S. 678, 684.

[Penrose 2004]

PENROSE, Roger: *The Road To Reality*. Vintage Books, Random House, Inc., New York, 2004 - zitiert auf S. 692.

[Penrose u. Rindler 1984]

PENROSE, Roger ; RINDLER, Wolfgang: *Spinors and space-time - Vol. 1*. Bd. 1. Cambridge University Press, 1984 - zitiert auf S. 678.

[Petraschen u. Trifonow 1969]

PETRASCHEN, M.I. ; TRIFONOW, E.D.: *Anwendung der Gruppentheorie in der Quantenmechanik*. Akademie Verlag, 1969 - zitiert auf S. 21.

[Phillips 2013]

PHILLIPS, Tony: Descartes's Lost Theorem. In: *American Mathematical Society, Online* (2013). <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-descartes1> - zitiert auf S. 271.

[Pilet u. Struik 1970]

PILET, P. E. ; STRUIK, D. J.: *Biography in Dictionary of Scientific Biography: Pierre Ossian Bonnet*. New York <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900523.html> - zitiert auf S. 365.

[Pontryagin 1966]

PONTRYAGIN, L. S.: *Topologica Groups*. Gordon and Breach, Science Pub., Inc., New York, (NY), USA, 1966 - zitiert auf S. 739.

[Prange u. Girvin 1987a]

PRANGE, Richard E. (Hrsg.) ; GIRVIN, Stevens M. (Hrsg.): Springer-Verlag, New York, 1987 - zitiert auf S. 86, 129.

[Prange u. Girvin 1987b]

PRANGE, Richard E. (Hrsg.) ; GIRVIN, Stevens M. (Hrsg.): *Topological Considerations*. Springer Verlag, New York, USA, 1987. – 101–116 S - zitiert auf S. 127.

[Preskill 1998]

PRESKILL, John: *Quantum Information and Computation* (Lecture Notes for Physics 229). http://www2.fiit.stuba.sk/~kvasnicka/QuantumComputing/PreskilTextbook_all.pdf - zitiert auf S. 209, 230, 231.

[Raussen u. Skau 2004]

RAUSSEN, Martin ; SKAU, Christian: Interview with Michael Atiyah and Isadore Singer. In: *European Mathematical Society Newsletter* (2004), 24–30. <http://www.ams.org/notices/200502/comm-interview.pdf> - zitiert auf S. 793.

[Rebhan 2005]

REBHAN, Eckhard: *Theoretische Physik II*. 1. Aufl. Elsevier - Spektrum Akademischer Verlag, 2005 - zitiert auf S. 182, 192.

[Reed u. Simon 1980]

REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics - Vol. 1 - Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1980 - zitiert auf S. 16, 74.

[Ribeiro u. a. 2009]

RIBEIRO, R. M. ; PEREIRA, Vitor M. ; PERES, N. M. R. ; BRIDDON, P. R. ; CASTRO NETO, A. H.: Strained graphene: tight-binding and density functional calculations. In: *New J. Phys.* 11 (2009), 11502. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/11/11/115002/pdf> - zitiert auf S. 153.

[Richter u. Schiekel 2004]

RICHTER, H. ; SCHIEKEL, B.: Potenzsummen, Bernoulli-Zahlen und Eulersche Summenformel. (2004). <http://dx.doi.org/10.18725/OPARU-1819> - zitiert auf S. 760.

[Riemann 1854]

RIEMANN, Bernhard: Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. In: *Online: Göttinger Digitalisierungszentrum* (1854). <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?IDDOC=35634> - zitiert auf S. 298.

[Roberts 2016]

ROBERTS, Siobhan: Michael Atiyah's Imaginative State of Mind.

- In: *Quanta Magazine* (2016). <https://www.quantamagazine.org/michael-atiyahs-mathematical-dreams-20160303> - zitiert auf S. 792.
- [Roe 1998]
ROE, John: *Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods*. 2. ed. Addison Wesley Longman Ltd., Essex, England, 1998 - zitiert auf S. 795.
- [Roy 2010]
ROY, Ricky: Representation Theory. (2010). <http://buzzard.ups.edu/courses/2010spring/projects/roy-representation-theory-ups-434-2010.pdf> - zitiert auf S. 21.
- [Růžička 2004]
RŮŽIČKA, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, 2004 - zitiert auf S. 379.
- [Ryder 2003]
RYDER, Lewis H.: *Quantum Field Theory*. 2. ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2003 - zitiert auf S. 655.
- [Sattinger u. Weaver 1986]
SATTINGER, D. H. ; WEAVER, O. L.: *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*. Springer Verlag, New York, USA, 1986 - zitiert auf S. 537, 541, 563.
- [Scharlau 2017]
SCHARLAU, Winfried: *Das Glück, Mathematiker zu sein. Friedrich Hirzebruch und seine Zeit*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017 - zitiert auf S. 790.
- [Schiekel 2017]
SCHIEKEL, Bernhard: *Zeta-Funktionen in der Physik - eine Einführung*. 4. ed. Universität Ulm, Fakultät für Naturwissenschaften, Online <https://dx.doi.org/10.18725/OPARU-4418> - zitiert auf S. 794, 803.
- [Schiekel 2019]
SCHIEKEL, Bernhard: *Krümmungen und Indexsätze - auf den Spuren von Gauß-Bonnet, Cartan, Atiyah-Singer und Witten. Eine Einführung in Geometrie und Topologie für Physiker*. <https://oparu.uni-ulm.de/xmlui/handle/123456789/17219> - zitiert auf S. 15, 235, 352, 523, 531, 532, 534, 535, 692, 694, 794, 795, 796.
- [Schutz 1980]
SCHUTZ, Bernhard: *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain, 1980 - zitiert auf S. 16, 235.
- [Scriba u. Schreiber 2010]
SCRIBA, C. J. ; SCHREIBER, P.: *5000 Jahre Geometrie*. Springer Verlag, Heidelberg, 2010 - zitiert auf S. 238, 239, 241, 247, 252, 267.
- [Shanahan 1978]
SHANAHAN, Patrick: *The Atiyah-Singer Index Theorem*. Springer Verlag, Berlin, 1978 - zitiert auf S. 753, 797.

- [Shapere u. Wilczek 1989]
SHAPER, Alfred (Hrsg.) ; WILCZEK, Frank (Hrsg.): World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1989 - zitiert auf S. 53, 73.
- [Shastri 2011]
SHASTRI, Anant R.: *Elements of Differential Topology*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 2011 - zitiert auf S. 379.
- [Simon 1983]
SIMON, B.: Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase. In: *Phys. Rev. Letters* 51 (1983), Nr. 24, 2167–2170. <https://authors.library.caltech.edu/85897/1/PhysRevLett.51.2167.pdf> - zitiert auf S. 53, 73.
- [Smolin 2019]
SMOLIN, Lee: *Einstein's Unfinished Revolution*. Penguin Press, 2019 - zitiert auf S. 64.
- [Spivak 1979]
SPIVAK, Michael: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Bd. I-V. Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA., USA, 1979 - zitiert auf S. 250, 252, 267, 277, 285, 286, 312, 350, 366, 369, 372, 373, 417, 485, 704, 738, 740.
- [Steane 2013]
STEANE, Andrew M.: An introduction to spinors. (2013). <http://arxiv.org/pdf/1312.3824> - zitiert auf S. 599.
- [Steenrod 1951]
STEENROD, Norman: *Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, Princeton, USA, 1951 - zitiert auf S. 698.
- [Stöcker u. Zieschang 1994]
STÖCKER, Ralph ; ZIESCHANG, Heiner: *Algebraische Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994 - zitiert auf S. 39, 415, 416, 417, 437, 441, 458, 461, 463, 470.
- [Streater u. Wightman 1969]
STREATER, R. F. ; WIGHTMAN, A.S.: *PCT - Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1969 - zitiert auf S. 170, 676.
- [Sylvain 2018]
SYLVAIN, Rossi: The Dirac monopole and the 't Hooft-Polyakov monopole. (2018). https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/itp-dam/documents/gaberdiel/proseminar_fs2018/20_Rossi.pdf - zitiert auf S. 53.
- [Taylor 1996]
TAYLOR, Michael E.: *Partial Differential Equations - 1. Basic Theory*. Springer-Verlag, New York, 1996 - zitiert auf S. 523.
- [Tenjinbayashi u. a. 2007]
TENJINBAYASHI, Yasushi ; IGARASHI, Hiroshi ; FUJIWARA, Takanori: Dirac-Operator Zero-modes on a Torus. In: *Annals of Physics* 322 (2007), Nr. 2, 460–488. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0506259> - zitiert auf S. 159, 161, 163.

[Thaller 1992]

THALLER, Bernd: *The Dirac Equation*. Springer Verlag, Berlin, 1992 - zitiert auf S. 651.

[Thouless u. a. 1982]

THOULESS, D. J. ; KOHMOTO, M. ; NIGHTINGALE, M. P. ; NIJS, M. den: Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential. In: *Physical Review Letters* 49 (1982), Nr. 6, 405–408. <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.49.405> - zitiert auf S. 86, 127, 129.

[Thouless 1998]

THOULESS, David J.: World Scientific, Singapore, 1998 - zitiert auf S. 127.

[Tong 2012]

TONG, David: *Kinetic Theory* <https://julianoliver.com/share/free-science-books/kt.pdf> - zitiert auf S. 108, 122.

[Tong 2016]

TONG, David: *The Quantum Hall Effect* <https://arxiv.org/pdf/1606.06687.pdf> - zitiert auf S. 68, 86, 122, 124, 129, 135, 137, 181, 196, 201, 203, 209, 217, 231.

[de Traubenberg 2005]

TRAUBENBERG, M. R.: Clifford Algebras in Physics. (2005). <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0506011.pdf> - zitiert auf S. 641, 645.

[Trebst u. a. 2008]

TREBST, Simon ; TROYER, Matthias ; WANG, Zhenghan ; LUDWIG, Andreas W. W.: A short introduction to Fibonacci anyon models. In: *Progress of Theoretical Physics Supplement* (2008), Nr. 176, 384–407. <https://arxiv.org/pdf/0902.3275> - zitiert auf S. 217.

[Tsui u. a. 1982]

TSUI, D. C. ; STORMER, H. L. ; GOSSARD, A. C.: Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. In: *Physical Review Letters* 48 (1982), Nr. 22, 1559–1562. <https://link.aps.org/pdf/10.1103/PhysRevLett.48.1559> - zitiert auf S. 167, 180.

[Varadarajan 1984]

VARADARAJAN, Veeravalli S.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*. 2. printing. Springer Verlag, New York, USA, 1984 - zitiert auf S. 537, 545, 563.

[van der Waerden 1974]

WAERDEN, B. L. d.: *Group Theory and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1974 - zitiert auf S. 537, 589.

[Wald 1984]

WALD, Robert M.: *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, USA, 1984 - zitiert auf S. 17, 298, 299.

[Weinberg 1995a]

WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields*. Bd. I. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1995 - zitiert auf S. 569, 676.

[Weinberg 1995b]

WEINBERG, Steven: *The Quantum Theory of Fields - Supersymmetry*. Bd. III. Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1995 - zitiert auf S. 668.

[Werner 2005]

WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 5. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2005 - zitiert auf S. 585, 587.

[Weyl 1929]

WEYL, H.: Elektron und Gravitation. In: *Z. Phys.* 56 (1929), 330–352. http://www.neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/weyl_-_electron_and_gravitation_i.pdf - zitiert auf S. 678.

[Wikipedia-Adiabatic-theorem 2021]

WIKIPEDIA-ADIABATIC-THEOREM: Adiabatic theorem. (2021). https://en.wikipedia.org/wiki/Adiabatic_theorem - zitiert auf S. 75.

[Wikipedia-Crystal_System 2020]

WIKIPEDIA-CRYSTAL_SYSTEM: Crystal System. (2020). https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system - zitiert auf S. 32.

[Wikipedia-Delta-Distribution 2020]

WIKIPEDIA-DELTA-DISTRIBUTION: Delta-Distribution. (2020). <https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution> - zitiert auf S. 36, 44.

[Wikipedia-Fibonacci 2022]

WIKIPEDIA-FIBONACCI: Fibonacci-Folge. (2022). <https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge> - zitiert auf S. 218, 221.

[Wikipedia-Goldener_Schnitt 2022]

WIKIPEDIA-GOLDENER_SCHNITT: Goldener Schnitt. (2022). https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt - zitiert auf S. 218.

[Wikipedia-Golden_ratio 2022]

WIKIPEDIA-GOLDEN_RATIO: Golden ratio. (2022). https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio - zitiert auf S. 218.

[Wikipedia-Green's_Function 2022]

WIKIPEDIA-GREEN'S_FUNCTION: Green's function. (2022). https://en.wikipedia.org/wiki/Green's_function - zitiert auf S. 199.

[Wikipedia-Grönwall_Ungleichung 2021]

WIKIPEDIA-GRÖNWALL_UNGLEICHUNG: Grönwall-Ungleichung. (2021). https://en.wikipedia.org/wiki/Gr%C3%B6nwall's_inequality - zitiert auf S. 75.

[Wikipedia-Hermitesches_Polynom 2022]

WIKIPEDIA-HERMITESCHES_POLYNOM: Hermitesches Polynom. (2022), Mai. https://de.wikipedia.org/wiki/Hermitesches_Polynom - zitiert auf S. 136.

[Wikipedia-Hockey-stick 2020]

WIKIPEDIA-HOCKEY-STICK: Hockey-stick_identity. (2020), 9. https://en.wikipedia.org/wiki/Hockey-stick_identity - zitiert auf S. 39.

- [Wikipedia-Kugelkoordinaten 2021]
WIKIPEDIA-KUGELKOORDINATEN: Kugelkoordinaten. (2021). <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten> - zitiert auf S. 57.
- [Wikipedia-Poincaré-Vermutung 2015]
WIKIPEDIA-POINCARÉ-VERMUTUNG: Poincaré-Vermutung. (2015). <https://de.wikipedia.org/wiki/Poincare-Vermutung> - zitiert auf S. 394, 474.
- [Wikipedia-Quanta_Magazine 2021]
WIKIPEDIA-QUANTA_MAGAZINE: Quanta Magazine. (2021). https://en.wikipedia.org/wiki/Quanta_Magazine - zitiert auf S. 75.
- [Wikipedia-Quantum_Hall_Transitions 2022]
WIKIPEDIA-QUANTUM_HALL_TRANSITIONS: Quantum Hall Transitions. (2022). https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Hall_transitions - zitiert auf S. 142.
- [Wikipedia-Simon-Probleme 2021]
WIKIPEDIA-SIMON-PROBLEME: Simon-Probleme. (2021). <https://de.wikipedia.org/wiki/Simon-Probleme> - zitiert auf S. 74.
- [Wikipedia-Zylinderkoordinaten 2021]
WIKIPEDIA-ZYLINDERKOORDINATEN: Zylinderkoordinaten. (2021). <https://de.wikipedia.org/wiki/Zylinderkoordinaten> - zitiert auf S. 68.
- [Wilczek 1982]
WILCZEK, Frank: Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles. In: *Phys. Rev. Letters* (1982), 957–959. <https://www.fuw.edu.pl/~pzdybel/WilczekAnyon.pdf> - zitiert auf S. 171.
- [Wilkins 2008]
WILKINS, David R.: Algebraic Topology, Section 4: Covering Maps and Discontinuous Group Actions. (2008). http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/421/421S4_0809.pdf - zitiert auf S. 411.
- [Woit 2021]
WOIT, Peter: Isadore Singer 1924-2021. (2021). <https://www.math.columbia.edu/~woit/wordpress/?p=12186> - zitiert auf S. 793.
- [Wolf-Foundation 1998]
WOLF-FOUNDATION: Wolf-Preis 1998: Aharonov und Berry. (1998). <https://wolffund.org.il/2018/12/10/yakir-aharonov> - zitiert auf S. 66, 73.
- [Zeidler 1986]
ZEIDLER, Eberhard: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Springer Verlag, New York, USA, 1986 - zitiert auf S. 379.
- [Zeidler 2003]
ZEIDLER, Eberhard: *Teubner - Taschenbuch der Mathematik*. Bd. I. 2. Aufl. Teubner Verlag, 2003 - zitiert auf S. 68.
- [Zeidler 2006]
ZEIDLER, Eberhard: *Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics*. Springer Verlag, Berlin, 2006 - zitiert auf S. 15, 53, 67.

[Zeidler 2011]

ZEIDLER, Eberhard: *Quantum Field Theory III: Gauge Theory*. Springer Verlag, Berlin, 2011 - zitiert auf S. 172, 179, 614, 615, 617, 723, 724.

[Ziman 1975]

ZIMAN, J. M.: *Prinzipien der Festkörpertheorie*. Bd. 6. Verlag Harri Deutsch, 1975 - zitiert auf S. 131, 135.